Челябинский физико-математический журнал. 2020. Т. 5, вып. 3. С. 293–305.

УДК 517.983

DOI: 10.47475/2500-0101-2020-15304

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ. II

Л. Н. Ляхов[1,2,a], **Н. И. Трусова**[2,b]

[1] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
[2] *Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семёнова-Тян-Шанского, Липецк, Россия*
[a] *levnlya@mail.ru*, [b] *trusova.nat@gmail.com*

Рассмотрен общий вид линейного интегрального оператора с частными интегралами в $\mathbb{R}_3$ в виде суммы восьми интегральных выражений, среди которых частные интегралы по одной и по двум переменным. Действие указанного оператора изучено в рамках пространства $C(\Omega_1; L_p(\Omega_2))$ — непрерывных функций на $\overline{\Omega}_1$ со значениями в лебеговом классе $L_p(\Omega_2)$, $1 < p < \infty$, где $\Omega_1 \times \Omega_2 = D$ — конечный параллелепипед в $\mathbb{R}_3$. Доказана принадлежность рассматриваемых операторов классу линейных ограниченных операторов из анизотропного класса лебеговых функций L_{p,p^2} в класс функций со смешанной нормой $C(\Omega_1; L_p(\Omega_2))$.

Ключевые слова: *функция со значениями в банаховом пространстве, частный интеграл, линейный оператор с частными интегралами, анизотропные классы функций Лебега.*

1. Интегральные операторы с частными интегралами в $\mathbb{R}_3$

На основе sup-норм ограниченность интегральных операторов с частными интегралами достаточно подробно изучена (см. книги [1; 2] и имеющиеся в них ссылки). Попытки исследовать ограниченность частных интегралов в рамках интегральной меры Лебега приводят к анизотропным классам функций (т. е. к функциям с различными свойствами по разным переменным).

В работе [3] рассмотрены случаи ограниченности таких операторов в анизотропных лебеговых классах функций $L_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $p_i > 1$. В работе [4] рассматривались частные интегралы в $\mathbb{R}_2$, а анизотропность функциональных классов понимается в другом смысле: по первой переменной применяется sup-норма, а по второй — лебегова L_p-норма при $1 < p < \infty$. Интересно отметить, что и этот случай также, как в [3], приводит к анизотропным лебеговым классам $L_{\mathbf{r}}$ с мультииндексом $\mathbf{r} = (p, p^2)$ или $\mathbf{r} = (q, pq)$. Анизотропность функций естественна для частных интегралов, что отмечено ещё В. И. Романовским, см. работу [5] или книгу [6].

В этой работе мы продолжаем исследования линейного интегрального оператора с частными интегралами, начатые в [4], но в евклидовом пространстве размерности $n = 3$. Это даёт возможность выяснить природу возникновения анизотропных свойств действия частного интеграла на соответствующую функцию.

Через $D_\alpha^{(m)}$ будем обозначать конечную область в $\mathbb{R}_m$ евклидовой размерности $m \leq 3$ с индексами переменных α. Например, $D_1^{(1)} = (a_1, b_1)$, $D_{1,3}^{(2)} = (a_1, b_1) \times$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-41-480002).

(a_3, b_3) и т. д. Через $D = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3) = D^{(3)}_{1,2,3}$ обозначим конечный параллелепипед в $\mathbb{R}_3$.

Общий вид интегрального оператора с частными интегралами задаётся суммой операторов

$$K = K_0 + K^{(1)}_1 + K^{(1)}_2 + K^{(1)}_3 + K^{(2)}_{1,2} + K^{(2)}_{1,3} + K^{(2)}_{2,3} + K^{(3)}_{1,2,3}, \tag{1}$$

в которой действие каждого слагаемого на произвольную измеримую функцию определяется выражениями

$$(K_0 u)(x) = k_0(x_1, x_2, x_3) u(x_1, x_2, x_3);$$

$$(K^{(1)}_1 u)(x) = \int\limits_{D^{(1)}_1} k_1(x; t_1)\ u(t_1, x_2, x_3)\ dt_1;$$

$$(K^{(1)}_2 u)(x) = \int\limits_{D^{(1)}_2} k_2(x; t_2)\ u(x_1, t_2, x_3)\ dt_2;$$

$$(K^{(1)}_3 u)(x) = \int\limits_{D^{(1)}_3} k_3(x; t_3)\ u(x_1, x_2, t_3)\ dt_3;$$

$$(K^{(2)}_{1,2} u)(x) = \int\limits_{D^{(2)}_{1,2}} k_{1,2}(x; t_1, t_2)\ u(t_1, t_2, x_3)\ dt_1 dt_2;$$

$$(K^{(2)}_{1,3} u)(x) = \int\limits_{D^{(2)}_{1,3}} k_{1,3}(x; t_1, t_3)\ u(t_1, x_2, t_3)\ dt_1 dt_3;$$

$$(K^{(2)}_{2,3} u)(x) = \int\limits_{D^{(2)}_{2,3}} k_{2,3}(x; t_2, t_3)\ u(x_1, t_2, t_3)\ dt_2 dt_3;$$

$$(K^{(3)}_{1,2,3} u)(x) = \int\limits_{D^{(3)}_{1,2,3}} k_{1,2,3}(x; t)\ u(t_1, t_2, t_3)\, dt_1 dt_2 dt_3.$$

Общий вид составляющих оператора K удобно записывать в виде

$$(K^{(m)}_\alpha u)(x) = \int\limits_{D^{(m)}_\alpha} k_\alpha(x; t_\alpha)\ u(x_{\overline{\alpha}}, t_\alpha)\ dt_\alpha\,,$$

где α, $\overline{\alpha}$ — мультииндексы, дополняющие друг друга до полного мультииндекса $(1, 2, 3)$, m — размерность области интегрирования. Если индекс $\alpha = 0$, то и $m = 0$, а оператор $K^{(0)}_0 = K_0$ — оператор умножения на функцию. А другая крайность, $K^{(3)}_{1,2,3}$ при $\alpha = (1, 2, 3)$ соответствует интегральному оператору. Все промежуточные операторы представляют собой частные интегралы в $\mathbb{R}_3$. В этих обозначениях оператор (1) примет вид

$$K = \sum_\alpha K^{(m)}_\alpha\,. \tag{2}$$

Каждый из этих операторов мы исследуем на непрерывность действия в пространство непрерывных функций $C(D_\gamma^{(n-m)})$ со значениями в банаховом пространстве $L_p(D_\beta^{(m)})$. Этот класс функций обозначим $C(D_\gamma^{(n-m)}; L_p(D_\beta^{(m)}))$ (см. [7, с. 19]). Норму в данном классе определим равенством

$$\|f\|_{C(D_\gamma^{(n-m)};L_p(D_\beta^{(m)}))} = \sup_{x_\gamma \in \overline{D_\gamma^{(n-m)}}} \left(\int\limits_{D_\beta^{(m)}} |f(x_\gamma, x_\beta)|^p \, dx_\beta \right)^{1/p},$$

где $x = (x_\gamma, x_\beta)$ и элементы мультииндексов γ и β не совпадают.

