*Челябинский физико-математический журнал. 2020. Т. 5, вып. 3. С. 271–284.*

УДК 517.977 DOI: 10.47475/2500-0101-2020-15302

# ЗАДАЧА СТАРТОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С МЛАДШИМИ ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

**Г. Д. Байбулатова**

*Челябинский государственный университет, Челябинск*
*baybulatova_g_d@mail.ru*

Исследуются вырожденные эволюционные уравнения дробного порядка с младшими дробными производными. Рассматривается случай относительно ограниченной пары операторов в главной части уравнения. Для линейного и полулинейного уравнений доказано существование единственного сильного решения обобщённой задачи Шоултера — Сидорова. Эти результаты используются для доказательства разрешимости задачи стартового управления в линейном и полулинейном случае. Полученные результаты используются при исследовании задачи оптимального управления для вырожденной распределённой системы дробного порядка по времени.

**Ключевые слова:** *дробная производная, вырожденное эволюционное уравнение, нелинейное дифференциальное уравнение, стартовое управление.*

## Введение

Рассматривается задача стартового управления для дробного нелинейного уравнения

$$LD_t^\alpha x(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha_1}x(t), D_t^{\alpha_2}, \dots, D_t^{\alpha_n}x(t)) + f(t), \quad t \in (t_0, T). \tag{1}$$

Здесь $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, непрерывный оператор $L : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ имеет нетривиальное ядро $\ker L \neq \{0\}$, $M$ — линейный замкнутый плотно определённый в $\mathcal{X}$ оператор, действующий в пространство $\mathcal{Y}$, $f : (t_0, T) \to \mathcal{Y}$ — заданная функция, $D_t^\alpha$, $D_t^{\alpha_k}$ — дробные производные Герасимова — Капуто, где $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \le m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$.

В задаче стартового управления функции управления $u = (u_0, u_1, \dots, u_{m-1}) \in (\mathcal{X}^1)^m$ выступают в качестве начальных данных для уравнения (1) в начальных условиях

$$(Px)^{(k)}(t_0) = u_k, \ k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2}$$

где $P$ — проектор вдоль подпространства вырождения (он будет описан далее). На функцию управления накладывается условие принадлежности множеству допустимых управлений

$$u \in \mathcal{U}_\partial. \tag{3}$$

Функционал качества в задаче управления имеет следующий вид:

$$J(x,u) = \|x - x_d\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})} + \|D_t^\alpha x - D_t^\alpha x_d\|^q_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} + \delta \sum_{k=0}^{m-1} \|u_k - u_{dk}\|^2_{\mathcal{X}} \to \inf, \tag{4}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 20-31-90015.

где $q > 1$, $\delta > 0$, $x_d$ и $u_d = (u_{d0}, \dots, u_{d(m-1)})$ — заданные функции. Цель данной работы — установить условия разрешимости задачи (1)–(4). Особенность этой задачи заключается в том, что уравнение (1) не разрешимо относительно старшей производной дробного порядка. Для исследования такого уравнения приходится накладывать некоторые специальные ограничения на нелинейный оператор $N$, в данном случае это условие принадлежности его образа $\mathrm{im}N$ дополнительному подпространству к подпространству вырождения.

В последние десятилетия дробное интегро-дифференциальное исчисление стало одним из важнейших инструментов для решения задач математического моделирования [1–5]. Различные вопросы теории управления системами, описываемыми дифференциальными уравнениями дробного порядка, исследуются многими авторами [6–8]. М. В. Плехановой исследован ряд задач оптимального управления для уравнений с вырожденным оператором при производной дробного порядка по времени и с нелинейным опрератором от производных целого порядка [9–12]. Настоящая статья является продолжением работ [13–17] по исследованию уравнений дробного порядка с нелинейным оператором, зависящим от производных младшего дробного порядка. В то же время полученные здесь результаты являются развитием исследований задач стартового управления для вырожденных эволюционных уравнений из работ [18–20].

В первом разделе приведены необходимые для дальнейшего изложения определения и результаты, а также доказана теорема о разрешимости задачи стартового управления для полулинейного уравнения с ограниченным линейным оператором, разрешённого относительно старшей дробной производной. Задачам стартового управления для вырожденного полулинейного уравнения с относительно ограниченной парой линейных операторов посвящён второй раздел. Доказана теорема об однозначной разрешимости обобщённой задачи Шоуолтера — Сидорова, а также теорема о разрешимости задачи стартового управления для соответствующей системы. В третьем разделе эти результаты уточнены для линейного вырожденного уравнения с младшими дробными производными. В последнем разделе статьи полученные результаты используются при исследовании задачи оптимального управления для вырожденной распределённой системы дробного порядка по времени.

## 1. Задача стартового управления для невырожденного уравнения

Введём обозначения $g_\delta(t) := \Gamma(\delta)^{-1}t^{\delta-1}$, $\tilde g_\delta(t) := \Gamma(\delta)^{-1}(t-t_0)^{\delta-1}$, $J_t^\delta h(t) := \int\limits_{t_0}^{t} g_\delta(t-s)h(s)ds$ для $\delta > 0$, $D_t^m$ — обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, $J_t^0$ — тождественный оператор, $m-1 < \alpha \le m$. Дробная производная Герасимова — Капуто [21, с. 11] функции $h$ определяется как

$$D_t^\alpha h(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha}\left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(t_0)\tilde g_{k+1}(t)\right), \quad t \ge t_0.$$

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство. Рассмотрим задачу Коши

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{5}$$

для нелинейного дифференциального уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D_t^{\alpha_1}z(t), D_t^{\alpha_2}z(t), \dots, D_t^{\alpha_n}z(t)), \tag{6}$$

где $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, т. е. линейный непрерывный оператор, действующий из $\mathcal{Z}$ в $\mathcal{Z}$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $n \in \mathbb{N}$, причём нелинейный оператор $B : (t_0, T) \times \mathcal{Z}^n \to \mathcal{Z}$ является каратеодориевым отображением, т. е. для произвольных $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathcal{Z}$ он задаёт измеримое отображение на $(t_0, T)$, а для почти всех $t \in (t_0, T)$ — отображение, непрерывное по совокупности переменных $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathcal{Z}$.

Сильным решением задачи (5), (6) является функция $z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, такая, что $J_t^{m-\alpha}\left(z - \sum\limits_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right) \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{Z})$ для некоторого $q > 1$, выполнены условия (5) и почти всюду на $(t_0, T)$ выполнены условия (6).

