Челябинский физико-математический журнал. 2020. Т. 5, вып. 3. С. 285–292.

УДК 517.9 DOI: 10.47475/2500-0101-2020-15303

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ В C*

В. И. Заляпин[a], **Л. Д. Менихес**[b], **Г. А. Шефер**[c]

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия
[a]*zaliapinvi@susu.ru,* [b]*leonid.menikhes@gmail.com,* [c]*shefer0997@gmail.com*

При приближённом решении интегральных уравнений решающую роль играет регуляризуемость обратного отображения. Если обратное отображение регуляризуемо, то уравнение может быть решено методом А. Н. Тихонова. В противном случае метод регуляризации неприменим. В 1978 г. Л. Д. Менихесом был построен пример интегрального оператора, такого, что обратное отображение нерегуляризуемо по Тихонову. Из результатов работы В. А. Винокурова с соавторами следует, что регуляризуемость тесно связана с характеристикой образа сопряжённого оператора. Если эта характеристика ненулевая, то обратное к интегральному отображение регуляризуемо. Цель настоящей работы — предложить способ построения подпространств нетривиальной (промежуточной между 0 и 1) характеристики в C^*.

Ключевые слова: *интегральные уравнения, регуляризуемость, характеристика подпространства.*

Введение

При приближённом решении интегральных уравнений решающую роль играет регуляризуемость обратного отображения. Если обратное отображение регуляризуемо, то уравнение может быть решено методом А. Н. Тихонова (например, [1]). В противном случае метод регуляризации неприменим.

Из результатов работы [2] следует, что регуляризуемость тесно связана с характеристикой образа сопряжённого оператора. Если эта характеристика ненулевая, то обратное к интегральному отображение регуляризуемо. В 1978 г. Л. Д. Менихесом ([3]) был построен пример интегрального оператора, действующего из $C_{[0;1]}$ в $L^2_{[0;1]}$ и такого, что обратное отображение нерегуляризуемо по Тихонову.

Цель настоящей работы — предложить, следуя работе [4], способ построения подпространств нетривиальной (промежуточной между 0 и 1) характеристики в C^*.

На отрезке $[0,1]$ для произвольного значения целочисленного параметра $k = 1,2,3\ldots$ зададим точки

$$t_{0k} = \frac{2^k-1}{2^k},\ t_{1k} = \frac{2^{k+2}-3}{2^{k+2}},\ t_{2k} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}},\ t'_k = \frac{t_{1k}+t_{2k}}{2}$$

и определим подотрезки отрезка $[0,1]$ соотношениями (рис. 1)

$$I_k^- = [t_{0k}, t_{1k}],\ I_k^+ = [t_{1k},\ t_{2k}],\ I_k = I_k^- \cup I_k^+,\ k = 1,2,\ldots$$

Пусть $\{a_s\}$, $s = 1,2,3,\ldots,$ — некоторая последовательность положительных чисел. Для фиксированного значения парметра k введём в рассмотрение функции:

