МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2020. Т. 5, вып. 3. С. 261–270.

УДК 517.538.2+517.984.26+517.547 DOI: 10.47475/2500-0101-2020-15301

О НУЛЕВЫХ МНОЖЕСТВАХ СЛАБО ЛОКАЛИЗУЕМЫХ ГЛАВНЫХ ПОДМОДУЛЕЙ В АЛГЕБРЕ ШВАРЦА

Н. Ф. Абузярова[a], **А. Ф. Сагадиева**[b], **З. Ю. Фазуллин**[c]

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
[a]*abnatf@gmail.com*, [b]*sagadieva.albina1998@yandex.ru*, [c]*fazullinzu@mail.ru*

Рассматривается алгебра Шварца $\mathcal{P}$, которая как линейное топологическое пространство изоморфна пространству распределений с компактными носителями на вещественной прямой. Согласно теореме Пэли — Винера — Шварца соответствующий изоморфизм реализуется преобразованием Фурье — Лапласа. Подмодули алгебры $\mathcal{P}$ — замкнутые подпространства, инвариантные относительно умножения на независимую переменную z, — представляют собой эффективный инструмент в исследовании задачи спектрального синтеза для оператора дифференцирования в пространстве $C^\infty(\mathbb{R})$. В связи с рядом нерешённых вопросов, касающихся спектрального синтеза, мы исследуем главные подмодули алгебры $\mathcal{P}$. Ранее нами были получены достаточные условия и весовой критерий слабой локализуемости для главного подмодуля; они сформулированы в терминах условий на функцию, порождающую подмодуль. Вопрос об условиях слабой локализуемости главного подмодуля полезно изучать и в такой постановке: определить, будет ли заданный подмодуль слабо локализуем, по структуре его нулевого множества (или, что то же самое, нулевого множества порождающей его функции). Окончательное решение этого вопроса — весьма сложная задача. Мы приводим описание одного класса последовательностей, каждая из которых есть нулевое множество слабо локализуемого главного подмодуля.

Ключевые слова: *целая функция, нулевое множество, алгебра Шварца, спектральный синтез, локализуемый подмодуль.*

Введение

Пусть $\mathcal{P}$ — *алгебра Шварца*, определяемая как индуктивный предел последовательности банаховых пространств $\{P_k\}$, каждое из которых есть совокупность целых функций φ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(1+|z|)^k \exp(k|y|)}, \quad z = x + \mathrm{i}y.$$

Алгебра $\mathcal{P}$, снабжённая указанной топологией индуктивного предела, есть локально-выпуклое пространство типа (LN^*) (о ЛВП такого типа см. [1]). Каждая

Исследование первого автора выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027); третьего автора — в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, доп. согл. № 075-02-2020-1421/1 к согл. № 075-02-2020-1421.

функция $\varphi \in \mathcal{P}$ имеет вполне регулярный рост при порядке 1 во всей плоскости и индикаторную диаграмму — отрезок мнимой оси $\mathrm{i}[c_\varphi; d_\varphi]$, где $c_\varphi = -h_\varphi(-\pi/2)$, $d_\varphi = h_\varphi(\pi/2)$, h_φ — индикатор функции φ (см. [2; 3]).

Отметим, что умножение на независимую переменную z — непрерывная операция в $\mathcal{P}$. *Подмодулем* $\mathcal{J}$ в алгебре $\mathcal{P}$ будем называть замкнутое подпространство, такое, что $z\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$.

Рассмотрение подмодулей в $\mathcal{P}$ и изучение их свойств представляет интерес в связи с задачей спектрального синтеза для оператора дифференцирования в пространстве Шварца $\mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R})$. Исследование этой задачи было начато в работе [4] и продолжено в ряде работ: [3; 5–7] и др. При этом двойственный подход, использующий подмодули в алгебре Шварца, был реализован первым автором настоящей статьи в [3] и [6]. Авторы работ [4; 5; 7] используют иные методы.