Примером такой нормы в параллелепипеде $D \in \mathbb{R}_3$ является следующая

$$\|f\|_{C\left(D_{1,2}^{(2)};L_p(D_3^{(1)})\right)} = \sup_{x \in \overline{D_{1,2}^{(2)}}} \left(\int\limits_{a_3}^{b_3} |f(x_1, x_2, x_3)|^p \, dx_3 \right)^{1/p}.$$

Роль переменной интегрирования могут выполнять произвольные наборы из координат x_1, x_2, x_3. Приведём оценки для подобных норм функций в пространстве $C(D_\gamma^{(3-m)}; L_p(D_\beta^{(m)}))$, состоящем из непрерывных в $\overline{D_\gamma^{(3-m)}}$ функций со значениями в банаховом пространстве $L_p(D_\beta^{(m)})$. При этом (x_β, x_γ) — точка в $\mathbb{R}_3$, а наборы номеров β и γ в каждом из рассматриваемых случаев фиксированы, составлены из чисел 1, 2, 3; например, если $\beta = 2$, то $\gamma = (1, 3)$, если $\beta = (1, 2)$, то $\gamma = 3$, если $\beta = (2, 3)$, то $\gamma = 1$ и т. д.

2. Смешанные $C(D_\gamma^{(3-m)}; L_p(D_\beta^{(m)}))$-нормы

Рассматриваются два типа смешанных норм. Первый — sup-норма берётся по двум переменным (п. 2.1), второй — sup-норма берётся только по одной переменной (п. 2.2). Разумеется, порядок нумерации переменных не важен. Поскольку линейный интегральный оператор (1) состоит из восьми слагаемых, то для каждого случая приведено соответствующее утверждение. Доказательства приводятся только в принципиально отличающихся случаях.

Замечание 1. Отметим одну особенность принятых далее обозначений — это наличие символа «;», разделяющего подстрочные индексы. Это разделение номеров переменных, по которым действуют соответствующие показатели лебеговых пространств. Например,

$$\|f\|_{L_{r_1;r_2}(D_{2,3;1}^{(3)})} = \left(\int_{D_1^{(1)}} \left(\int_{D_{2,3}^{(2)}} |f(x)|^{r_1} dx_2 dx_3 \right)^{r_2/r_1} dx_1 \right)^{1/r_2},$$

$$\|f\|_{L_{r_1;r_2}(D_{2;1,3}^{(3)})} = \left(\int_{D_{1,3}^{(2)}} \left(\int_{D_2^{(1)}} |f(x)|^{r_1} dx_2 \right)^{r_2/r_1} dx_1 dx_3 \right)^{1/r_2}.$$

Также встречаются нормы ядер операторов $K_\alpha^{(m)}$, которые зависят и от переменных x и от переменных t. Это приводит к необходимости вводить нормы с повторяющимися индексами номеров переменных (например, по x_3 и по t_3), типа $L_{q;pq}(D_{2,3;3}^{(3)})$ (см. например, утверждение 7). Соответствующие анизотропные лебеговы нормы применены далее практически во всех утверждениях.

2.1. Смешанные $C(D^{(2)}_{1,2}\,;\, L_p(D^{(1)}_3))$-нормы функций $K^{(m)}_\alpha u$

Анизотропные $L_{\mathbf{r}}(\Omega_1\times\Omega_2)$-нормы функций $\mathbf{r}=(r_1,r_2)$ имеют вид

$$\|u\|_{L_{\mathbf{r}}}=\left(\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1}|u(x_1,x_2)|^{r_1}dx_1\right]^{r_2/r_1}dx_2\right)^{1/r_2}. \qquad (3)$$

Из этого определения видно, что $\|f\|_{L_{\mathbf{r}}(\Omega)}=\|\|f(x_2)\|_{L_{r_1}(\Omega_1)}\|_{L_{r_2}(\Omega_2)}$. Далее увидим, что при исследовании непрерывности линейного интегрального оператора (2) в обычном пространстве функций со значениями в лебеговом (опять таки — обычном) классе функций возникают анизотропные $L_{\mathbf{r}}$-нормы с $\mathbf{r}$ равным (p,p^2) или (q,pq).

Утверждение 1. *Пусть* $1/p+1/q=1$, $p\in(1,\infty)$. *Если*

$$u(x_1,x_2,x_3)\in C\left(D^{(2)}_{1,2};L_{p^2}(D^{(1)}_3)\right),\quad k_0=k_0(x)\in C\left(D^{(2)}_{1,2};L_{pq}(D^{(1)}_3)\right),$$

то $K_0u\in C\left(D^{(2)}_{1,2};L_p(D^{(1)}_3)\right)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $K_0u(x)=k_0(x)\,u(x)$. Имеем

$$\|K_0u\|_{C(D^{(2)}_{1,2};\,L_p(D^{(1)}_3))}=\sup_{x_1,x_2\in\overline{D^{(2)}_{1,2}}}\left(\left[\int\limits_{D^{(1)}_3}|\,k_0(x_1,x_2,x_3)\;u(x_1,x_2,x_3)\,|^p\,dx_3\right]^{1/p}\right).$$