Обозначим как $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ набор $n$ элементов. Будем говорить, что оператор $B : (t_0, T) \times \mathcal{Z}^n \to \mathcal{Z}$ является равномерно липшицевым по $\overline{x} \in \mathcal{Z}^n$, если найдётся такое $l > 0$, что выполняется неравенство $\|B(t, \overline{x}) - B(t, \overline{y})\|_{\mathcal{Z}} \leq l \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k - y_k\|_{\mathcal{Z}}$ для почти всех $t \in (t_0, T)$ и для всех $\overline{x}, \overline{y} \in \mathcal{Z}^n$.

**Лемма 1.** [13]. *Пусть $l - 1 < \beta \leq l \in \mathbb{N}$, $t > t_0$. Тогда*

$$\exists C_{l,\beta} > 0 \quad \forall h \in C^l([t_0, t]; \mathcal{Z}) \quad \|D_t^\beta h\|_{C([t_0,t];\mathcal{Z})} \leq C_{l,\beta} \|h\|_{C^l([t_0,t];\mathcal{Z})}.$$

**Теорема 1.** [15]. *Пусть $\alpha_n \leq m - 1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in \mathcal{Z}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, кроме того, $B : (t_0, T) \times \mathcal{Z}^n \to \mathcal{Z}$ — каратеодориево отображение, равномерно липшицево по $\overline{x}$, для всех $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathcal{Z}$ и почти всюду на $(t_0, T)$ верно неравенство*

$$\|B(t, y_1, y_2, \dots, y_n)\|_{\mathcal{Z}} \leq a(t) + c \sum_{k=1}^{n} \|y_k\|_{\mathcal{Z}} \tag{7}$$

*при некоторых $a \in L_q(t_0, T; \mathbb{R})$, $c > 0$. Тогда задача* (5), (6) *имеет единственное сильное решение.*

**Замечание 1.** Если $B : (t_0, T) \times \mathcal{Z}^n \to \mathcal{Z}$ — каратеодориево отображение, равномерно липшицево по $\overline{z}$ и для некоторого $\overline{x} \in \mathcal{Z}^n$ $B(\cdot, \overline{x}) \in L_q(t_0, T; \mathcal{Z})$, $q > 1$, тогда условие (7) выполнено при $a(t) = \|B(t, \overline{x})\|_{\mathcal{Z}} + l \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|_{\mathcal{Z}}$, $c = l$.

**Лемма 2.** *Пусть $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{X}$ — банахово пространство, $\mathcal{X}_0$ компактно вложено в $\mathcal{X}$, которое непрерывно вложено в $\mathcal{X}_1$, $q, q_1 \in (1, +\infty)$. Тогда при $m \in \mathbb{N}$*

$$W_{q,q_1}^m(t_0, T; \mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1) := \{z \in W_q^{m-1}(t_0, T; \mathcal{X}_0) : z^{(m)} \in L_{q_1}(t_0, T; \mathcal{X}_1)\}$$

*с нормой*

$$\|x\|_{W_{q,q_1}^m(t_0,T;\mathcal{X}_0,\mathcal{X}_1)} = \|x\|_{W_q^{m-1}(t_0,T;\mathcal{X}_0)} + \|x^{(m)}\|_{L_{q_1}(t_0,T;\mathcal{X}_1)}$$

*является банаховым пространством, непрерывно вложенным в $C([t_0, T]; \mathcal{X}_1)$ и компактно вложенным в $W_q^{m-1}(t_0, T; \mathcal{X})$.*

*Доказательство.* Случай $m = 1$ ранее рассмотрен в [22; 23], поэтому будем рассматривать случай $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$.

В силу метризуемости пространства $\mathcal{D}'(t_0, T; \mathcal{X}_1)$, в котором лежит нормированное пространство $W_{q,q_1}^m(t_0, T; \mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)$, достаточно показать существование предела фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ в норме пространства

$W^m_{q,q_1}(t_0,T;\mathcal{X}_0,\mathcal{X}_1)$. Из определения нормы в этом пространстве следует, что последовательность сходится к некоторому $x \in W^{m-1}_q(t_0,T;\mathcal{X}_0)$, а $x^{(m)}_n$ имеет предел $v$ в пространстве $L_{q_1}(t_0,T;\mathcal{X}_1)$, который равен $x^{(m)}$ в смысле пространства $\mathcal{D}'(t_0,T;\mathcal{X}_1)$. Из отделимости топологии в $\mathcal{D}'(t_0,T;\mathcal{X}_1)$ следует, что $v = x^{(m)}$. Таким образом, пространство $W^m_{q,q_1}(t_0,T;\mathcal{X}_0,\mathcal{X}_1)$ банахово. Очевидно, что оно непрерывно вложено в $W^1_{q,q_1}(t_0,T;\mathcal{X}_0,\mathcal{X}_1)$, поэтому оно является непрерывно вложенным и в $C([t_0,T];\mathcal{X}_1)$ (см. [22; 23]).

Для всякого $x \in W^m_{q,q_1}(t_0,T;\mathcal{X}_0,\mathcal{X}_1)$ имеем $x^{(k)} \in W^1_{q,q_1}(t_0,T;\mathcal{X}_0,\mathcal{X}_1)$, $k = 0,1,\dots,m-1$. Возьмём последовательность $\{x_n\}$, ограниченную в пространстве $W^m_{q,q_1}(t_0,T;\mathcal{X}_0,\mathcal{X}_1)$, тогда последовательности $\{x^{(k)}_n\}$ при всех $k = 0,1,\dots,m-1$ ограничены в рефлексивном банаховом пространстве (см. [22; 23]) $W^1_{q,q_1}(t_0,T;\mathcal{X}_0,\mathcal{X}_1)$, учитывая непрерывность вложения $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_1$. Поэтому можно перейти к слабо сходящимся в $W^1_{q,q_1}(t_0,T;\mathcal{X}_0,\mathcal{X}_1)$ подпоследовательностям. Их сильная сходимость в $L_q(t_0,T;\mathcal{X})$ при заданных условиях доказана, например, в [22, теорема 1.5.1] или в [23, теорема 7.5.16]. Поэтому существует подпоследовательность $\{x_n\}$, имеющая сильный предел в $W^{m-1}_q(t_0,T;\mathcal{X})$, что и доказывает компактность указанного в формулировке данной теоремы вложения. $\square$

**Следствие 1.** *Пусть $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{X}_0$ компактно вложено в $\mathcal{X}_1$, $q \in (1,+\infty)$. Тогда при $m \in \mathbb{N}$ $W^m_q(t_0,T;\mathcal{X}_0)$ компактно вложено в $W^{m-1}_q(t_0,T;\mathcal{X}_1)$.*