Для исследования подмодулей в алгебре Шварца мы вводим две основные характеристики подмодуля $\mathcal{J}$: *индикаторный отрезок* $[c_\mathcal{J}; d_\mathcal{J}] \subset \overline{\mathbb{R}}$ и *нулевое множество* $\mathcal{Z}_\mathcal{J}$ (см., например, [3; 8]). Концы *индикаторного отрезка* определяются по формулам

$$c_\mathcal{J} = \inf\{h_\varphi(-\pi/2) : \ \varphi \in \mathcal{J}\}, \quad d_\mathcal{J} = \sup\{h_\varphi(\pi/2) : \ \varphi \in \mathcal{J}\}.$$

Нулевое множество $\mathcal{Z}_\mathcal{J}$ представляет собой последовательность кратных точек $\{(a_j; k_j)\} \subset \mathbb{C}$, таких, что всякая функция $\varphi \in \mathcal{J}$ обращается в нуль в каждой точке a_j с кратностью не меньшей, чем k_j, и для любого j найдётся функция $\varphi_j \in \mathcal{J}$, для которой a_j — нуль кратности k_j.

При использовании подмодулей алгебры $\mathcal{P}$ в качестве инструмента для решения задачи спектрального синтеза в пространстве $\mathcal{E}$ оказалось важным изучение наличия (или отсутствия) у подмодуля следующих свойств: устойчивости и слабой локализуемости. Напомним соответствующие определения.

Подмодуль $\mathcal{J}$ называется *устойчивым*, если для любой фиксированной точки $\lambda \in \mathbb{C}$ верна импликация: $\varphi \in \mathcal{J}$ обращается в точке λ в нуль с кратностью, большей, чем кратность этой точки, как нуля подмодуля $\Longrightarrow \frac{\varphi}{z-\lambda} \in \mathcal{J}$. При этом точки $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}_\mathcal{J}$ считаем нулями подмодуля $\mathcal{J}$ кратности 0.

Подмодуль $\mathcal{J}$ *слабо локализуем*, если он содержит *все* функции $\varphi \in \mathcal{P}$, обращающиеся в нуль на $\mathcal{Z}_\mathcal{J}$ и такие, что $[c_\varphi; d_\varphi] \subseteq [c_\mathcal{J}; d_\mathcal{J}]$.

Легко видеть, что устойчивость — необходимое условие слабой локализуемости; обратное, вообще говоря, неверно (см. [5; 9]). Согласно принципу двойственности (см. [3; 8, предложение 1]), а также предложению 3.1 из [4] и предложению 2 из [8] именно устойчивые подмодули алгебры $\mathcal{P}$ соответствуют тем дифференциально-инвариантным подпространствам пространства $\mathcal{E}$, для которых имеет смысл ставить вопрос о спектральном синтезе. Положительное решение вопроса о слабой локализуемости заданного устойчивого подмодуля, в свою очередь, эквивалентно допустимости спектрального синтеза в слабом смысле для соответствующего этому подмодулю дифференциально-инвариантного подпространства (см. [3; 6]).

Известно, что если плотность Берлинга — Мальявена последовательности $\mathcal{Z}_\mathcal{J}$ меньше, чем величина $(d_\mathcal{J} - c_\mathcal{J})/(2\pi)$, то устойчивый подмодуль $\mathcal{J}$ обязательно слабо локализуем (см. [3, теорема 2; 6, теорема 2]). Также известно, что среди подмодулей $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}$, длины индикаторных отрезков которых равны умноженной на 2π плотности Берлинга — Мальявена последовательности $\mathcal{Z}_\mathcal{J}$, имеются устойчивые, но не слабо локализуемые (см. [5, теорема 1.2; 9, теорема 3]).

Напомним, что *главным подмодулем* $\mathcal{J}_\varphi$, порождённым функцией $\varphi \in \mathcal{P}$, называется замыкание в $\mathcal{P}$ множества $Pol_\varphi = \{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\}$. Нулевое множество главного подмодуля совпадает с нулевым множеством Λ_φ функции φ, а длина индикаторного отрезка равна $2\pi D_{BM}(\Lambda_\varphi)$. Главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ всегда устойчив. Этот факт нетрудно обосновать, используя описание топологии алгебры $\mathcal{P}$. Главные подмодули алгебры $\mathcal{P}$ интересны тем, что именно среди них в работах [5] и [9] были обнаружены не слабо локализуемые.