Применив неравенство Гёльдера с показателями p и q, получим

$$\|K_0u\|_{C(D^{(2)}_{1,2};\,L_p(D^{(1)}_3))}\le$$

$$\le\sup_{x_1,x_2\in\overline{D^{(2)}_{1,2}}}\left(\left[\int\limits_{D^{(1)}_3}|\,k_0(x_1,x_2,x_3)|^{pq}\,dx_3\right]^{\frac{1}{pq}}\left[\int\limits_{D^{(1)}_3}|\,u(x_1,x_2,x_3)\,|^{p^2}\,dx_3\right]^{\frac{1}{p^2}}\right)\le$$

$$\le\sup_{x_1,x_2\in\overline{D^{(2)}_{1,2}}}\left(\|k_0(x_1,x_2)\|_{L_{pq}(D^{(1)}_3)}\;\|u(x_1,x_2)\|_{L_{p^2}(D^{(1)}_3)}\right).$$

Отсюда $\|K_0u\|_{C(D^{(2)}_{1,2};\,L_p(D^{(1)}_3))}\le C_0\|u\|_{C(D^{(2)}_{1,2};L_{p^2}(D^{(1)}_3))}$, $C_0=\|k_0\|_{C(D^{(2)}_{1,2};L_{pq}(D^{(1)}_3))}$. Тем самым утверждение 1 доказано. □

Далее в утверждениях 2, 3 и 4 изучаются частные интегралы с одномерными интегралами соответственно по первой, второй и третьей переменным.

Утверждение 2. *Пусть* $1/p+1/q=1$, $p\in(1,\infty)$. *Если*

$$u=u(x)\in C\left(D^{(1)}_2;L_{p,p^2}(D^{(2)}_{1,3})\right),\;\; k_1=k_1(x;t_1)\in C(D^{(2)}_{1,2};L_{q,pq}(D^{(2)}_{1,3})),$$

то $K^{(1)}_1u\in C\left(D^{(2)}_{1,2};L_p(D^{(1)}_3)\right)$.

Утверждение 3. *Пусть* $1/p+1/q=1$, $p\in(1,\infty)$. *Если*

$$u=u(x)\in C\left(D^{(1)}_1;L_{p,p^2}(D^{(2)}_{2,3})\right),\;\; k_2=k_2(x;t_2)\in C(D^{(2)}_{1,2};L_{q,pq}(D^{(2)}_{2,3})),$$

то $K_2^{(1)}u \in C(D_{1,2}^{(2)}; L_p(D_3^{(1)}))$.

Утверждение 4. *Пусть* $1/p + 1/q = 1$, $p \in (1, \infty)$. *Если*

$$u = u(x) \in C\left(D_{1,2}^{(2)}; L_p(D_3^{(1)})\right), \quad k_3 = k_3(x; t_3) \in C\left(D_{1,2}^{(2)}; L_{q,pq}(D_{3,3}^{(2)})\right),$$

то $K_3^{(1)}u \in C(D_{1,2}^{(2)}; L_p(D_3^{(1)}))$.

Доказательства утверждений 2, 3, 4 однотипны, докажем последнее.

Доказательство. Для функции

$$(K_3^{(1)}u)(x) = \int\limits_{D_3^{(1)}} k_3(x; t_3)\ u(x_1, x_2, t_3)\ dt_3$$

имеем

$$\|K_3^{(1)}u\|_{C(D_{1,2}^{(2)};\, L_p(D_3^{(1)}))} = \sup_{x_1, x_2 \in \overline{D_{1,2}^{(2)}}} \left(\left(\int\limits_{D_3^{(1)}} \left[\int\limits_{D_3^{(1)}} |k_3(x; t_3) u(x_1, x_2, t_3)|\, dt_3 \right]^p dx_3 \right)^{1/p} \right).$$

Сначала неравенство Гёльдера с показателями p и q применим к внутреннему, а затем к внешнему интегралу. Получим

$$\|K_3^{(1)}u\|_{C(D_{1,2}^{(2)};\, L_p(D_3^{(1)}))} \le \sup_{x_1, x_2 \in \overline{D_{1,2}^{(2)}}} \left(\left(\int\limits_{D_3^{(1)}} \left[\int\limits_{D_3^{(1)}} |\, k_3(x; t_3)|^q\, dt_3 \right]^{\frac{pq}{q}} dx_3 \right)^{\frac{1}{pq}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int\limits_{D_3^{(1)}} \left[\int\limits_{D_3^{(1)}} |\, u(x_1, x_2, t_3)|^p\, dt_3 \right]^{\frac{p^2}{p}} dx_3 \right)^{\frac{1}{p^2}} \right) \le$$

$$\le (b_3 - a_3)^{1/p^2} \sup_{x_1, x_2 \in \overline{D_{1,2}^{(2)}}} \left(\|\, k_3(x_1, x_2)\|_{L_{q,pq}(D_{3,3}^{(2)})} \|\, u(x_1, x_2)\|_{L_p(D_3^{(1)})} \right).$$

Следовательно, имеем оценку

$$\|K_3^{(1)}u\|_{C(D_{1,2}^{(2)};\, L_p(D_3^{(1)}))} \le C_3 \|u\|_{C(D_{1,2}^{(2)}; L_p(D_3^{(1)}))}, \quad C_3 = (b_3 - a_3)^{1/p^2} \|k_3\|_{C(D_{1,2}^{(2)};\, L_{q,pq}(D_{3,3}^{(2)}))}.$$

Утверждение 4 доказано. □

В следующих трёх утверждениях 5, 6 и 7 в частных интегралах интегрирование осуществляется по двум из трёх переменных.

Утверждение 5. *Пусть* $1/p + 1/q = 1$, $p \in (1, \infty)$. *Если*

$$u = u(x) \in L_{p;p^2}(D_{1,2;3}^{(3)}), \quad k_{1,2}(x; t_1, t_2) \in C\left(D_{1,2}^{(2)}; L_{q;pq}(D_{1,2;3}^{(3)})\right),$$

то $K_{1,2}^{(2)}u \in C(D_{1,2}^{(2)}; L_p(D_3^{(1)}))$.

Утверждение 6. *Пусть* $1/p+1/q=1$, $p\in(1,\infty)$. *Если*

$$u=u(x)\in C\left(D_2^{(1)};L_p(D_{1,3}^{(2)})\right),\quad k_{1,3}=k_{1,3}(x;t_1,t_3)\in C\left(D_{1,2}^{(2)};L_{q;pq}(D_{1,3;3}^{(3)})\right),$$

то $K_{1,3}^{(2)}u\in C(D_{1,2}^{(2)};L_p(D_3^{(1)}))$.