*Доказательство.* Возьмём в предыдущей лемме $q = q_1$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1$, тогда $W^m_q(t_0,T;\mathcal{X}_0)$ непрерывно вложено в $W^m_{q,q}(t_0,T;\mathcal{X}_0,\mathcal{X}_1)$, которое в свою очередь в силу леммы 2 компактно вложено в $W^{m-1}_q(t_0,T;\mathcal{X}_1)$. Композиция непрерывного и компактного операторов вложения (именно в таком порядке) является компактным оператором вложения $W^m_q(t_0,T;\mathcal{X}_0)$ в пространство $W^{m-1}_q(t_0,T;\mathcal{X}_1)$. $\square$

Введём в рассмотрение при $q > 1$ пространство

$$\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) := \left\{ z \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X}) : \ J^{m-\alpha}_t \left( z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1} \right) \in W^m_q(t_0,T;\mathcal{X}) \right\}.$$

**Лемма 3.** [10]. *Пространство $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$ является банаховым с нормой*

$$\|x\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})} = \|x\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})} + \|D^\alpha_t x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})}.$$

Рассмотрим задачу стартового управления

$$D^\alpha_t z(t) = Az(t) + B(t, D^{\alpha_1}_t z(t), D^{\alpha_2}_t z(t), \dots, D^{\alpha_n}_t z(t)), \ t \in (t_0,T), \tag{8}$$

$$z^{(k)}(t_0) = u_k, \ k = 0,1,\dots,m-1, \tag{9}$$

$$u = (u_0,u_1,\dots,u_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial, \tag{10}$$

$$J(z,u) \to \inf, \tag{11}$$

где $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_\partial$ — множество допустимых управлений, $J$ — некоторый функционал качества.

Определим оператор $\gamma_0 : C([t_0,T];\mathcal{Z}) \to \mathcal{Z}$, $\gamma_0 z := z(t_0)$.

Множеством допустимых пар $\mathfrak{W}$ для задачи (8)–(11) будем называть такое множество пар $(z,u) = (z,u_0,\dots,u_{m-1})$, что $u = (u_0,\dots,u_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial$, $z \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$

является сильным решением задачи (8), (9). Решить задачу оптимального управления (8)–(11) означает найти множество пар $(\hat{z},\hat{u}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующих функционал стоимости, т. е. $J(\hat{z},\hat{u}) = \inf\limits_{(z,u)\in\mathfrak{W}} J(z,u)$.

**Теорема 2.** *Пусть $\alpha > 1$, $\alpha_n \leq m-2$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{Z}$ компактно вложено в $\mathcal{Z}_1$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, отображение $B_1 : (t_0,T) \times \mathcal{Z}_1^n \to \mathcal{Z}_1$ каратеодориево и равномерно липшицево по $\overline{z} \in \mathcal{Z}_1^n$, $B : (t_0,T) \times \mathcal{Z}^n \to \mathcal{Z}$ — сужение оператора $B_1$ на $(t_0,T) \times \mathcal{Z}$; для всех $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathcal{Z}$ и почти всюду на $(t_0,T)$ верно неравенство (7) при некоторых $a \in L_q(t_0,T;\mathbb{R})$, $c > 0$. Предположим, что $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathcal{Z}^m$, пространство $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathbb{Y}$, которое, в свою очередь, непрерывно вложено в $W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)$, функционал качества $J$ выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на $\mathbb{Y} \times \mathcal{Z}^m$, коэрцитивный на пространстве $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z}) \times \mathcal{Z}^m$. Тогда существует решение $(\hat{z},\hat{u}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z}) \times \mathcal{U}_\partial$ задачи* (8)–(11).

*Доказательство.* В силу теоремы 3 $\mathfrak{W}$ непусто. Определим пространства $\mathbb{Y}_1 := \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$, $\mathbb{U} := \mathcal{Z}^m$, $\mathbb{V} := L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1) \times \mathcal{Z}^m$ и операторы

$$\mathbb{L}(z,u) := (D_t^\alpha z - Az, \gamma_0 z - u_0, \gamma_0 z^{(1)} - u_1, \dots, \gamma_0 z^{(m-1)} - u_{m-1}),$$

$$\mathbb{F}(z(\cdot)) := -(B(\cdot, D_t^{\alpha_1} z(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} z(\cdot)), 0, 0, \dots, 0).$$

Непрерывность линейного оператора $\mathbb{L} : \mathbb{Y} \times \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ следует из вида оператора $\mathbb{L}$. Проверим выполнение остальных условий теоремы 2.4 [24].

Докажем непрерывность нелинейного оператора $\mathbb{F} : \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z}) \to \mathbb{V}$. Из соотношения $\|z_j - z\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})} \to 0$ при $j \to \infty$ и равномерной липшицевости оператора $B_1$ следует, что

$$\|B_1(\cdot, D_t^{\alpha_1} z_j(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} z_j(\cdot)) - B_1(\cdot, D_t^{\alpha_1} z(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} z(\cdot))\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1)} \leq$$

$$\leq C_1 \sum_{k=1}^n \|D_t^{\alpha_k} z_j - D_t^{\alpha_k} z\|_{C([t_0,T];\mathcal{Z}_1)} \leq C_2 \sum_{k=1}^n \|D_t^{\alpha_k} z_j - D_t^{\alpha_k} z\|_{C([t_0,T];\mathcal{Z})} \leq$$

$$\leq C_3 n \|z_j - z\|_{C^{m-2}([t_0,T];\mathcal{Z})} \to 0.$$

Проверим условие компактности из теоремы 2.4 [24]. Пространство $\mathbb{Y}_1 := \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ непрерывно вложено в $W_q^{m-1}(t_0,T;\mathcal{Z})$ и поэтому в силу следствия 1 компактно вложено в $\mathbb{Y}_{-1} := W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)$. Для $v^* \in (L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1))^*$ в силу равномерной липшицевости $B_1$

$$|v^*(B_1(\cdot, D_t^{\alpha_1} z_j(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} z_j(\cdot)), u_0, u_1, \dots, u_{m-1}) -$$

$$- B_1(\cdot, D_t^{\alpha_1} z(\cdot), \dots, D^{\alpha_n} z(\cdot)), u_0, u_1, \dots, u_{m-1}))| \leq$$

$$\leq \|v^*\|_{(L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1))^*} \|B_1(\cdot, D_t^{\alpha_1} z_j(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} z_j(\cdot)) - B_1(\cdot, D_t^{\alpha_1} z(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} z(\cdot))\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1)} \leq$$

$$\leq C_2 \|v^*\|_{(L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1))^*} \|z_j - z\|_{W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)}.$$

Это позволяет сделать вывод о непрерывной продолжимости функционала $w(\cdot) = v^*(\mathbb{F}(\cdot))$ из $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ на $\mathbb{Y}_{-1}$.