Вообще, главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ будет слабо локализуемым в одном из двух случаев:

a) если множеством Pol_φ исчерпываются все функции $\Phi \in \mathcal{P}$ с индикаторной диаграммой, равной $\mathrm{i}[c_\varphi; d_\varphi]$, такие, что Φ/φ — целая функция (в этом случае $\mathcal{J}_\varphi = Pol_\varphi$);

b) если $Pol_\varphi \subsetneq \mathcal{J}_\varphi$, но при этом любая функция $\Phi \in \mathcal{P}$ с индикаторной диаграммой, равной $\mathrm{i}[c_\varphi; d_\varphi]$, такая, что Φ/φ — целая функция, аппроксимируется в топологии $\mathcal{P}$ функциями из Pol_φ.

Функциями $\varphi \in \mathcal{P}$, для которых имеет место случай a), являются все *медленно убывающие* функции, но не только они (подробно об этом сказано в [9]).

Понятие *медленно убывающей* функции было введено Л. Эренпрайсом в [10]: функция $\varphi \in \mathcal{P}$ называется *медленно убывающей*, если существует $a > 0$, такое, что

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists z' \in \mathbb{C}: \ |x - z'| \le a \ln(2 + |x|), \ |\varphi(z')| \ge (a + |z'|)^{-a}.$$

При исследовании главных подмодулей, для которых $Pol_\varphi \subsetneq \mathcal{J}_\varphi$ (случай b)), первым автором настоящей работы были получены достаточные условия слабой локализуемости подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ в терминах условий на поведение функции $\ln|\varphi|$ (см. [11, теорема 2.1]). Также в [12, теорема 2] мы доказали, что в случае $Pol_\varphi \subsetneq \mathcal{J}_\varphi$ слабая локализуемость подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ эквивалентна полноте многочленов в специальном весовом пространстве целых функций.

Для заданной последовательности Λ с $D_{BM}(\Lambda) < +\infty$ в работе [7], в двойственных терминах дифференциально-инвариантных подпространств, изучался вопрос об условиях, при которых устойчивый подмодуль $\mathcal{J}$ с $\mathcal{Z}_\mathcal{J} = \Lambda$ и $[c_\mathcal{J}; d_\mathcal{J}] = [-\pi D_{BM}(\Lambda); \pi D_{BM}(\Lambda)]$ единственен. Единственность такого подмодуля $\mathcal{J}$, очевидно, влечёт и его слабую локализуемость. В [7] последовательности Λ с указанным свойством были названы *синтезируемыми* и был получен критерий синтезируемости последовательности Λ [7, теорема 1.3]. Но условия этого критерия формулируются не в терминах характеристик самой последовательности.

В силу теоремы 1.3 из [7] и следствия 1 из [12] *последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$ синтезируема тогда и только тогда, когда она является нулевым множеством функции $\varphi \in \mathcal{P}$, порождающей слабо локализуемый главный подмодуль.*

Интересной и, по-видимому, весьма непростой задачей является поиск условий (в идеале — критерия) в терминах каких-либо характеристик комплексной последовательности Λ с $D_{BM}(\Lambda) < +\infty$, обеспечивающих слабую локализуемость устойчивого подмодуля $\mathcal{J}$ с $\mathcal{Z}_\mathcal{J} = \Lambda$, $[c_\mathcal{J}; d_\mathcal{J}] = [-\pi D_{BM}(\Lambda); \pi D_{BM}(\Lambda)]$. Настоящая работа посвящена частному случаю этой задачи — построению каких-либо семейств синтезируемых последовательностей Λ.

Ранее нами был рассмотрен один из возможных путей получения таких последовательностей [13, теорема 2]; в [6] приведён конкретный пример целочисленной подпоследовательности — нулевого множества слабо локализуемого главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi \neq Pol_\varphi$. А в [11] с помощью доказанной там теоремы 2.1 нулевое множество слабо локализуемого главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi \neq Pol_\varphi$ было получено удалением правильно распределённой при порядке $\rho \in (0; 1/2)$ подпоследовательности из последовательности, близкой к целочисленной (например, последовательности нулей функции типа синуса).