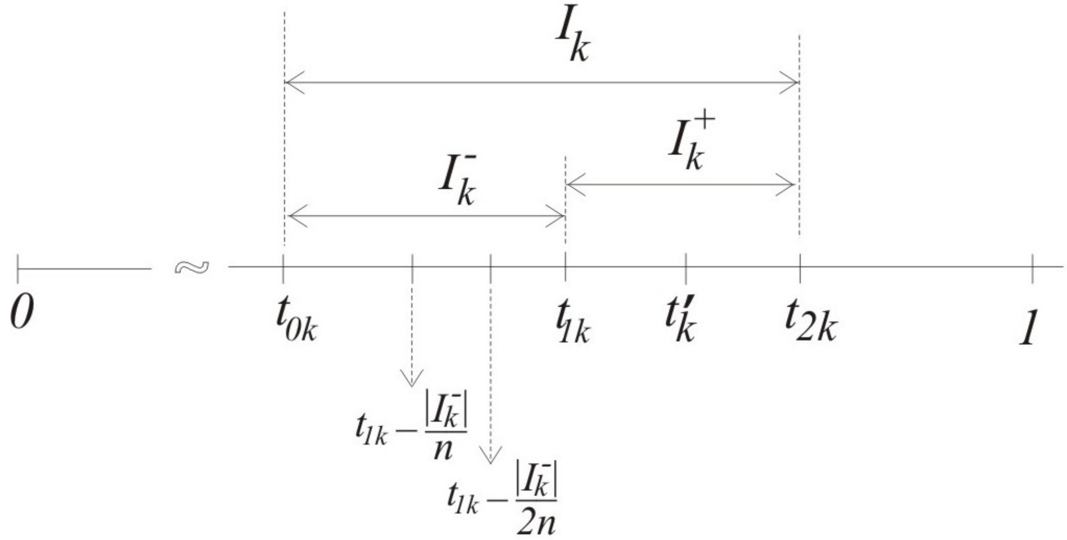

Рис. 1. Разбиение отрезка $[0,1]$

- $\alpha_k(t)$ (рис. 2) определим соотношениями: $\alpha_k(t) = 0$ при $t \in [0,1]\backslash I_k^+$, $\alpha_k(t'_k) = \dfrac{a_k - 1}{a_k + 1}$, $\alpha_k(t)$ непрерывна на $[0,1]$ и линейна на промежутках $[t_{1k}, t'_k]$, $[t'_k, t_{2k}]$;
- $\beta_k(t)$ зададим соотношениями (рис. 2): $\beta_k(t) = 0$ при $t \in [0,1]\backslash I_k^-$, линейна на I_k^-, непрерывна в t_{0k} и $\lim\limits_{t \to t_{1k}-} \beta_k(t) = (a_k + 1)^{-2}$;
- $x_{kn}(t)$ определим соотношениями: при всех $n, k \in \mathbb{N}$ $x_{kn}(t) = 0$ при $t \in [0,1]\backslash I_k$, $x_{kn}(t) = a_k(a_k+1)\beta_k(t)$ при $t \in [t_{0k}, t_{1k} - |I_k^-|/n]$, где $|I_k^-|$ — длина промежутка I_k^-, $k, n = 1, 2, \ldots$, $x_{kn}(t_{1k} - \frac{|I_k^-|}{2n}) = 0, x_{kn}(t) = 1$ при $t \in [t_{1k}, t'_k]$, $x_{kn}(t_{2k}) = 0$, непрерывна на $[0,1]$ и линейна на промежутках[1]

$$\left[t_{1k} - \frac{|I_k^-|}{n}, t_{1k} - \frac{|I_k^-|}{2n}\right], \quad \left[t_{1k} - \frac{|I_k^-|}{2n}, t_{1k}\right], \quad [t'_k, t_{k2}].$$

Пусть $\delta_k(t) = \alpha_k(t) + \beta_k(t), k = 1, 2\ldots$ Обозначим через $M \subset L_2[0,1]$ замкнутое подпространство в $L_2[0,1]$, «натянутое» на $\{\delta_k(t)\}$, и рассмотрим оператор $P : L_2[0,1] \to L_2[0,1]/M$, который каждому элементу $x \in L_2[0,1]$ ставит в соответствие класс эквивалентности в факторпространстве $L_2[0,1]/M$, содержащий x. Пусть далее $I : C[0,1] \to L_2[0,1]$ — оператор вложения.

Так как в M все функции, кроме тождественного нуля, разрывны, то суперпозиция PI — инъективный оператор.

Будем рассматривать подпространства в $C^*[0,1]$, которые являются образом сопряжённого к суперпозиции PI оператора $(PI)^*$.

1. Подготовительные утверждения

Пусть B — банахово пространство, B^* — сопряжённое к B, $L \subset M^*$. Напомним, что *характеристикой*[2] подпространства L в B^* называется число

$$r(L) = \inf_{x \in B} \sup_{\varphi \in L} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\| \cdot \|\varphi\|}.$$

[1]Функции $\alpha_k(t)$ и $x_{kn}(t)$ непрерывны на $[0,1]$, $|x_{kn}(t)| \le 1$ на $[0,1]$, $\beta_k(t)$ разрывна на $[0,1]$ и $|\beta_k(t)| \le 1$ на $[0,1]$.

[2]Её иногда называют характеристикой Диксмье.