По теореме 2.4 [24] получим требуемое. □

## 2. Вырожденное полулинейное уравнение

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства. В качестве $\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ будем обозначать пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$. Обозначим через $\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ множество всех линейных замкнутых операторов с областью определения, плотной в $\mathcal{X}$, действующих в $\mathcal{Y}$. Предположим, что $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $D_M$ — область определения оператора $M$, снабжённого нормой графика $\|\cdot\|_{D_M} := \|\cdot\|_{\mathcal{X}} + \|M\cdot\|_{\mathcal{Y}}$. Введём обозначения $\rho^L(M) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\}$, $R^L_\mu(M) := (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu := L(\mu L - M)^{-1}$.

Оператор $M$ называется $(L,\sigma)$-*ограниченным*, если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

В случае $(L,\sigma)$-ограниченности оператора $M$ имеем проекторы

$$P := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \;\; Q := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}),$$

на пространствах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно, где контур $\gamma$ определяется как $\gamma := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ (см. [25, p. 89, 90]). Положим $\mathcal{X}^0 := \ker P$, $\mathcal{X}^1 := \mathrm{im} P$, $\mathcal{Y}^0 := \ker Q$, $\mathcal{Y}^1 := \mathrm{im} Q$. Обозначим через $L_k$ ($M_k$) сужение оператора $L$ ($M$) на $\mathcal{X}^k$ ($D_{M_k} := D_M \cap \mathcal{X}^k$), $k = 0,1$.

**Теорема 3.** [25, с. 90, 91]. *Пусть оператор $M$ $(L,\sigma)$-ограничен. Тогда*
(i) $M_1 \in \mathcal{L}\big(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1\big)$, $M_0 \in \mathcal{C}l\big(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0\big)$, $L_k \in \mathcal{L}\big(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k\big)$, $k = 0,1$;
(ii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}\big(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0\big)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}\big(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1\big)$.

Здесь и далее $G := M_0^{-1}L_0$. Для $p \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ оператор $M$ называется $(L,p)$-ограниченным, если он $(L,\sigma)$-ограничен, $G^p \neq 0$, $G^{p+1} = 0$.

Пусть $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$. Рассмотрим полулинейное уравнение

$$LD^\alpha_t x(t) = Mx(t) + N(t, D^{\alpha_1}_t x(t), D^{\alpha_2}_t x(t), \dots, D^{\alpha_n}_t x(t)) + f(t), \tag{12}$$

где $N : (t_0,T) \times \mathcal{X}^n \to \mathcal{Y}$ — нелинейный оператор, задана функция $f : (t_0,T) \to \mathcal{Y}$. Предполагается, что $\ker L \neq \{0\}$, поэтому уравнение (12) будем называть вырожденным. Исследуется задача для вырожденного уравнения (12) с обобщёнными условиями Шоуолтера — Сидорова

$$(Px)^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0,1,\dots,m-1. \tag{13}$$

Функция $x \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X}) \cap L_q(t_0,T;D_M)$ называется сильным решением задачи (12), (13), если

$$J^{m-\alpha}_t\left(x - \sum_{k=0}^{m-1} x^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right) \in W^m_q(t_0,T;\mathcal{X}),$$

выполнены условия (13) и почти всюду на $(t_0,T)$ верно равенство (12).

**Лемма 4.** [12]. *Пусть $H \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ — нильпотентный оператор степени $p \in \mathbb{N}_0$, функция $h : [t_0,T] \to \mathcal{X}$, $(HD^\alpha_t)^l h \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})$ и $D^\alpha_t(HD^\alpha_t)^l h \in L_q(t_0,T;\mathcal{X})$ для $l = 0,1,\dots,p$. Тогда уравнение $HD^\alpha_t x(t) = x(t) + h(t)$ имеет единственное сильное решение. Более того, оно имеет вид*

$$x(t) = -\sum_{l=0}^{p}(HD^\alpha_t)^l h(t).$$

**Теорема 4.** *Пусть* $\alpha_n \leq m-1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $p \in \mathbb{N}_0$, *оператор* $M$ $(L,p)$-*ограничен, отображение* $N : [t_0,T] \times \mathcal{X}^n \to \mathcal{Y}$ *каратеодориево, равномерно липшицево по* $\bar{x} \in \mathcal{X}^n$, *для всех* $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathcal{X}$ *и почти всюду на* $(t_0,T)$ *выполнено неравенство*

$$\|N(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)\|_{\mathcal{Y}} \leq a(t) + c\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_{\mathcal{X}} \tag{14}$$

*при некоторых* $a \in L_q(t_0,T;\mathbb{R})$, $c > 0$, $\mathrm{im}N \subset \mathcal{Y}^1$. *Пусть, кроме того,* $Qf \in L_q(t_0,T;\mathcal{Y}^1)$, $(GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I-Q)f \in C([t_0,T];\mathcal{X})$, $D_t^\alpha (GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I-Q)f \in L_q(t_0,T;\mathcal{X})$ *для всех* $k = 0,1,\ldots,p$. *Тогда задача* (12), (13) *имеет единственное сильное решение.*

*Доказательство.* Из условий теоремы следует, что отображение

$$x(\cdot) \to N(\cdot, D_t^{\alpha_1}x(\cdot), D_t^{\alpha_2}x(\cdot), \ldots, D_t^{\alpha_n}x(\cdot))$$

действует из $C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})$ в пространство $L_q(t_0,T;\mathcal{Y})$.

Имеем $\mathrm{im}N \subset \mathcal{Y}^1$, т.е. $(I-Q)N \equiv 0$, $QN \equiv N$. Уравнение (12) после действия оператора $M_0^{-1}(I-Q)$ примет вид $GD_t^\alpha w(t) = w(t) + M_0^{-1}(I-Q)f(t)$, где $w(t) := (I-P)x(t)$. В силу того, что оператор $G$ нильпотентный, по лемме 4 единственное решение этого уравнения имеет вид

$$w(t) = -\sum_{k=0}^{p}(GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I-Q)f(t).$$

Остаётся показать существование и единственность сильного решения задачи Коши

$$D_t^\alpha v(t) = S_1 v(t) + L_1^{-1}N(t, D_t^{\alpha_1}(v(t)+w(t)), \ldots, D_t^{\alpha_n}(v(t)+w(t))) + L_1^{-1}Qf(t),$$
$$v^{(k)}(t_0) = x_k,\ k = 0,1,\ldots,m-1,$$

где $v(t) := Px(t)$, $S_1 := L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1)$, полученной из (12), (13) после действия непрерывным оператором $L_1^{-1}Q$. Оператор

$$B(t,v_0,v_1,\ldots,v_n) := L_1^{-1}N(t, v_0 + D_t^{\alpha_1}w(t), \ldots, v_n + D_t^{\alpha_n}w(t)) + L_1^{-1}Qf(t)$$