Утверждение 7. *Пусть* $1/p+1/q=1$, $p\in(1,\infty)$. *Если*

$$u=u(x)\in C\left(D_1^{(1)};L_p(D_{2,3}^{(2)})\right),\quad k_{2,3}=k_{2,3}(x;t_2,t_3)\in C(D_{1,2}^{(2)};L_{q;pq}(D_{2,3;3}^{(3)})),$$

то $K_{2,3}^{(2)}u\in C(D_{1,2}^{(2)};L_p(D_3^{(1)}))$.

Доказательство утверждений 5, 6, 7 аналогичны. Докажем утверждение 7.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$(K_{2,3}^{(2)}u)(x)=\int\limits_{D_{2,3}^{(2)}}k_{2,3}(x;t_2,t_3)u(x_1,t_2,t_3)dt_2dt_3.$$

Имеем

$$\|K_{2,3}^{(2)}u\|_{C(D_{1,2}^{(2)};\,L_p(D_3^{(1)}))}=$$

$$=\sup_{x_1,x_2\in\overline{D_{1,2}^{(2)}}}\left(\left(\int\limits_{D_3^{(1)}}\left[\int\limits_{D_{2,3}^{(2)}}|k_{2,3}(x;t_2,t_3)u(x_1,t_2,t_3)\,|dt_2dt_3\right]^p dx_3\right)^{1/p}\right).$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями p и q сначала к внутреннему, а затем к внешнему интегралу, получим

$$\|K_{2,3}^{(2)}u\|_{C(D_{1,2}^{(2)};\,L_p(D_3^{(1)}))}\le\sup_{x_1,x_2\in\overline{D_{1,2}^{(2)}}}\left(\left(\int\limits_{D_3^{(1)}}\left[\int\limits_{D_{2,3}^{(2)}}|\,k_{2,3}(x;t_2,t_3)|^q\,dt_2dt_3\right]^{\frac{pq}{q}}dx_3\right)^{\frac{1}{pq}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int\limits_{D_3^{(1)}}\left[\int\limits_{D_{2,3}^{(2)}}|\,u(x_1,t_2,t_3)|^p\,dt_2dt_3\right]^{\frac{p^2}{p}}dx_3\right)^{\frac{1}{p^2}}\right)\le$$

$$\le(b_3-a_3)^{1/p^2}\sup_{x_1,x_2\in\overline{D_{1,2}^{(2)}}}\|\,k_{2,3}(x_1,x_2)\|_{L_{q;pq}(D_{2,3;3}^{(3)})}\sup_{x_1\in\overline{D_1^{(1)}}}\|\,u(x_1)\|_{L_p(D_{2,3}^{(2)})}.$$

Следовательно,

$$\|K_{2,3}^{(2)}u\|_{C(D_{1,2}^{(2)};\,L_p(D_3^{(1)}))}\le C_{2,3}\|u\|_{C(D_1^{(1)};L_p(D_{2,3}^{(2)}))},\ C_{2,3}=(b_3-a_3)^{1/p^2}\|k_{2,3}\|_{C(D_{1,2}^{(2)};\,L_{q;pq}(D_{2,3;3}^{(3)}))}.$$

Утверждение 7 доказано. □

Утверждение 8. *Пусть* $1/p+1/q=1$, $p\in(1,\infty)$. *Если*

$$u=u(x)\in L_p(D_{1,2,3}^{(3)}),\quad k_{1,2,3}=k_{1,2,3}(x;t_1,t_2,t_3)\in C(D_{1,2}^{(2)};L_{q;pq}(D_{1,2,3;3}^{(4)})),$$

то $K_{1,2,3}^{(3)}u\in C(D_{1,2}^{(2)};L_p(D_3^{(1)}))$.

Доказательство. Для

$$(K^{(3)}_{1,2,3}u)(x) = \int\limits_{D^{(3)}_{1,2,3}} k_{1,2,3}(x;t)\ u(t_1,t_2,t_3)\,dt_1dt_2dt_3$$

имеем

$$\|K^{(3)}_{1,2,3}u\|_{C(D^{(2)}_{1,2};\,L_p(D^{(1)}_3))} =$$

$$= \sup_{x_1,x_2\in\overline{D^{(2)}_{1,2}}} \left(\left(\int\limits_{D^{(1)}_3} \left[\int\limits_{D^{(3)}_{1,2,3}} k_{1,2,3}(x;t)\ u(t_1,t_2,t_3)\,dt_1dt_2dt_3 \right]^p dx_3 \right)^{\frac{1}{p}} \right).$$

Неравенство Гёльдера с показателями p и q применим к внутреннему интегралу, а затем с такими же показателями — к внешнему интегралу:

$$\|K^{(3)}_{1,2,3}u\|_{C(D^{(2)}_{1,2};\,L_p(D^{(1)}_3))} \leq \sup_{x_1,x_2\in\overline{D^{(2)}_{1,2}}} \left(\left(\int\limits_{D^{(1)}_3} \left[\int\limits_{D^{(3)}_{1,2,3}} |\,k_{1,2,3}(x;t)|^q dt_1dt_2dt_3 \right]^{\frac{pq}{q}} dx_3 \right)^{\frac{1}{pq}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int\limits_{D^{(1)}_3} \left[\int\limits_{D^{(3)}_{1,2,3}} |\,u(t_1,t_2,t_3)|^p dt_1dt_2dt_3 \right]^{\frac{p^2}{p}} dx_3 \right)^{\frac{1}{p^2}} \right) \leq$$

$$\leq (b_3-a_3)^{1/p^2} \sup_{x_1,x_2\in\overline{D^{(2)}_{1,2}}} \|k_{1,2,3}(x_1,x_2)\|_{L_{q;pq}(D^{(4)}_{1,2,3;3})}\|u\|_{L_p(D^{(3)}_{1,2,3})}.$$

Таким образом, имеем оценку

$$\|K^{(3)}_{1,2,3}u\|_{C(D^{(2)}_{1,2};\,L_p(D^{(1)}_3))} \leq C_{1,2,3}\|u\|_{L_p(D^{(3)}_{1,2,3})},$$

$$C_{1,2,3} = (b_3-a_3)^{1/p^2}\|k_{1,2,3}\|_{C(D^{(2)}_{1,2};L_{q;pq}(D^{(4)}_{1,2,3;3}))}.$$