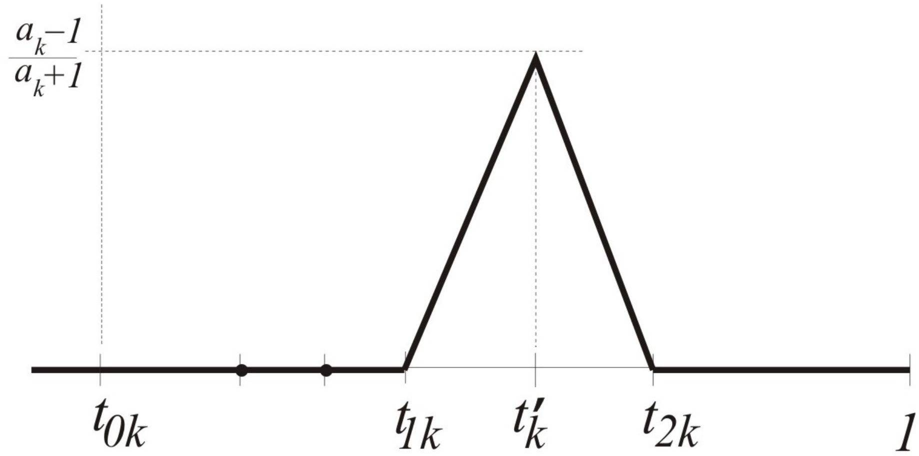

Рис. 2. Функции $\alpha_k(t)$

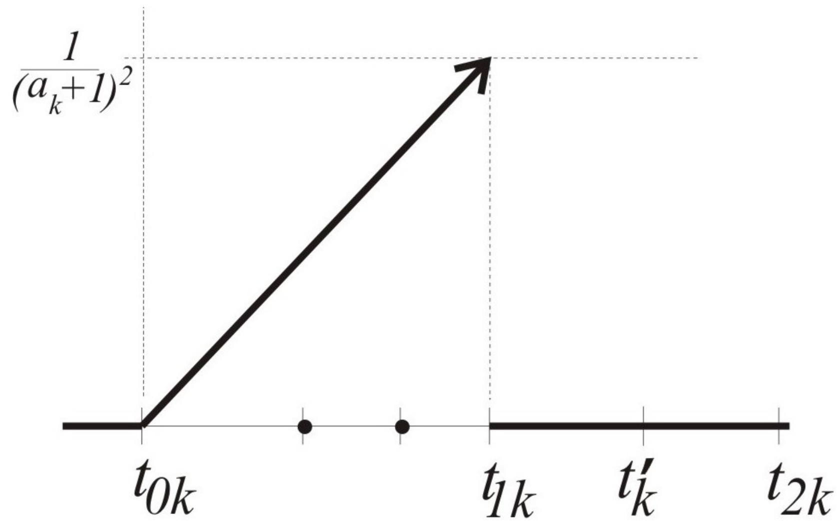

Рис. 3. Функции $\beta_k(t)$

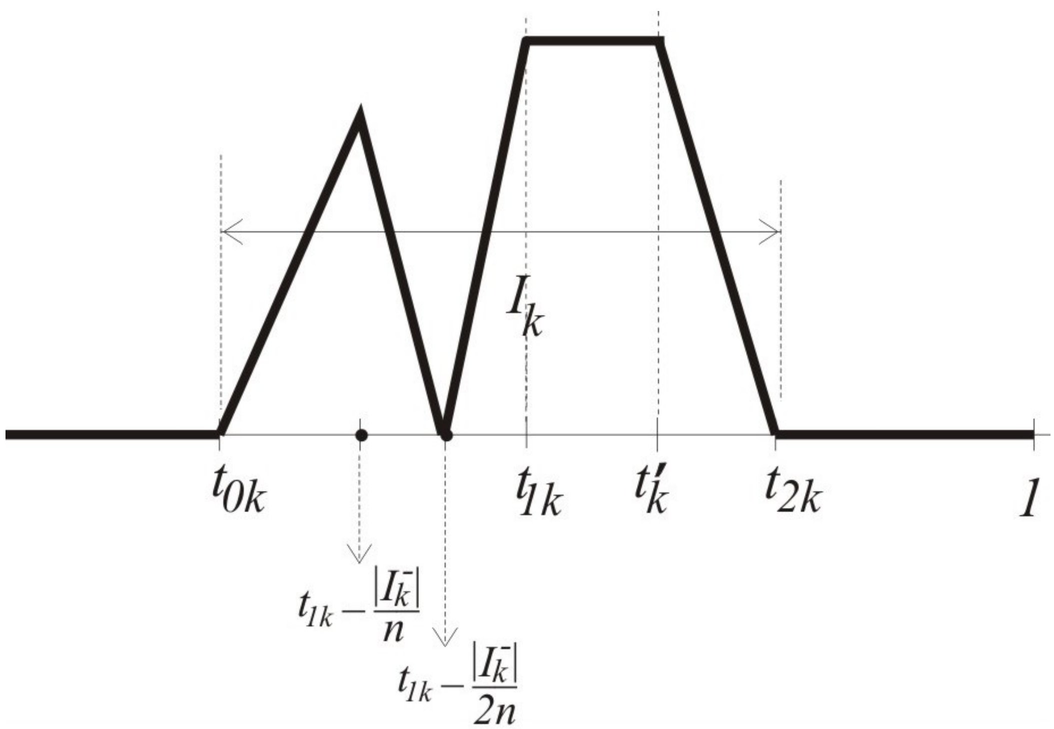

Рис. 4. Функция $x_{nk}(t)$

Очевидно, что для любого $L \subset B^*$ выполняется $0 \le r(L) \le 1$.

Линейное подпространство сопряжённого пространства называется тотальным, если из обращения в ноль на некотором элементе любого функционала из подпространства следует, что этот элемент нулевой [5, с. 453].

Лемма 1. $(PI)^*(L_2[0,1]/M)^* \subset C^*[0,1]$ *— тотальное подпространство.*

Доказательство. Предположим, что $(PI)^*(L_2[0,1]/M)^*$ не тотальное, следовательно, найдётся ненулевой элемент $x_0 \in C$, для которого $f(x_0) = 0$ для любой $f(x) \in (PI)^*(L_2[0,1]/M)^*$. По определению сопряжённого оператора $f(x_0) = g(PI(x_0)) = g(y_0) = 0$ для любого $g(y)$ из $(L_2[0,1]/M)^*$. Рассмотрим элемент $y_0 \in L_2[0,1]/M$, являющийся образом x_0 и, вследствие инъективности оператора, сам являющийся ненулевым элементом. Тогда согласно следствию из теоремы Банаха для любого ненулевого элемента y_0 из нормированного пространства $L_2[0,1]/M$ существует функционал $g'(y)$ из $(L_2[0,1]/M)^*$, для которого $g'(y_0) \neq 0$, что противоречит нашему предположению о том, что $g(y_0) = 0$ для любого $g(y)$ из $(L_2[0,1]/M)^*$. Следовательно, $(PI)^*(L_2[0,1]/M)^* \subset C^*[0,1]$ — тотальное подпространство. В теореме 1 мы вычислим характеристику этого подпространства. □

Лемма 2. *Если $A : X \to Y$ — линейный непрерывный инъективыный оператор, то характеристика $r(A^*(Y^*))$, где $A^*(Y^*) \subset X^*$, может быть найдена как обратная величина к точной верхней грани чисел $\|x\|$, где x пробегает замыкание единичного шара S^1 в X по норме $\|x\|_1 = \|Ax\|$.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n(t)\} \in S^1 \subset C[0,1]$ сходится к элементу $x_0(t) \in C[0,1]$ по норме $\|x\|_1 = \|Ax\|$. Следовательно, в силу инъективности и непрерывности оператора $\{x_n(t)\}$ сходится к $x_0(t)$ по норме $C[0,1]$. Но по определению сопряжённого оператора $f(x) = g(A(x))$, т.е $|f(x(t) - x(t))| = |g(A(x(t) - x_n(t)))| \le C_g \|A(x_0(t) - x_n(t))\|$, где C_g — константа. Следовательно, последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится к $x_0(t)$ слабо в смысле сходимости по функционалам из $A^*(Y^*)$.