Здесь мы приводим конструкцию ещё одного класса синтезируемых последовательностей.

1. Нулевые множества слабо локализуемых главных подмодулей

Пусть функция $l:\ [0;+\infty)\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условию: для некоторых $t_l>0$ и $C_l>0$
$$|l(t)-l(s)|\le C_l|\ln^2 t-\ln^2 s|,\quad C_l>0,\quad t,s>t_l.$$
Положим $\lambda(t)=t+l(|t|)$, $t\in\mathbb{R}$. Тогда согласно теореме 1 из [14] последовательность $\lambda_k=\lambda(k)$, $k=\pm1,\pm2,\dots$, представляет собой нулевое множество *очень медленно убывающей* функции $\varphi\in\mathcal{P}$, определяемой формулой
$$\varphi(z)=\lim_{R\to\infty}\prod_{|\lambda_k|<R}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right). \tag{1}$$
Очень медленно убывающие функции являются частным случаем медленно убывающих функций; соответствующее определение получается заменой в определении медленно убывающей функции требования $|x-z'|\le a\ln(2+|x|)$ на $|x-z'|\le a$. Поэтому главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ совпадает с множеством Pol_φ и слабо локализуем для функции, определённой формулой (1).

Синтезируемые последовательности будем строить как подпоследовательности $\mathcal{M}\subset\Lambda$, каждая из которых есть нулевое множество некоторой функции $\psi\in\mathcal{P}$ с индикаторной диаграммой $\mathrm{i}[-\pi;\pi]$, для которой $Pol_\psi\subsetneq\mathcal{J}_\psi$.

Считающей функцией будем называть возрастающую кусочно постоянную непрерывную справа функцию $n:\ [0;+\infty)\to\mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Считающая функция комплексной последовательности $\Lambda=\{\lambda_k\}$ равна числу всех точек λ_k с $|\lambda_k|\le t$.

Для считающей функции $n(t)$, равной 0 на $[0;1]$, положим
$$N(t)=\int_0^t\frac{n(\tau)}{\tau},\ t>0,\quad \Omega(s)=N(e^{|s|}),\ s\in\mathbb{R}.$$
Функция Ω чётная и выпуклая; она принадлежит к классу N-функций, определённых в [15, гл. I].

Нам понадобятся следующие условия для $n(t)$.

N1. Найдётся положительная постоянная C_Ω, такая, что
$$\Omega(2s)\le C_\Omega\Omega(s),\quad |s|\ge s_0,$$
$$\lim_{\delta\nearrow1}\varlimsup_{t\to\infty}\frac{n(\delta t)}{n(t)}>1-\frac{1}{C_\Omega}.$$
N2. Для некоторого $m_0\in\mathbb{N}$
$$\int_t^{t+m_0}\mathrm{d}n(\tau)<m_0,\quad t\ge t_0. \tag{2}$$
По заданной считающей функции $n(t)$, удовлетворяющей условиям N1, N2, определим подпоследовательность $\mathcal{M}\subset\Lambda$ следующим образом. Положим
$$n_j=\int_{m_0j}^{m_0(j+1)}\mathrm{d}n(\tau),\quad j\in\mathbb{Z}.$$

В силу (2) n_j может принимать одно из значений $0, 1, \dots, m_0 - 1$, а в силу свойств функции l каждый промежуток вида $[m_0 j; m_0(j+1))$, $j \in \mathbb{Z}$, при достаточно большом $|j|$ содержит не менее $(m_0 - 1)$ точек λ_k. Для каждого $j \in \mathbb{Z}$ из последовательности Λ исключим n_j точек $\lambda_k \in [m_0 j; m_0(j+1))$; оставшиеся точки перенумеруем в порядке возрастания их модулей. Полученную последовательность обозначим $\mathcal{M} = \{\mu_i\}$.