□

Теорема 1. *Пусть $p \in (1,\infty)$ и ядра k_α удовлетворяют условиям предложений* 1–8*, при этом*

$$\|u\|_{CL_p} = \max\left\{ \|u\|_{C\left(D^{(2)}_{1,2};L_{p^2}(D^{(1)}_3)\right)}; \|u\|_{C\left(D^{(1)}_2;L_{p,p^2}(D^{(2)}_{1,3})\right)}; \|u\|_{C\left(D^{(1)}_1;L_{p,p^2}(D^{(2)}_{2,3})\right)}; \right.$$

$$\left. \|u\|_{C\left(D^{(2)}_{1,2};L_p(D^{(1)}_3)\right)}; \|u\|_{L_{p;p^2}(D^{(3)}_{1,2;3})}; \|u\|_{C\left(D^{(1)}_2;L_p(D^{(2)}_{1,3})\right)}; \|u\|_{C\left(D^{(1)}_1;L_p(D^{(2)}_{2,3})\right)}; \|u\|_{L_p(D^{(3)}_{1,2,3})} \right\}.$$

Тогда

$$\|Ku\|_{C\left(D^{(2)}_{1,2};L_p(D^{(1)}_3)\right)} \leq C\|u\|_{CL_p}, \tag{4}$$

где

$$C = \|k_0\|_{C(D^{(2)}_{1,2};L_{pq}(D^{(1)}_3))} + \|k_1\|_{C(D^{(2)}_{1,2};L_{q,pq}(D^{(2)}_{1,3}))} +$$

$$+\|k_2\|_{C(D^{(2)}_{1,2};L_{q,pq}(D^{(2)}_{2,3}))} + (b_3-a_3)^{1/p^2}\|k_3\|_{C(D^{(2)}_{1,2};L_{q,pq}(D^{(2)}_{3,3}))} +$$

$$+\|k_{1,2}\|_{C(D^{(2)}_{1,2};L_{q;pq}(D^{(3)}_{1,2;3}))}+(b_3-a_3)^{1/p^2}\|k_{1,3}\|_{C(D^{(2)}_{1,2};L_{q;pq}(D^{(3)}_{1,3;3}))}+$$

$$+(b_3-a_3)^{1/p^2}\|k_{2,3}\|_{C(D^{(2)}_{1,2};L_{q;pq}(D^{(3)}_{2,3;3}))}+(b_3-a_3)^{1/p^2}\|k_{1,2,3}\|_{C(D^{(2)}_{1,2};L_{q;pq}(D^{(4)}_{1,2,3;3}))}.$$

Доказательство. К равенству

$$\|Ku\|_{C\left(D^{(2)}_{1,2};L_p(D^{(1)}_3)\right)}=$$

$$=\left\|(K_0+K^{(1)}_1+K^{(1)}_2+K^{(1)}_3+K^{(2)}_{1,2}+K^{(2)}_{1,3}+K^{(2)}_{2,3}+K^{(3)}_{1,2,3})u\right\|_{C\left(D^{(2)}_{1,2};L_p(D^{(1)}_3)\right)},$$

применим неравенство Минковского для $L_p(D^{(1)}_3)$-нормы суммы функций. После этого оценка (4) с очевидностью следует из доказанных выше восьми утверждений. □

Следствие 1. *Линейный интегральный оператор K с частными интегралами* (1) *непрерывен из $C(D)$ в $C\left(D^{(2)}_{1,2};L_p(D^{(1)}_3)\right)$, если ядра частных интегралов удовлетворяют условиям утверждений* 1–8.

Доказательство. Утверждение с очевидностью вытекает из (4), поскольку непрерывная функция в замкнутом параллелепипеде всегда принадлежит всем составляющим этого набора и $\|u\|_{CL_p}\le C\,\|u\|_{C(D)}$. □

Следствие 2. *Линейный интегральный оператор K с частными интегралами* (1)*, ядра которых непрерывны, непрерывен из $C(D)$ в $C(D)$.*

Доказательство. В этом случае все интегральные оценки легко заменяются супремумами соответствующих функций. □

2.2. Смешанные $C(D^{(1)}_1;L_p(D^{(2)}_{2,3}))$-нормы функций $K^{(m)}_\alpha u$

В отличие от (3) анизотропные $L_{\mathbf r}(\Omega_1\times\Omega_{2,3})$-нормы функций $\mathbf r=(r_1,r_2)$ нам понадобятся в следующей форме:

$$\|u\|_{L_{\mathbf r}}=\left(\int_{\Omega_{2,3}}\left[\int_{\Omega_1}|u(x_1,x_2,x_3)|^{r_1}dx_1\right]^{r_2/r_1}dx_2dx_3\right)^{1/r_2}.$$

Из этого определения видно, что $\|f\|_{L_{\mathbf r}(\Omega)}=\|\|f(x_2,x_3)\|_{L_{r_1}(\Omega_1)}\|_{L_{r_2}(\Omega_{2,3})}$.

Утверждение 9. *Пусть $1/p+1/q=1$, $p\in(1,\infty)$. Если*

$$u(x_1,x_2,x_3)\in C\left(D^{(1)}_1;L_{p^2}(D^{(2)}_{2,3})\right),\quad k_0=k_0(x)\in C\left(D^{(1)}_1;L_{pq}(D^{(2)}_{2,3})\right),$$

то $K_0u\in C\left(D^{(1)}_1;L_p(D^{(2)}_{2,3})\right)$.

Доказательство. Для функции $K_0u(x)=k_0(x)u(x)$ имеем

$$\|K_0u\|_{C(D^{(1)}_1;\,L_p(D^{(2)}_{2,3}))}=\sup_{x_1\in\overline{D^{(1)}_1}}\left(\left[\int\limits_{D^{(2)}_{2,3}}|k_0(x_1,x_2,x_3)u(x_1,x_2,x_3)|^pdx_2dx_3\right]^{1/p}\right).$$

Применив неравенство Гёльдера с показателями p и q, получим

$$\|K_0 u\|_{C(D_1^{(1)};\, L_p(D_{2,3}^{(2)}))} \le$$

$$\le \sup_{x_1 \in \overline{D_1^{(1)}}} \left(\left[\int\limits_{D_{2,3}^{(2)}} |k_0(x_1,x_2,x_3)|^{pq} dx_2 dx_3 \right]^{\frac{1}{pq}} \left[\int\limits_{D_{2,3}^{(2)}} |u(x_1,x_2,x_3)|^{p^2} dx_2 dx_3 \right]^{\frac{1}{p^2}} \right) \le$$

$$\le \sup_{x_1 \in \overline{D_1^{(1)}}} \left(\|k_0(x_1)\|_{L_{pq}(D_{2,3}^{(2)})} \|u(x_1)\|_{L_{p^2}(D_{2,3}^{(2)})} \right).$$