Обратно, пусть последовательность $\{x_n(t)\} \in S^1 \subset C[0,1]$ сходится к элементу $x_0(t) \in C[0,1]$ слабо в смысле сходимости по функционалам из $A^*(Y^*)$ и пусть $\{x_n(t)\}$ не сходится к $x_0(t)$ по норме $\|x\|_1 = \|Ax\|$, т. е. предел разности $Ax_0(t) - Ax_n(t)$ есть ненулевой элемент y'. Тогда y' должен быть общим элементом ядра для всех функционалов из $A^*(Y^*)$. Но тогда $A^*(Y^*)$ не будет тотальным, что противоречит лемме 1. Следовательно, $\{x_n(t)\}$ сходится к $x_0(t)$ по норме $\|x\|_1 = \|Ax\|$. □

Из леммы 2 следует, что для нахождения характеристики $r((PI)^*(L_2[0,1]/M)^*)$ достаточно вычислить верхнюю грань $\|x\|_C$, где x пробегает замыкание единичного шара в $C[0,1]$ по норме $\|x\|_1 = \|PI(x)\|$. В правой части этого равенства стоит норма в $L_2[0,1]/M$.

Лемма 3. [4]. *Если непрерывная функция $x(t)$ принадлежит замыканию единичного шара S^1 в $C[0,1]$ по норме $\|\cdot\|_1$, то для любой точки разрыва t_1 функций из M (такие точки пробегают счётное множество середин отрезков I_k) выполняется соотношение $|x(t_1)| \le 1$.*

Доказательство. Проведём доказательство для случая $x(t_1) \ge 0$ (если $x(t_1) < 0$, то рассуждения аналогичны). Докажем, что $x(t_1) \le 1$. Пусть напротив $x(t_1) > 0$.

Тогда в силу непрерывности $x(t)$ существуют числа $\alpha > 0$ и $\delta > 0$, такие, что при $|t - t_1| < \delta$ выполняется неравенство

$$x(t) > 1 + \alpha. \tag{1}$$

По условию существует последовательность непрерывных функций $\{x_n(t)\}$, $|x_n(t)| \le 1$, такая, что $\|x_n - x\|_1 \to$ при $n \to \infty$. Это означает, что существует последовательность $\omega_n(t) \in M$, такая, что $\|x_n - x - \omega_n(t)\| \to 0$ по норме L_2. Так как t_1 является серединой отрезка I_k, то сужение функций $\omega_n(t)$ на I_k^+ имеет вид

$$\omega_n(t)|_{I_k^+} = C_n \alpha_k(t). \tag{2}$$

Изучим поведение последовательности $\{C_n\}$. Во-первых, заметим, что $\{C_n\}$ не может быть ограниченной последовательностью. В противном случае из (1) следует, что при $|t - t_1| < \delta$ и $t \in I_k^+$

$$x(t) - x_n(t) > \alpha. \tag{3}$$

Из (2) и (3) вытекает существование малого δ_1, такого, что при $t \in (t_1, t_1 + \delta_1)$ разность $|x(t) - x_n(t) - \omega_n(t)|$ превышает некоторую фиксированную константу, что противоречит сходимости $\|x_n - x - \omega_n(t)\| \to 0$. Во-вторых, последовательность $\{C_n\}$ не может быть неограниченной. В самом деле, функция $x(t)$ непрерывна, значит, ограничена на $[0, 1]$. При условии неограниченности $\{C_n\}$ из (2) следует, что разность $|x(t) - x_n(t) - \omega_n(t)|$ на множестве положительной меры из I_k^+ превышает некоторую константу для бесконечного числа номеров n, а это противоречит сходимости $\|x(t) - x_n(t) - \omega_n(t)\| \to 0$. Итак, последовательность $\{C_n\}$ не может быть ни ограниченной, ни неограниченной. Полученное противоречие доказывает лемму. □

2. Вычисление характеристики

Теорема 1. *Характеристику подпространства* $(PI)^*(L_2[0,1]/M)^* \subset C^*[0,1]$ *можно найти следующим образом:*

$$r((PI)^*(L_2[0,1]/M)^*) = \begin{cases} 1 & \textit{при } a \in (0,1], \\ 1/a & \textit{при } a \in [1,\infty), \\ 0 & \textit{при } a = \infty, \end{cases}$$

где $a = \sup a_k$.