Докажем сначала одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_i\}$, $1 < |\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \dots$, — вещественная последовательность, считающая функция которой удовлетворяет условию* N1. *Тогда*

$$f(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_i}\right) \tag{3}$$

есть целая функция нулевого порядка, и для любого фиксированного $\delta_0 > 0$ имеет место соотношение

$$\ln|f(z)| \asymp N(|z|) + \mathrm{const}, \quad z \in \mathbb{C}: \ \mathrm{dist}\,(z, \Lambda) \ge \delta_0. \tag{4}$$

Напомним, что соотношение $f(t) \asymp g(t)$, $t \in T$, означает существование положительных постоянных c_1 и c_2, таких, что $c_1 f(t) \le g(t) \le c_2 f(t)$, $t \in T$.

Доказательство. Первое из требований в N1 носит название Δ_2-*условия*. Известно, что из него следует оценка $\Omega(s) = O(|s|^{n_0})$, $|s| \to \infty$, где $n_0 \in \mathbb{N}$ (см. [15, гл. I, §4]). Отсюда для считающей функции $n(t)$ последовательности Λ получаем соотношение $n(t) = O((\ln t)^{n_0})$, $t \to \infty$. И значит, формула (3) корректно определяет целую функцию нулевого порядка.

Δ_2-условие для функции Ω в терминах функции N примет вид

$$N(t^2) \le C_\Omega N(t), \quad t \ge t_0. \tag{5}$$

Положим

$$Q(r) = r \int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^2} \mathrm{d}t.$$

Используя неравенство (5), покажем, что

$$Q(r) = O(N(r)), \quad r \to \infty. \tag{6}$$

Действительно,

$$Q(r) = r\left(0 - \frac{N(r)}{r} + \int_r^{\infty} \frac{N(t)}{t}\mathrm{d}t\right) \le r \sum_{j=0}^{\infty} \int_{r^{2^j}}^{r^{2^{j+1}}} \frac{N(t)}{t^2}\mathrm{d}t \le$$

$$\le r \sum_{j=0}^{\infty} 2^j C_\Omega^{j+1} N(r) \int_r^{r^2} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2^{j+1}}} = O(N(r)).$$

Далее, согласно теореме 4.1 из [15], Δ_2-условие для Ω эквивалентно тому, что

$$n(t) \ln t \le C_\Omega N(t), \quad t \ge t_0, \tag{7}$$

в частности,

$$n(t) = o(N(t)), \quad t \to \infty. \tag{8}$$

Воспользуемся теперь следующей оценкой снизу для целых функций рода 0 из классической монографии Р. Боаса ([16, лемма 3.5.10]):

$$\ln |f(z)| \geq n(\sigma R)\left(\frac{r}{\sigma R} + \ln \frac{H}{\sigma R}\right) + N(\sigma R) - \frac{r}{R(\sigma - 1)} Q(\sigma R). \tag{9}$$

Эта оценка справедлива для всех z с $r = |z| < R$, лежащих вне исключительных кружков с суммой радиусов $2eH$; здесь σ — произвольное фиксированное число, большее 1.

С учётом (6) и (8) из оценки (9) нетрудно вывести, что при фиксированном $\sigma > 1$ для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\alpha_\varepsilon \in (0;1)$ и $R_\varepsilon > 0$, такие, что при $R \geq R_\varepsilon$

$$\ln |f(z)| \geq (1 - \varepsilon) N(\sigma R) \tag{10}$$

для всех z с $|z| \leq \alpha_\varepsilon R$, лежащих вне исключительного множества $E_{\varepsilon,R}$, диаметр которого не превосходит $\alpha_\varepsilon \varepsilon R$.

В силу второго из соотношенией в условии N1 для достаточно малого $\theta > 0$ найдутся $\varepsilon_\theta > 0$ и $R_\theta > 0$, такие, что при $\varepsilon \leq \varepsilon_\theta$ и $R \geq R_\theta$ число точек λ_i, попавших в любую связную компоненту исключительного множества $E_{\varepsilon,R}$, не превосходит величины $\frac{1-\theta}{C_\Omega} n(\sigma R)$. Принимая во внимание этот факт и неравенство (7), при помощи стандартных приёмов оценки целых функций из (10) выводим, что для произвольного фиксированного $\delta_0 > 0$

$$\ln |f(z)| \geq \frac{\theta}{2} N(|z|), \quad |z| \geq r_{\theta,\delta_0}, \quad \operatorname{dist}(z, \Lambda) \geq \delta_0. \tag{11}$$