удовлетворяет условиям теоремы 3, из которой следует требуемое. □

При $q > 1$ определим пространство

$$\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) := \{z \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X}) \cap L_q(t_0,T;D_M) :$$
$$J_t^{m-\alpha}\left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right) \in W_q^m(t_0,T;\mathcal{X})\right\}.$$

**Лемма 5.** [10]. *Пространство* $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$ *является банаховым с нормой*

$$\|x\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})} = \|x\|_{L_q(t_0,T;D_M)} + \|x\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})} + \|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})}.$$

Рассмотрим задачу стартового управления для вырожденного нелинейного уравнения

$$LD_t^\alpha x(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha_1}x(t), D_t^{\alpha_2}x(t), \ldots, D_t^{\alpha_n}x(t)) + f(t), \quad t \in (t_0,T), \tag{15}$$

$$(Px)^{(k)}(t_0) = u_k,\ k = 0,1,\ldots,m-1, \tag{16}$$

$$u = (u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial, \tag{17}$$

$$J(x,u) \to \inf, \tag{18}$$

где $\mathcal{U}_\partial$ — множество допустимых управлений, $J$ — функционал качества.

**Теорема 5.** *Пусть $\alpha > 1$, $\alpha_n \le m-2$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, оператор $M$ $(L,p)$-ограничен, $\mathcal{X}, \mathcal{X}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{X}$ компактно вложено в $\mathcal{X}_1$, отображение $N_1 : (t_0,T) \times \mathcal{X}_1^n \to \mathcal{Y}$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\overline{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}_1^n$, $N$ — сужение оператора $N_1$ на $(t_0,T) \times \mathcal{X}^n$, $N[(t_0,T) \times \mathcal{X}^n] \subset \mathcal{Y}^1$; для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$ и почти всюду на $(t_0,T)$ выполнено неравенство (14) при некоторых $a \in L_q(t_0,T;\mathbb{R})$, $c > 0$; $Qf \in L_q(t_0,T;\mathcal{Y}^1)$, $(GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I-Q)f \in C([t_0,T];\mathcal{X})$, $D_t^\alpha (GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I-Q)f \in L_q(t_0,T;\mathcal{X})$ для всех $k = 0,1,\ldots,p$. Предположим, что $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $(\mathcal{X}^1)^m$, $\mathcal{Z}_{\alpha,q}$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathbb{Y}$, которое непрерывно вложено в пространство $W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{X}_1)$; функционал качества $J$ выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на $\mathbb{Y} \times (\mathcal{X}^1)^m$, коэрцитивный на $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) \times (\mathcal{X}^1)^m$. Тогда существует решение $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) \times \mathcal{U}_\partial$ задачи (15)–(18).*

*Доказательство.* По теореме 4 множество $\mathfrak{W}$ непусто. Определим пространства $\mathbb{Y}_1 := \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$, $\mathbb{U} := (\mathcal{X}^1)^m$, $\mathbb{V} := L_q(t_0,T;\mathcal{Y}) \times \mathcal{X}^m$ и операторы

$$\mathbb{L}(x,u) := (LD_t^\alpha x - Mx, \gamma_0(Px) - u_0, \gamma_0(Px)^{(1)} - u_1, \ldots, \gamma_0(Px)^{(m-1)} - u_{m-1}),$$

$$\mathbb{F}(x(\cdot)) := -(N(\cdot, D_t^{\alpha_1}x(\cdot), D_t^{\alpha_2}x(\cdot), \ldots, D_t^{\alpha_n}x(\cdot)), 0, 0, \ldots, 0).$$

Непрерывность линейного оператора $\mathbb{L} : \mathbb{Y}_1 \times \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ следует из неравенств

$$\|\mathbb{L}(x,u)\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Y}) \times \mathcal{X}^m} \le C_L \|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} + \|Mx\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Y})} +$$
$$+ \|\gamma_0(Px)\|_{\mathcal{X}} + \|\gamma_0(Px)^{(1)}\|_{\mathcal{X}} + \cdots + \|\gamma_0(Px)^{(m-1)}\|_{\mathcal{X}} + \|u_0\|_{\mathcal{X}} + \|u_1\|_{\mathcal{X}} + \cdots + \|u_{m-1}\|_{\mathcal{X}} \le$$
$$\le C_1 \|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} + C_2 \|x\|_{L_q(t_0,T;D_M)} + C_3 \|x\|_{C^{m-1}(t_0,T;\mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} \le$$
$$\le C\left(\|x\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m}\right) = C\|(x,u)\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) \times \mathcal{X}^m}.$$

Непрерывность нелинейного оператора $\mathbb{F} : \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z}) \to \mathbb{V}$ и выполнение остальных условий теоремы 2.4 [24] при $\mathbb{Y}_{-1} := W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)$ доказываются, как в теореме 2. □

## 3. Вырожденное линейное уравнение

Пусть $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $N_k : (t_0,T) \to \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $k = 1,2,\ldots,n$, $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$. Рассмотрим обобщённую задачу Шоуолтера — Сидорова

$$(Px)^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0,1,\ldots,m-1, \tag{19}$$

для вырожденного линейного уравнения

$$LD_t^\alpha x(t) = Mx(t) + \sum_{k=1}^n N_k(t) D_t^{\alpha_k} x(t) + f(t), \quad t \in (t_0,T). \tag{20}$$

Взяв $N(t, z_1, z_2, \ldots, z_n) := \sum\limits_{k=1}^n N_k(t) z_k$ и опираясь на теорему 4, несложно получить следующий результат.

**Теорема 6.** *Пусть* $\alpha_n \leq m-1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $p \in \mathbb{N}_0$, *оператор* $M$ $(L,p)$*-ограничен, отображения* $N_k : (t_0,T) \to \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ *измеримы, существенно ограничены на* $(t_0,T)$, $\mathrm{im}N_k(t) \subset \mathcal{Y}^1$ *для почти всех* $t \in (t_0,T)$, $k = 1,2,\ldots,n$, $Qf \in L_q(t_0,T;\mathcal{Y})$, *для всех* $l = 0,1,\ldots,p$ $(GD_t^\alpha)^l M_0^{-1}(I-Q)f \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})$, $D_t^\alpha (GD_t^\alpha)^l M_0^{-1}(I-Q)f \in L_q(t_0,T;\mathcal{X})$; $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1} \in \mathcal{X}^1$. *Тогда задача* (19), (20) *имеет единственное сильное решение.*

Рассмотрим задачу стартового управления для вырожденного линейного уравнения (20)

$$(Px)^{(k)}(t_0) = u_k, \ k = 0,1,\ldots,m-1, \tag{21}$$

$$u = (u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial, \tag{22}$$

$$J(x,u) = \|x - x_d\|_{C^{m-1}(t_0,T;\mathcal{X})} + \|D_t^\alpha x - D_t^\alpha x_d\|^q_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} + \delta \sum_{k=0}^{m-1} \|u_k - u_{dk}\|^2_{\mathcal{X}} \to \inf, \tag{23}$$

где множество допустимых управлений $\mathcal{U}_\partial$ — подмножество пространства $(\mathcal{X}^1)^m$, $J$ — функционал стоимости, $x_d \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$, $u_{kd} \in \mathcal{X}^1$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, $\delta > 0$.