Доказательство. Докажем равносильное утверждение:

$$\sup\{\|x\|_C : x \in \overline{S^1}\} = \begin{cases} 1, & \text{при } a \in (0,1], \\ a, & \text{при } a \in [1,\infty], \\ \infty, & \text{при } a = \infty. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $\overline{S^1}$ — замыкание единичного шара в $C[0,1]$ по норме $\|x\|_1 = \|PI(x)\|_{L_2/M}$. Рассмотрим последовательность непрерывных функций $x'_k(t)$, определённых следующим образом: $x'_k(t) = 0$ при $t \in [0,1] \backslash I_k$, $x'_k(t_{1k}) = 1$, $x'_k(t'_k) = a_k$ и $x'_k(t)$ линейна на $[t_{0k}, t_{1k}]$, $[t_{1k}, t'_k]$ и $[t'_k, t_{2k}]$.

При $a \in [1, \infty]$ очевидно, что $\sup\{x'_k : t \in [0,1]\} = a_k$, т. е. $\|x\|_C = a_k$. Покажем, что $x'_k(t) \in \overline{S^1}$ для любого $k = 1, 2 \ldots$ Для этого проверим, что $x_{kn} \to x'_k$ при $n \to \infty$ для любого k по норме $\|\cdot\|_1$. По построению мера множества равна

$$\mu\{t : x'_k(t) - x_{kn}(t) \ne \lambda_k \delta_k(t)\} = \frac{|I_k^-|}{n};\ \lambda_k = a_k + 1. \tag{5}$$

Принимая во внимание ограниченность при фиксированном k функций $x'_k(t)$, x_{kn} и $\delta_k(t)$, из (5) выводим сходимость $\|x'_k(t) - x_{kn}(t) - \delta_k(t)\| \to 0$ при $n \to \infty$ в $L_2[0,1]$. Так как $\delta_k(t) \in M$ при всех k, имеем сходимость $x_{kn}(t) \to x'_k(t)$ при $n \to \infty$ по норме $\|\cdot\|_1$, т. е. $x'_k(t) \in \overline{S^1}$. Таким образом, мы показали, что

$$\sup\{\|x\|_C : x \in \overline{S^1}\} \geq a. \tag{6}$$

Отсюда сразу следует последнее равенство из (4).

Теперь покажем, что выполнено второе из равенств (4). Пусть $a \geq 1$. Вследствие (6) достаточно показать, что

$$\sup\{\|x\|_C : x \in \overline{S^1}\} \leq a. \tag{7}$$

Пусть напротив $\sup\{\|x\|_C : x \in \overline{S^1}\} > a$. Это означает, что найдётся непрерывная функция $x(t) \in \overline{S^1}$ и $\|x\|_C > a$. Пусть $t^* \in [0,1]$ таково, что $x(t^*) > a$ (если $x(t^*) < 0$, то рассуждения аналогичны). Тогда найдутся $\alpha > 0$ и $\delta > 0$, такие, что

$$x(t) > a + \alpha \tag{8}$$

при $|t - t^*| < \delta$. Существуют последовательности $\omega_n(t) \in M$ и $x_n(t) \in S^1$ в $C[0,1]$, такие, что

$$\|x(t) - x_n(t) - \omega_n(t)\| \to 0 \tag{9}$$

в пространстве $L_2[0,1]$. Из (9) следует, что найдётся такой номер k_0, для которого коэффициент C_n, начиная с некоторого номера $n = N$, удовлетворяет неравенству

$$C_n > a + 1 + \alpha_1 > 2 + \alpha_1, \tag{10}$$

где $\alpha_1 > 0$. Обозначим через t'_0 середину отрезка I_{k0}. В силу леммы 3 $x(t'_0) \leq 1$, значит, в некоторой окрестности t'_0 выполняется неравенство

$$x(t) < 1 + \frac{\alpha_1}{2}. \tag{11}$$

Из (10), (11) следует, что в некоторой левой полуокрестности точки t'_0 разность $x(t) - x_n(t) - \omega_n(t)$ превышает некоторую фиксированную константу, что противоречит соотношению (8). Итак, доказано соотношение (7), что вместе с (6) влечёт выполнимость второго из равенств (4).