Так как f — целая функция рода 0, полагая $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, имеем

$$N(r) \leq \ln M(r) \leq N(r) + Q(r)$$

(см. [16, лемма 3.5.1]). Отсюда, учитывая (6), заключаем, что

$$\ln |f(z)| \leq \operatorname{const} N(|z|).$$

Асимптотическое соотношение (4) вытекает из последнего неравенства и оценки (11). □

Теорема 1. *Функция, определяемая формулой*

$$\psi(z) = \lim_{R \to \infty} \prod_{|\mu_i| < R} \left(1 - \frac{z}{\mu_i}\right),$$

порождает в алгебре $\mathcal{P}$ слабо локализуемый главный подмодуль $\mathcal{J}_\psi$, причём

$$Pol_\psi \subsetneq J_\psi.$$

Доказательство. Пусть $\{a_i\}$ — последовательность, полученная упорядочением точек множества $(\Lambda \setminus \mathcal{M})$ по возрастанию их модулей, а $\nu(t)$ — считающая функция этой последовательности. Нетрудно видеть, что $n(t)$ и $\nu(t)$ связаны соотношением $n(t) - \nu(t) = O(1)$, $t \to \infty$, а функции $N(t)$ и $\widetilde{N}(t) = \int\limits_0^t \frac{\nu(\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau$ — соотношением

$\widetilde{N}(t) = (1 + o(1))N(t)$, $t \to \infty$. Отсюда следует, что для последовательности $\{a_i\}$ и её считающей функции ν выполнены условия леммы 1, вообще говоря, с другими постоянными вместо C_Ω и s_0. И значит,

$$\ln |\omega(z)| \asymp \widetilde{N}(|z|) + \mathrm{const}, \quad z = x + \mathrm{i}\delta_0, \tag{12}$$

где

$$\omega(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_i}\right).$$

Функция $\varphi(z)$ — очень медленно убывающая, поэтому

$$\ln |\varphi(z)| \asymp \ln(|z| + 2), \quad z = x + \mathrm{i}\delta_0. \tag{13}$$

Положим $\psi = \frac{\varphi}{\omega}$. Из соотношения (13), с учётом теоремы 2 работы [9], следует, что $Pol_\psi \subsetneq \mathcal{J}_\psi$; а из (12) и (13) — что функция ψ удовлетворяет условиям следующей теоремы.

Теорема А. [11, теорема 2.1]. *Предположим, что существует положительная постоянная L_0, такая, что для любого $x \in \mathbb{R}$ найдётся $x' \in \mathbb{R}$ со свойствами $|x - x'| \le L_0 u_*(x)$ и $\ln |\psi(x')| \ge -L_0 u_*(x')$. Тогда подмодуль $\mathcal{J}_\psi$ слабо локализуем.*

В теореме А обозначено $u_*(x) = \ln U_*(x)$,

$$U_*(x) = \sup_{n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}} \frac{|x|^n}{M_n},$$

$M_n = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} |x^n \psi(x)|$, $n = 0, 1, \ldots$; причём в нашем случае $u_*(x) \asymp \widetilde{N}(|x|) + \mathrm{const}$. Применяя теорему А, заключаем, что $\mathcal{J}_\psi$ — слабо локализуемый главный подмодуль. □

Список литературы

1. **Себастьян-и-Сильва, Ж.** О некоторых классах ЛВП, важных в приложениях / Ж. Себастьян-и-Сильва // Математика. Сб. переводов иностр. статей. — 1957. — Т. 1, № 1. — С. 60–77.
2. **Levin, B. Ya.** Lectures on entire functions (Rev. Edition) / B. Ya. Levin (in collaboration with Yu. Lubarskii, M. Sodin, V. Tkachenko). — R. I. : AMS Providence, 1996. — 254 p.
3. **Абузярова, Н. Ф.** Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций / Н. Ф. Абузярова // Докл. Акад. наук. — 2014. — Т. 457, № 5. — С. 510–513.
4. **Aleman, A.** Derivation-invariant subspaces of C^∞ / A. Aleman, B. Korenblum // Computational Methods and Function Theory. — 2008. — Vol. 8, no. 2. — P. 493–512.
5. **Aleman, A.** Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation / A. Aleman, A. Baranov, Yu. Belov // Journal of Functional Analysis. — 2015. — Vol. 268. — P. 2421–2439.
6. **Абузярова, Н. Ф.** Спектральный синтез для оператора дифференцирования в пространстве Шварца / Н. Ф. Абузярова // Мат. заметки. — 2017. — Т. 102, № 2. — С. 163–177.
7. **Baranov, A.** Synthesizable differentiation-invariant subspaces / A. Baranov, Yu. Belov // Geometric and Functional Analysis. — 2019. — Vol. 29, no. 1. — P. 44–71.
8. **Абузярова, Н. Ф.** Замкнутые подмодули в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси / Н. Ф. Абузярова // Уфим. мат. журн. — 2014. — Т. 6, № 4. — С. 3–18.