Отсюда $\|K_0 u\|_{C(D_1^{(1)};\, L_p(D_{2,3}^{(2)}))} \le C_0 \|u\|_{C(D_1^{(1)}; L_{p^2}(D_{2,3}^{(2)}))}$, $C_0 = \|k_0\|_{C(D_1^{(1)}; L_{pq}(D_{2,3}^{(2)}))}$. □

Утверждение 10. *Пусть* $1/p + 1/q = 1$, $p \in (1,\infty)$. *Если*

$$u = u(x) \in L_{p;p^2}(D_{1;2,3}^{(3)}), \quad k_1 = k_1(x;t_1) \in C(D_1^{(1)}; L_{q;pq}(D_{1;2,3}^{(3)})),$$

то $K_1^{(1)} u \in C\left(D_1^{(1)}; L_p(D_{2,3}^{(2)})\right)$.

Утверждение 11. *Пусть* $1/p + 1/q = 1$, $p \in (1,\infty)$. *Если*

$$u = u(x) \in C\left(D_1^{(1)}; L_{p,p^2}(D_{2,3}^{(2)})\right), \quad k_2 = k_2(x;t_2) \in C(D_1^{(1)}; L_{q;pq}(D_{2;2,3}^{(3)})),$$

то $K_2^{(1)} u \in C(D_1^{(1)}; L_p(D_{2,3}^{(2)}))$.

Утверждение 12. *Пусть* $1/p + 1/q = 1$, $p \in (1,\infty)$. *Если*

$$u = u(x) \in C\left(D_1^{(1)}; L_{p,p^2}(D_{3,2}^{(2)})\right), \quad k_3 = k_3(x;t_3) \in C\left(D_1^{(1)}; L_{q;pq}(D_{3;2,3}^{(3)})\right),$$

то $K_3^{(1)} u \in C(D_1^{(1)}; L_p(D_{2,3}^{(2)}))$.

Доказательства утверждений 10, 11 и 12 однотипны. Докажем утверждение 12.

Доказательство. Имеем

$$\|K_3^{(1)} u\|_{C(D_1^{(1)}; L_p(D_{2,3}^{(2)}))} = \sup_{x_1 \in \overline{D_1^{(1)}}} \left(\left(\int\limits_{D_{2,3}^{(2)}} \left[\int\limits_{D_3^{(1)}} |k_3(x;t_3) u(x_1,x_2,t_3)| dt_3 \right]^p dx_2 dx_3 \right)^{1/p} \right).$$

Применим неравенство Гёльдера с показателями p и q сначала к внутреннему, а затем к внешнему интегралу. Получим

$$\|K_3^{(1)} u\|_{C(D_1^{(1)}; L_p(D_{2,3}^{(2)}))} \le \sup_{x_1 \in \overline{D_1^{(1)}}} \left(\left(\int\limits_{D_{2,3}^{(2)}} \left[\int\limits_{D_3^{(1)}} |k_3(x;t_3)|^q dt_3 \right]^{\frac{pq}{q}} dx_2 dx_3 \right)^{\frac{1}{pq}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int\limits_{D_{2,3}^{(2)}} \left[\int\limits_{D_3^{(1)}} |u(x_1,x_2,t_3)|^p dt_3 \right]^{\frac{p^2}{p}} dx_2 dx_3 \right)^{\frac{1}{p^2}} \right) \le$$

$$\leq (b_3-a_3)^{1/p^2} \sup_{x_1\in\overline{D_1^{(1)}}} \left(\|k_3(x_1)\|_{L_{q;pq}(D^{(3)}_{3;2,3})}\| \, u(x_1)\|_{L_{p,p^2}(D^{(2)}_{3,2})}\right).$$

Следовательно, имеем оценку

$$\|K_3^{(1)}u\|_{C(D_1^{(1)};L_p(D^{(2)}_{2,3}))}\leq C_3\|u\|_{C(D_1^{(1)};L_{p,p^2}(D^{(2)}_{3,2}))},\ C_3=(b_3-a_3)^{1/p^2}\|k_3\|_{C(D_1^{(1)};L_{q;pq}(D^{(3)}_{3;2,3}))}.$$

Утверждение 12 доказано. □

Утверждение 13. *Пусть* $1/p+1/q=1$, $p\in(1,\infty)$. *Если*

$$u=u(x)\in L_{p;p^2}(D^{(3)}_{1,2;3}),\quad k_{1,2}(x;t_1,t_2)\in C\left(D_1^{(1)};L_{q;pq}(D^{(4)}_{1,2;2,3})\right),$$

то $K^{(2)}_{1,2}u\in C(D_1^{(1)};L_p(D^{(2)}_{2,3}))$.

Утверждение 14. *Пусть* $1/p+1/q=1$, $p\in(1,\infty)$. *Если*

$$u=u(x)\in L_{p;p^2}(D^{(3)}_{1,3;2}),\quad k_{1,3}=k_{1,3}(x;t_1,t_3)\in C\left(D_1^{(1)};L_{q;pq}(D^{(4)}_{1,3;2,3})\right),$$

то $K^{(2)}_{1,3}u\in C(D_1^{(1)};L_p(D^{(2)}_{2,3}))$.

Утверждение 15. *Пусть* $1/p+1/q=1$, $p\in(1,\infty)$. *Если*

$$u=u(x)\in C\left(D_1^{(1)};L_p(D^{(2)}_{2,3})\right),\quad k_{2,3}=k_{2,3}(x;t_2,t_3)\in C(D_1^{(1)};L_{q;pq}(D^{(4)}_{2,3;2,3})),$$

то $K^{(2)}_{2,3}u\in C(D_1^{(1)};L_p(D^{(2)}_{2,3}))$.

Доказательства утверждений 13, 14, 15 однотипны. Докажем утверждение 15.