Осталось доказать первое из равенств (4). Пусть $a \in (0,1]$. Неравенство

$$\sup\{\|x\|_C : x \in \overline{S^1}\} \geq 1 \tag{12}$$

доказывается точно так же, как и (6).

Покажем, что верно и обратное неравенство

$$\sup\{\|x\|_C : x \in \overline{S^1}\} \leq 1. \tag{13}$$

Неравенство (13) доказывается так же, как и (7) при $a = 1$. Тот факт, что в нашем случае $a \leq 1$, не влияет на доказательство. Таким образом, соотношения (12) и (13) доказывают первое из равенств (4). Теорема доказана. □

Список литературы

1. **Тихонов, А. Н.** Методы решения некорректных задач : учеб. пособие для вузов / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1986. — 287 с.
2. **Винокуров, В. А.** Условие измеримости и регуляризуемости отображений, обратных к непрерывным линейным отображениям / В. А. Винокуров, Ю. И. Петунин, А. Н. Пличко // ДАН СССР. — 1975. — Т. 220, № 3. — С. 509–511.
3. **Менихес, Л. Д.** О регуляризуемости отображений, обратных к интегральным операторам / Л. Д. Менихес // ДАН СССР. — 1978. — Т. 241, № 1. — С. 282–285.
4. **Менихес, Л. Д.** О регуляризуемости некоторых классов отображений, обратных к интегральным операторам / Л. Д. Менихес // Мат. заметки. — 1999. — Т. 65, вып. 2. — С. 222–229.
5. **Данфорд, Н.** Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. — М. : Иностр. лит., 1962. — 896 с.

Поступила в редакцию 04.03.2020
После переработки 10.06.2020

Сведения об авторах

Заляпин Владимир Ильич, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия; e-mail: zaliapinvi@susu.ru.

Менихес Леонид Давидович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия; e-mail: leonid.menikhes@gmail.com.

Шефер Глеб Александрович, студент, кафедра математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия; e-mail: shefer0997@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2020. Vol. 5, iss. 3. P. 285–292.

DOI: 10.47475/2500-0101-2020-15303

ON SUBSPACES OF AN INTERMEDIATE CHARACTERISTIC IN C*

V.I. Zalyapin[a], **L.D. Menikhes**[b], **G.A. Shefer**[c]

South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia
[a]*zaliapinvi@susu.ru*, [b]*leonid.menikhes@gmail.com*, [c]*shefer0997@gmail.com*

With the approximate solution of integral equations, the regularizability of the inverse mapping plays a leading role. If the inverse mapping is regularizable, then the equation can be solved by Tikhonov's method. Otherwise the regularization method is not applicable. In 1978, L.D. Menikhes built an example of integral mapping such the inverse mapping is nonregularizable. As follows from the work of V.A. Vinokurov et al. regularizability is closely related to the characteristic (index) of the image of the conjugate operator. If this characteristic is nonzero, then the inverse of the integral mapping is regularizable. The purpose of this paper is to propose a method for constructing subspaces in C^* with a non-trivial (intermediate between 0 and 1) characteristic.

Keywords: *integral equations, regularizability, the characteristic of the subspace.*

References

1. **Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya.** *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 287 p. (In Russ.).
2. **Vinokurov V.A., Petunin Yu.I., Plichko A.N.** Usloviye izmerimosti i regulyarizuyemosti otobrazheniy, obratnykh k nepreryvnym lineinym otobrazheniyam [Condition for mesurability and regularizability of mappings, which are inverse for continuous linear operators]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1975, vol. 220, no. 3, pp. 509–511. (In Russ.).
3. **Menikhes L.D.** O regulyrizuyemosti otobrazheniy, obratnykh k integral'nym operatoram [On the regularizability of mappings, which are inverse to integral operators]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1978, vol. 241, no. 1, pp. 282–285. (In Russ.).
4. **Menikhes L.D.** Regularizability of some classes of mappings that are inverses of integral operators. *Mathematical Notes*, 1999, vol. 65, iss. 2, pp. 181–187.
5. **Dunford N., Schwartz J.T.** *Linear Operators. Part I: General Theory.* Hoboken, New Jersy, Wiley-Interscience, 1988. 872 p.

Accepted article received 04.03.2020
Corrections received 10.06.2020