9. **Абузярова, Н. Ф.** Некоторые свойства главных подмодулей в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси / Н. Ф. Абузярова // Уфим. мат. журн. — 2016. — Т. 8, № 1. — С. 3–14.
10. **Ehrenpreis, L.** Solution of some problems of division. IV / L. Ehrenpreis // American Journal of Mathematics. — 1960. — Vol. 57. — P. 522–588.
11. **Abuzyarova, N. F.** Principal submodules in the module of entire functions, which is dual to the Schwarz space, and weak spectral synthesis in the Schwartz space / N. F. Abuzyarova // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — Vol. 241, no. 6. — P. 658–671.
12. **Абузярова, Н. Ф.** Главные подмодули в модуле Шварца / Н. Ф. Абузярова // Изв. вузов. Математика. — 2020. — № 5. — С. 83–88.
13. **Абузярова, Н. Ф.** О 2-порожденности слабо локализуемых подмодулей в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси / Н. Ф. Абузярова // Уфим. мат. журн. — 2016. — Т. 8, № 3. — С. 8–21.
14. **Абузярова, Н. Ф.** О сдвигах целочисленной последовательности, порождающих функции, обратимые по Эренпрайсу / Н. Ф. Абузярова // Записки науч. семинаров ПОМИ. — 2019. — Т. 480. — С. 5–25.
15. **Красносельский, М. А.** Выпуклые функции и пространства Орлича / М. А. Красносельский, А. Б. Рутицкий. — М. : Физматлит, 1958. — 271 с.
16. **Boas, R. P., Jr.** Entire functions / R. P. Boas, Jr. — New York : Academic Press, 1954. — 276 p.

Поступила в редакцию 10.06.2020
После переработки 18.08.2020

Сведения об авторах

Абузярова Наталья Фаирбаховна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа, Башкирский государственный университет, Уфа, Россия; e-mail: abnatf@gmail.com.

Сагадиева Альбина Фаритовна, студентка факультета математики и информационных технологий, Башкирский государственный университет, Уфа, Россия; e-mail: sagadieva.albina1998@yandex.ru.

Фазуллин Зиганур Юсупович, доктор физико-математических наук, доцент, декан факультета математики и информационных технологий, Башкирский государственный университет, Уфа, Россия; e-mail: fazullinzu@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2020. Vol. 5, iss. 3. P. 261–270.

DOI: 10.47475/2500-0101-2020-15301

ON ZERO SETS OF WEAKLY LOCALISABLE PRINCIPAL SUBMODULES IN THE SCHWARTZ ALGEBRA

N.F. Abuzyarova[a], **A.F. Sagadieva**[b], **Z.Yu. Fazullin**[c]

Bashkir State University, Ufa, Russia
[a] *abnatf@gmail.com*, [b] *sagadieva.albina1998@yandex.ru*, [c] *fazullinzu@mail.ru*

We consider the Schwartz algebra $\mathcal{P}$. As a linear topological space, it is isomorphic to the space of all distributions compactly supported on the real line. By the Paley — Wiener — Schwartz theorem, the Fourier — Laplace transform establishes the corresponding isomorphism. Submodules of the algebra $\mathcal{P}$ are defined as closed subspaces which are invariant under the multiplication by the independent variable z. They supply an effective tool to explore the possibility of the spectral synthesis for the differentiation operator in the space $C^\infty(\mathbb{R})$. In connection with some open questions on the problem of the spectral synthesis in $C^\infty(\mathbb{R})$, we study principal submodules of the algebra $\mathcal{P}$. Earlier, we have obtained the sufficient conditions and the weighted criterion of the weak localisability for principal submodules. These conditions contain some restrictions on the generating function of a submodule. However, one should also consider the following form of the question: knowing the zero set of a principal submodule (or, which is the same, the zero set of its generating function), define whether it is weakly localisable. The complete answer seems to be quite difficult to find. Here, we construct the class of synthesable sequences which are zero sets of weakly localisable principal submodules.