**Теорема 7.** *Пусть* $\alpha_n \leq m-1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $p \in \mathbb{N}_0$, *оператор* $M$ $(L,p)$*-ограничен, отображения* $N_k : (t_0,T) \to \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ *измеримы и существенно ограничены на* $(t_0,T)$, $\mathrm{im}N_k(t) \subset \mathcal{Y}^1$ *для почти всех* $t \in (t_0,T)$, $k = 1,2,\ldots,n$; $Qf \in L_q(t_0,T;\mathcal{Y})$, *для всех* $l = 0,1,\ldots,p$ $(GD_t^\alpha)^l M_0^{-1}(I-Q)f \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})$, $D_t^\alpha (GD_t^\alpha)^l M_0^{-1}(I-Q)f \in L_q(t_0,T;\mathcal{X})$; $\mathcal{U}_\partial$ *— непустое замкнутое выпуклое подмножество пространства* $(\mathcal{X}^1)^m$. *Тогда существует решение* $(\hat{x},\hat{u}) \in \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) \times \mathcal{U}_\partial$ *задачи* (20)–(23).

*Доказательство.* По теореме 6 множество допустимых пар $\mathfrak{W}$ непусто. Используем теорему 2.3 из монографии [24] для доказательства разрешимости задачи оптимального управления.

Определим пространства $\mathbb{Y} := \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$, $\mathbb{Y}_1 := \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$, $\mathbb{U} := (\mathcal{X}^1)^m$, $\mathbb{V} := L_q(t_0,T;\mathcal{Y}) \times \mathcal{X}^m$, $\mathbb{F} := (-f,0,\ldots,0) \in \mathbb{V}$, оператор $\mathbb{L} : \mathbb{Y}_1 \times \mathbb{U} \to \mathbb{V}$, $\mathbb{L}(x,u) :=$

$$= (LD_t^\alpha x - Mx - \sum_{k=1}^n N_k(t) D_t^{\alpha_k} x, \gamma_0(Px) - u_0, \gamma_0(Px)^{(1)-u_1}, \ldots, \gamma_0(Px)^{(m-1)} - u_{m-1}).$$

Используя лемму 1, покажем непрерывность линейного оператора $\mathbb{L}$:

$$\|\mathbb{L}(x,u)\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Y})\times\mathcal{X}^m} \leq C\|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} + \|Mx\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Y})} +$$

$$+ \sum_{k=1}^n C_{N_k} \|D_t^{\alpha_k} x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} + C\|x\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} \leq$$

$$\leq C\|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} + \|x\|_{L_q(t_0,T;D_M)} + C\|x\|_{C^{m-1}(t_0,T;\mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} \leq$$

$$\leq C\left(\|x\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m}\right) = C\|(x,u)\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})\times\mathcal{X}^m}.$$

Здесь $C_{N_k} := \operatorname{ess\,sup}\{\|N_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})} : t \in (t_0,T)\}$.

Для пары $(x,u) \in \mathfrak{W}$ имеем

$$\|(x,u)\|_{\mathbb{Y}_1\times\mathbb{U}} = \|x\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} =$$

$$= \|x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} + \|Mx\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Y})} + \|x\|_{C^{m-1}(t_0,T;\mathcal{X})} + \|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} +$$

$$+\|u\|_{\mathcal{X}^m}=\|x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})}+\|LD_t^\alpha x-\sum_{k=1}^n N_kD_t^{\alpha_k}x-f\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Y})}+$$

$$+\|x\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})}+\|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})}+\|u\|_{\mathcal{X}^m}\leq$$

$$\leq C\|x\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})}+\sum_{k=0}^{m-1}\|u_k\|_{\mathcal{X}}+C_f\leq C_1R+C_2,$$

если $J(x,u)\leq R$. Таким образом, функционал (23) коэрцитивный. □

## 4. Пример задачи стартового управления

Рассмотрим задачу управления для модельного уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\gamma\right)D_t^\alpha v=\beta v+\sum_{k=1}^n\delta_k(t)\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\gamma\right)D_t^{\alpha_k}v,\ s\in(0,\pi),\ t\in(t_0,T),\tag{24}$$

$$v(0,t)=v(\pi,t)=0,\quad t\in(t_0,T),\tag{25}$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}+\gamma v\right)(s,t_0)=u_k(s),\quad k=0,1,\dots,m-1,\quad s\in(0,\pi),\tag{26}$$

$\beta\in\mathbb{R}$, $\gamma=b^2$, $b\in\mathbb{N}$, $\delta_k:(t_0,T)\to\mathbb{R}$, $k=1,2,\dots,n$, $0\leq\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n\leq m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$. Для того, чтобы свести задачу (24)–(26) к задаче (19), (20) выберем пространства и операторы: $\mathcal{X}=\{v:H^2(0,\pi):v(0)=v(\pi)=0\}$, $\mathcal{Y}=L_2(0,\pi)$, $L=\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\gamma$, $M=\beta I$, $N_k(t)=\delta_k(t)\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\gamma\right)$, $k=1,2,\dots,n$. Тогда $\mathcal{X}^1=\left\{v\in\mathcal{X}:\int\limits_0^\pi v(s)\sin(bs)ds=0\right\}$, пространство управлений $\mathbb{U}=(\mathcal{X}^1)^m$.

Для системы, описываемой соотношениями (24)–(26), рассмотрим задачу стартового управления

$$\|u\|^2_{(H^2(0,\pi))^m}\leq r^2,\tag{27}$$

$$J(v,u):=\|v-v_d\|_{C^{m-1}([t_0,T];H^2(0,\pi))}+\|D_t^\alpha v-D_t^\alpha v_d\|^2_{L_2(t_0,T;H^2(0,\pi))}+$$

$$+\delta\sum_{k=0}^{m-1}\|u_k-u_{dk}\|^2_{H^2(0,\pi)}\to\inf,\tag{28}$$

где $v_d\in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})$, $D_t^\alpha v_d\in L_2(t_0,T;\mathcal{X})$, $u_d\in\mathcal{X}^1$, $r,\delta>0$.