Доказательство. Имеем

$$\|K^{(2)}_{2,3}u\|_{C(D_1^{(1)};\,L_p(D^{(2)}_{2,3}))}=$$

$$=\sup_{x_1\in\overline{D_1^{(1)}}}\left(\left(\int\limits_{D^{(2)}_{2,3}}\left[\int\limits_{D^{(2)}_{2,3}}|k_{2,3}(x;t_2,t_3)u(x_1,t_2,t_3)|dt_2dt_3\right]^p dx_2dx_3\right)^{1/p}\right).$$

Дважды применяя неравенство Гёльдера с показателями p и q, сначала к внутреннему, а затем к внешнему интегралу, получаем, что

$$\|K^{(2)}_{2,3}u\|_{C(D_1^{(1)};\,L_p(D^{(2)}_{2,3}))}\leq\sup_{x_1\in\overline{D_1^{(1)}}}\left(\left(\int\limits_{D^{(2)}_{2,3}}\left[\int\limits_{D^{(2)}_{2,3}}|k_{2,3}(x;t_2,t_3)|^q dt_2dt_3\right]^{\frac{pq}{q}}dx_2dx_3\right)^{\frac{1}{pq}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int\limits_{D^{(2)}_{2,3}}\left[\int\limits_{D^{(2)}_{2,3}}|u(x_1,t_2,t_3)|^p dt_2dt_3\right]^{\frac{p^2}{p}}dx_2dx_3\right)^{\frac{1}{p^2}}\right)\leq$$

$$\leq(b_2-a_2)^{1/p^2}(b_3-a_3)^{1/p^2}\sup_{x_1\in\overline{D_1^{(1)}}}\left(\|k_{2,3}(x_1)\|_{L_{q;pq}(D^{(4)}_{2,3;2,3})}\|\,u(x_1)\|_{L_p(D^{(2)}_{2,3})}\right).$$

Следовательно,

$$\|K^{(2)}_{2,3}u\|_{C(D_1^{(1)};\,L_p(D^{(2)}_{2,3}))}\leq C_{2,3}\|u\|_{C(D_1^{(1)};L_p(D^{(2)}_{2,3}))},$$

$$C_{2,3}=(b_2-a_2)^{1/p^2}(b_3-a_3)^{1/p^2}\|k_{2,3}\|_{C(D_1^{(1)};L_{q;pq}(D^{(4)}_{2,3;2,3}))}.$$

□

Утверждение 16. Пусть $1/p+1/q=1$, $p\in(1,\infty)$. *Если*

$$u=u(x)\in L_p(D^{(3)}_{1,2,3}),\quad k_{1,2,3}=k_{1,2,3}(x;t_1,t_2,t_3)\in C(D^{(1)}_1;L_{q;pq}(D^{(5)}_{1,2,3;2,3})),$$

то $K^{(3)}_{1,2,3}u\in C(D^{(1)}_1;L_p(D^{(2)}_{2,3}))$.

Доказательство. Имеем

$$\|K^{(3)}_{1,2,3}u\|_{C(D^{(1)}_1;\,L_p(D^{(2)}_{2,3}))}=$$

$$=\sup_{x_1\in\overline{D^{(1)}_1}}\left(\left(\int\limits_{D^{(2)}_{2,3}}\left[\int\limits_{D^{(3)}_{1,2,3}}k_{1,2,3}(x;t)u(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3\right]^p dx_2dx_3\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Дважды применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\|K^{(3)}_{1,2,3}u\|_{C(D^{(1)}_1;\,L_p(D^{(2)}_{2,3}))}\le\sup_{x_1\in\overline{D^{(1)}_1}}\left(\left(\int\limits_{D^{(2)}_{2,3}}\left[\int\limits_{D^{(3)}_{1,2,3}}|k_{1,2,3}(x;t)|^q dt_1dt_2dt_3\right]^{\frac{pq}{q}}dx_2dx_3\right)^{\frac{1}{pq}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int\limits_{D^{(2)}_{2,3}}\left[\int\limits_{D^{(3)}_{1,2,3}}|u(t_1,t_2,t_3)|^p dt_1dt_2dt_3\right]^{\frac{p^2}{p}}dx_2dx_3\right)^{\frac{1}{p^2}}\right)\le$$

$$\le(b_2-a_2)^{1/p^2}(b_3-a_3)^{1/p^2}\sup_{x_1\in\overline{D^{(1)}_1}}\|k_{1,2,3}(x_1)\|_{L_{q;pq}(D^{(5)}_{1,2,3;2,3})}\|u\|_{L_p(D^{(3)}_{1,2,3})}.$$

Таким образом,

$$\|K^{(3)}_{1,2,3}u\|_{C(D^{(1)}_1;L_p(D^{(2)}_{2,3}))}\le C_{1,2,3}\|u\|_{L_p(D^{(3)}_{1,2,3})},$$

$$C_{1,2,3}=(b_2-a_2)^{1/p^2}(b_3-a_3)^{1/p^2}\|k_{1,2,3}\|_{C(D^{(1)}_1;L_{q;pq}(D^{(5)}_{1,2,3;2,3}))}.$$

□

Теорема 2. *Пусть* $p\in(1,\infty)$,

$$\|u\|_{CL_p}=\max\Big\{\|u\|_{C(D^{(1)}_1;L_{p^2}(D^{(2)}_{2,3}))};\|u\|_{L_{p;p^2}(D^{(3)}_{1;2,3})};\|u\|_{C(D^{(1)}_1;L_{p,p^2}(D^{(2)}_{2,3}))};$$

$$\|u\|_{C(D^{(1)}_1;L_{p,p^2}(D^{(2)}_{3,2}))};\|u\|_{L_{p;p^2}(D^{(3)}_{1,2;3})};\|u\|_{L_{p;p^2}(D^{(3)}_{1,3;2})};\|u\|_{C(D^{(1)}_1;L_p(D^{(2)}_{2,3}))};\|u\|_{L_p(D^{(3)}_{1,2,3})}\Big\}.$$