Keywords: *entire function, zero set, Schwartz algebra, spectral synthesis, localisable submodule.*

References

1. **Sebastiao et Silva J.** Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni. *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni. Roma*, 1955, vol. 14, no. 5, pp. 388–410.
2. **Levin B.Ya. (in collaboration with Lubarskii Yu., Sodin M., Tkachenko V.)** *Lectures on Entire Functions.* R. I., AMS Providence, 1996. 254 p.
3. **Abuzyarova N.F.** Spectral synthesis in a Schwartz space of infinitely differentiable functions. *Doklady Mathematics*, 2014, vol. 90, no. 1, pp. 479–482.
4. **Aleman A., Korenblum B.** Derivation-invariant subspaces of C^∞. *Computational Methods and Function Theory*, 2008, vol. 8, no. 2, pp. 493–512.
5. **Aleman A., Baranov A., Belov Yu.** Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation. *Journal of Functional Analysis*, 2015, vol. 268, pp. 2421–2439.
6. **Abuzyarova N.F.** Spectral synthesis for the differentiation operator in the Schwartz space. *Mathematical Notes*, 2017, vol. 102, no. 2, pp. 137–148.
7. **Baranov A., Belov Yu.** Synthesizable differentiation-invariant subspaces. *Geometric and Functional Analysis*, 2019, vol. 29, no. 1, pp. 44–71.
8. **Abuzyarova N.F.** Closed submodules in the module of entire functions of exponential type and polynomial growth on the real axis. *Ufa Mathematical Journal*, 2014, vol. 6, no. 4, pp. 3–17.

The research of the first author was carried out in the framework of the State Task of the Ministry of science and higher education of the Russian Federation (scientific topic code is FZWU-2020-0027); the third author is supported by the Development Program of the Scientific and Educational Mathematical Center of the Volga Federal District, additional agreement no. 075-02-2020-1421/1 to agreement no. 075-02-2020-1421.

9. **Abuzyarova N.F.** Some properties of principal submodules in the module of entire functions of exponential type and polynomial growth on the real axis. *Ufa Mathematical Journal*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 1–12.
10. **Ehrenpreis L.** Solution of some problems of division. IV. *American Journal of Mathematics*, 1960, vol. 57, pp. 522–588.
11. **Abuzyarova N.F.** Principal submodules in the module of entire functions, which is dual to the Schwarz space, and weak spectral synthesis in the Schwartz space. *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 241, no. 6, pp. 658–671.
12. **Abuzyarova N.F.** Principal submodules in the Schwartz module. *Russian Mathematics*, 2020, vol. 64, pp. 74–78.
13. **Abuzyarova N.F.** On 2-generateness of weakly localizable submodules in the module of entire functions of exponential type and polynomial growth on the real axis. *Ufa Mathematical Journal*, 2016, vol. 8, no. 3, pp. 8–21.
14. **Abuzyarova N.F.** O sdvigakh tselochislennoy posledovatel'nosti, porozhdayushchikh funktsii, obratimye po Erenpraysu. [On shifts of a sequence of integers generating functions that are invertible in the sense of Ehrenpreis]. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* [Scientific seminars notes of PDMI], 2019, vol. 480, pp. 5–25. (In Russ.).
15. **Krasnoselsky M.A., Rutitsky Y.B.** *Convex Functions and Orlicz Spaces.* Hindustan Publ., 1962. 262 p.
16. **Boas R.P., Jr.** *Entire Functions.* New York, Academic Press, 1954. 276 p.

Accepted article received 10.06.2020
Corrections received 18.08.2020