В данном случае имеем пространство

$$\mathcal{Z}_{\alpha,2}(t_0,T;\mathcal{X}):=\left\{v\in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X}):J_t^{m-\alpha}\left(v-\sum_{k=0}^{m-1}v^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right)\in H^m(t_0,T;\mathcal{X})\right\}.$$

**Теорема 8.** *Пусть* $\alpha_n\leq m-2$, $(\alpha-m+1)^{-1}<2$, $\gamma=b^2$ *для некоторого* $b\in\mathbb{N}$, *функции* $\delta_l:(t_0,T)\to\mathbb{R}$ *измеримо и существенно ограничено,* $l=1,2,\dots,n$. *Тогда существует решение задачи* (24)–(28) *на* $(t_0,T)$.

*Доказательство.* В силу того, что $\ker L=\operatorname{span}\{\sin bs\}$ уравнение (24) вырождено. Оператор $M$ $(L,0)$-ограничен, т.к. для достаточно больших $|\mu|$ имеем $\mu\neq\frac{\beta}{\lambda_k+\gamma}$ и

$$\|(\mu L-M)^{-1}y\|_{H^2(\mathcal{X})}=\sum_{k=1}^\infty\frac{(1+\lambda_k^2)\langle y,\varphi_k\rangle^2}{(\mu(\lambda_k+\gamma)-\beta)^2}\leq C\sum_{k=1}^\infty\langle y,\varphi_k\rangle^2.$$

Из $(L,0)$-ограниченности оператора $M$ следует, что

$$\mathrm{im} L = \mathcal{Y}^1 = \left\{ v \in L_2(0,\pi) : \int\limits_0^\pi v(s)\sin(bs)ds = 0 \right\},$$

поэтому обобщённая задача Шоуолтера — Сидорова (19) эквивалентна задаче $(Lx)^{(k)}(t_0) = u_k = Lx_k \in \mathcal{Y}^1$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, которая в данном случае имеет вид (26). Заметим, что $\mathrm{im} N_k(t) \subset \mathrm{im} L = \mathcal{Y}^1$, так как $N_k(t) = \delta_k(t)L$, $k = 1,2,\ldots,n$.

Очевидно, что замкнутый шар $\mathcal{U}_\partial$, определяемый условием на управления (27), является непустым замкнутым выпуклым множеством. Таким образом, по теореме 7 задача (24)–(28) имеет решение. □

## Список литературы

1. **Нахушев, А. М.** Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 272 с.
2. **Псху, А. В.** Уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху. — М. : Наука, 2006. — 199 с.
3. **Baleanu, D.** Approximate controllability of infinite-dimensional degenerate fractional order systems in the sectorial case / D. Baleanu, V. E. Fedorov, D. M. Gordievskikh, K. Taş // Mathematics. — 2019. — Vol. 7, no. 8. — P. 735.
4. **Baleanu, D.** On fractional operators and their classifications / D. Baleanu, A. Fernandez // Mathematics. — 2019. — Vol. 7, no. 9. — P. 830.
5. **Shishkina, E.** A fractional equation with left-sided fractional Bessel derivatives of Gerasimov — Caputo type / E. Shishkina, S. Sitnik // Mathematics. — 2019. — Vol. 7, no. 12. — P. 1216.
6. **Wang, J. R.** A class of fractional evolution equations and optimal controls / J. R. Wang, Y. Zhou // Nonlinear Analysis: Real World Applications. — 2011. — Vol. 12, iss. 1. — P. 262–272.
7. **Baleanu, D.** Fractional dynamics and control / D. Baleanu, J. A. T. Machado, A. C. J. Luo. — New York, Dordrecht, Heidelberg, London : Springer, 2012. — x+310 p.
8. **Bahaa, G. M.** Optimal control problem for coupled time-fractional diffusion systems with final observations / G. M. Bahaa, A. Hamiaz // Journal of Taibah University for Science. — 2018. — Vol. 13, iss. 1. — P. 124–135.
9. **Plekhanova, M. V.** Degenerate distributed control systems with fractional time derivative / M. V. Plekhanova // Ural Mathematical Journal. — 2016. — Vol. 2, iss. 2. — P. 58–71.
10. **Плеханова, М. В.** Разрешимость задач управления для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка / М. В. Плеханова // Челяб. физ.-мат. журн. — 2017. — Т. 2, вып. 1. — С. 53–65.
11. **Plekhanova, M. V.** Distributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations / M. V. Plekhanova // Journal of Computational and Applied Mathematics.— 2017. — Vol. 312. — P. 39–46.
12. **Plekhanova, M. V.** Problems of hard control for a class of degenerate fractional order evolution equations / M. V. Plekhanova, G. D. Baybulatova // Lecture Notes in Computer Science. — 2019. — Vol. 11548. — P. 501–512.
13. **Plekhanova, M. V.** Semilinear equations in Banach spaces with lower fractional derivatives / M. V. Plekhanova, G. D. Baybulatova // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2019. — Vol.292. — P. 81–93.

14. **Plekhanova, M. V.** A class of semilinear degenerate equations with fractional lower order derivatives / M. V. Plekhanova, G. D. Baybulatova // Stability, Control, Differential Games (SCDG2019), Yekaterinburg, Russia, 16–20 September 2019: Proceedings of the International Conference devoted to the 95th anniversary of Academician N. N. Krasovskii, eds: T. F. Filippova, V. I. Maksimov, A. M. Tarasyev. — 2019. — P. 444–448.
15. **Plekhanova, M. V.** On strong solutions for a class of semilinear fractional degenerate evolution equations with lower fractional derivatives / M. V. Plekhanova, G. D. Baybulatova // Mathematical Modelling in Applied Sciences. — 2020. — First published: 12 April 2020. https://doi.org/10.1002/mma.6413.
16. **Plekhanova, M. V.** Multi-term fractional degenerate evolution equations and optimal control problems / M. V. Plekhanova, G. D. Baybulatova // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, no. 4. — P. 483.
17. **Fedorov V. E.** Distributed order equations in Banach spaxes with sectorial operators / V. E. Fedorov, A. A. Abdrakhmanova // Transmutation Operators and Applications. — Cham, Springer Nature Switzerland AD, 2020. — P. 509–538.
18. **Плеханова, М. В.** Задачи стартового управления для эволюционных уравнений дробного порядка / М. В. Плеханова // Челяб. физ.-мат. журн. — 2016. — Т. 1, вып. 3. — С. 15–36.
19. **Шуклина, А. Ф.** Задачи смешанного управления для системы Соболева / А. Ф. Шуклина, М. В. Плеханова // Челяб. физ.-мат. журн. — 2016. — Т. 1, вып. 2. — С. 78–84.
20. **Плеханова, М. В.** Смешанное управление для линейных бесконечномерных систем дробного порядка / М. В. Плеханова, А. Ф. Шуклина // Челяб. физ.-мат. журн. — 2020. — Т. 5, вып. 1. — С. 32–43.
21. **Bajlekova, E. G.** Fractional evolution equations in Banach spaces: PhD thesis / E. G. Bajlekova. — Eindhoven : Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001. — 107 p.
22. **Лионс, Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. — М. : Мир, 1972. — 588 с.
23. **Корпусов, М. О.** Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование в физике: геометрические и топологические свойства линейных пространств / М. О. Корпусов, А. Г. Свешников. — М. : Красанд, 2011. — 416 с.
24. **Фурсиков, А. В.** Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков. — Новосибирск : Научная книга, 1999. — 352+xii с.
25. **Sviridyuk, G. A.** Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. — Utrecht, Boston : VSP, 2003. — 216 p.