Тогда

$$\|Ku\|_{C\left(D^{(1)}_1;L_p(D^{(2)}_{2,3})\right)}\le C\|u\|_{CL_p},\tag{5}$$

где

$$C=\|k_0\|_{C(D^{(1)}_1;L_{pq}(D^{(2)}_{2,3}))}+\|k_1\|_{C(D^{(1)}_1;\,L_{q;pq}(D^{(3)}_{1;2,3}))}+$$

$$+(b_2-a_2)^{1/p^2}\|k_2\|_{C(D^{(1)}_1;L_{q;pq}(D^{(3)}_{2;2,3}))}+(b_3-a_3)^{1/p^2}\|k_3\|_{C(D^{(1)}_1;L_{q;pq}(D^{(3)}_{3;2,3}))}+$$

$$+(b_2-a_2)^{1/p^2}\|k_{1,2}\|_{C(D^{(1)}_1;L_{q;pq}(D^{(4)}_{1,2;2,3}))}+(b_3-a_3)^{1/p^2}\|k_{1,3}\|_{C(D^{(1)}_1;L_{q;pq}(D^{(4)}_{1,3;2,3}))}+$$

$$+(b_2-a_2)^{1/p^2}(b_3-a_3)^{1/p^2}\|k_{2,3}\|_{C(D^{(1)}_1;L_{q;pq}(D^{(4)}_{2,3;2,3}))}+$$

$$+(b_2-a_2)^{1/p^2}(b_3-a_3)^{1/p^2}\|k_{1,2,3}\|_{C(D_1^{(1)};L_{q;pq}(D^{(5)}_{1,2,3;2,3}))}.$$

Доказательство. Имеем

$$\|Ku\|_{C\left(D_1^{(1)};L_p(D^{(2)}_{2,3})\right)}=$$

$$=\left\|(K_0+K_1^{(1)}+K_2^{(1)}+K_3^{(1)}+K_{1,2}^{(2)}+K_{1,3}^{(2)}+K_{2,3}^{(2)}+K_{1,2,3}^{(3)})u\right\|_{C\left(D_1^{(1)};L_p(D^{(2)}_{2,3})\right)}.$$

Применяя неравенство Минковского для $L_p(D^{(2)}_{2,3})$-норм суммы функций и учитывая утверждения 9–16, получим (5). □

Список литературы

1. **Appell, J. M.** Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J. M. Appell, A. S. Kalitvin, P. P. Zabrejko. — New York : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.
2. **Калитвин, А. С.** Линейные уравнения с частными интегралами. C-теория / А. С. Калитвин, Е. В. Фролова. — Липецк : ЛГПУ, 2004. — 195 с.
3. **Ляхов, Л. Н.** Частные интегралы в анизотропных классах Лебега. II: Многомерный случай / Л. Н. Ляхов, А. И. Иноземцев // Проблемы мат. анализа. — 2020. — Вып. 102. — С. 125–130.
4. **Ляхов, Л. Н.** Ограниченность операторов с частными интегралами со смешанной нормой. I / Л. Н. Ляхов, Н. И. Трусова // Челяб. физ.-мат. журн. — 2020. — Т. 5, вып. 1. — С. 22–31.
5. **Romanovskij, V.** Sur une class d'équations intégrales linéaires / V. Romanovskij // Acta Mathematica. — 1932. — Vol. 59. — P. 99–208.
6. **Романовский, В. И.** Избранные труды. Т. 2: Теория вероятностей, статистика и анализ / В. И. Романовский. — Ташкент : Наука, 1964. — 390 с.
7. **Лионс, Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. — М. : Мир, 1972. — 587 с.

Поступила в редакцию 09.04.2020
После переработки 05.07.2020

Сведения об авторах

Ляхов Лев Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; профессор кафедры математики и физики, Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семёнова-Тян-Шанского, Липецк, Россия; e-mail: levnlya@mail.ru.

Трусова Наталья Ивановна, старший преподаватель кафедры математики и физики, Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семёнова-Тян-Шанского, Липецк, Россия; e-mail: trusova.nat@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2020. Vol. 5, iss. 3. P. 293–305.

DOI: 10.47475/2500-0101-2020-15304

BOUNDEDNESS OF OPERATORS WITH PARTIAL INTEGRALS WITH THE MIXED NORM. II

L.N. Lyakhov[1,2,a], **N.I. Trusova**[2,b]

[1] *Voronezh State University, Voronezh, Russia*
[2] *Lipetsk State Pedagogical University named after P.P. Semenov-Tyan-Shanskiy, Lipetsk, Russia*
[a] *levnlya@mail.ru,* [b] *trusova.nat@gmail.com*

The general form of a linear integral operator with partial integrals in $\mathbb{R}_3$ is considered as the sum of eight integral expressions, including partial integrals for one and two variables. The action of the specified operator is studied within the space $C(\Omega_1; L_p(\Omega_2))$ of continuous functions on $\overline{\Omega_1}$ with values in the Lebesgue class $L_p(\Omega_2)$, $1 < p < \infty$, where $\Omega_1 \times \Omega_2 = D$ is the the finite parallelepiped in $\mathbb{R}_3$. We prove that the considered operators belong to the class of linear bounded operators from the anisotropic class of Lebesgue functions L_{p,p^2} to the class of functions with the mixed norm $C(\Omega_1; L_p(\Omega_2))$.

Keywords: *function with values in a Banach space, partial integral, linear operator with partial integrals, anisotropic classes of Lebesgue functions.*

References

1. **Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P.** *Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations.* New York, Marcel Dekker, 2000. 560 p.
2. **Kalitvin A.S., Frolova E.V.** *Lineynye uravneniya s chastnymi integralami. C-teoriya* [Linear equations with partial integrals. C-theory]. Lipetsk, Lipetsk State Pedagogical University, 2004. 195 p. (In Russ.).
3. **Lyakhov L.N., Inozemtsev A.I.** Partial integrals in anisotropic Lebesgue spaces. II: Multidimensional case. *Journal of Mathematical Sciences*, 2020, vol. 247, no. 6, pp. 893–900.
4. **Lyakhov L.N., Trusova N.I.** Boundedness of operators with partial integrals with the mixed norm. I. *Chlyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2020, vol. 5, iss. 1, pp. 22–31.
5. **Romanovskij V.** Sur une class d'équations intégrales linéaires. *Acta Mathematica*, 1932, vol. 59, pp. 99—208.
6. **Romanovsky V.I.** *Izbrannye trudy. Tom 2: Teoriya veroyatnostey, statistika i analiz* [Selected works. Vol. 2: Theory of probabilities, statistics and analysis]. Tashkent, Nauka Publ., 1964. 390 p. (In Russ.).
7. **Lions J.L.** Some methods for solving nonlinear boundary value problems. Moscow, Mir, 1972. 587 p.

Accepted article received 09.04.2020
Corrections received 05.07.2020

The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research, project 19-41-480002.