*Поступила в редакцию 27.03.2020*
*После переработки 25.06.2020*

### Сведения об авторе

**Байбулатова Гузель Дамировна**, аспирант, кафедра математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: baybulatova_g_d@mail.ru.

*Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2020. Vol. 5, iss. 3. P. 271–284.*

DOI: 10.47475/2500-0101-2020-15302

# START CONTROL PROBLEM FOR A CLASS OF DEGENERATE EQUATIONS WITH LOWER ORDER FRACTIONAL DERIVATIVES

**G.D. Baybulatova**

*Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*
*baybulatova_g_d@mail.ru*

Fractional order degenerate evolution equation with lower fractional derivatives is studied. The case of a relatively bounded pair of operators in the main part of the equation is considered. For linear and semilinear equations the existence of a unique strong solution of the generalized Showalter — Sidorov problem is proved.These results are used for the proof of the solvability of the start control problem in the linear and the semilinera case. The obtained results are applied to study of an optimal control problem for a fractional order in time degenerate distributed system.

**Keywords:** *fractional derivative, degenerate evolution equation, nonlinear differential equation, start control.*

## References

1. **Nakhushev A.M.** *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye* [Fractional calculus and its application]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 272 p. (In Russ.).
2. **Pskhu A.V.** *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Partial differential equations of fractional order]. Moscow, Nauka Publ., 2006. 199 p. (In Russ.).
3. **Baleanu D., Fedorov V.E., Gordievskikh D.M., Taş K.** Approximate controllability of infinite-dimensional degenerate fractional order systems in the sectorial case. *Mathematics*, 2019, vol. 7, no. 8, 735.
4. **Baleanu D., Fernandez A.** On fractional operators and their classifications. *Mathematics*, 2019, vol.7, no. 9, 830.
5. **Shishkina E., Sitnik S.** A fractional equation with left-sided fractional Bessel derivatives of Gerasimov — Caputo type. *Mathematics*, 2019, vol. 7, no. 12, 1216.
6. **Wang J.R., Zhou Y.** A class of fractional evolution equations and optimal controls. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2011, vol. 12, iss. 1, pp. 262–272.
7. **Baleanu D., Machado J.A.T., Luo A.C.J.** *Fractional dynamics and control.* New York, Dordrecht, Heidelberg, London, Springer, 2012. x+310 p.
8. **Bahaa G.M., Hamiaz A.** Optimal control problem for coupled time-fractional diffusion systems with final observations. *Journal of Taibah University for Science*, 2018, vol. 13, iss. 1, pp. 124–135.
9. **Plekhanova M.V.** Degenerate distributed control systems with fractional time derivative. *Ural Mathematical Journal*, 2016, vol. 2, iss. 2, pp. 58–71.
10. **Plekhanova M.V.** Solvability of control problems for degenerate evolution equations of fractional order. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2017, vol. 2, iss. 1, pp. 53–65.
11. **Plekhanova M.V.** Distributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017, vol. 312, pp. 39–46.

The work is supported by grant 20-31-90015 of Russian Foundation for Basic Research.

12. **Plekhanova M.V., Baybulatova G.D.** Problems of hard control for a class of degenerate fractional order evolution equations. *Lecture Notes in Computer Science*, 2019, vol. 11548, pp. 501–512.
13. **Plekhanova M.V., Baybulatova G.D.** Semilinear equations in Banach spaces with lower fractional derivatives. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2019, vol. 292, pp. 81–93.
14. **Plekhanova M.V., Baybulatova G.D.** A class of semilinear degenerate equations with fractional lower order derivatives. *Stability, Control, Differential Games (SCDG2019)*, Yekaterinburg, Russia, 16–20 September 2019, eds: T.F. Filippova, V.I. Maksimov, A.M. Tarasyev. Proceedings of the International Conference devoted to the 95th anniversary of Academician N.N. Krasovskii, 2019, pp. 444–448.
15. **Plekhanova M.V., Baybulatova G.D.** On strong solutions for a class of semilinear fractional degenerate evolution equations with lower fractional derivatives. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, vol. 00, pp. 1–6.
16. **Plekhanova M.V., Baybulatova G.D.** Multi-term fractional degenerate evolution equations and optimal control problems. *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 4, p. 483.
17. **Fedorov V.E., Abdrakhmanova A.A.** Distributed order equations in Banach spaxes with sectorial operators. *Transmutation Operators and Applications.* Cham, Springer Nature Switzerland AD, 2020. 686 p. Pp. 509–538.
18. **Plekhanova M.V.** Start control problems for fractional evolution equations. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2016, vol. 1, iss. 3, pp. 15–36.
19. **Shuklina A.F., Plekhanova M.V.** Mixed control problems for Sobolev's system. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2016, vol. 1, iss. 2, pp. 78–84.
20. **Plekhanova M.V., Shuklina A.F.** Mixed control for linear infinite-dimensional systems of fractional order. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2020, vol. 5, iss. 1. pp. 32–43.
21. **Bajlekova E.G.** *Fractional Evolution Equations in Banach spaces.* PhD Thesis. Eindhoven, Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001. 107 p.
22. **Lions J.-L.** *Quelques Méthodes De Résolution Des Problémes Aux Limites NonLinéaires.* Paris, Dunod Gauthier-Villars, 1969. xx+554 p.
23. **Korpusov M.O., Sveshnikov A.G.** *Nelineynyy funktsional'nyy analiz i matematicheskoye modelirovaniye v fizike: Geometricheskiye i topologicheskiye svoystva lineynykh prostranstv* [Nonlinear functional analysis and mathematical modeling in physics: Geometric and topological properties of linear spaces]. Moscow, Krasand Publ., 2011. 416 p. (In Russ.).
24. **Fursikov A.V.** *Optimal control of distributed systems. Theory and applications.* Providence, Rhode Island, AMS, 1999. 305 p.
25. **Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.** *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht, Boston, VSP, 2003. 216 p.

*Accepted article received 27.03.2020*
*Corrections received 25.06.2020*