

АЛГОРИТМЫ МИНИМИЗАЦИИ ХАУСДОРФОВА ОТКЛОНЕНИЯ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА ОТ НАБОРА ПОДВИЖНЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

П. Д. Лебедев^{1,2,a}, А. А. Успенский^{1,2,b}, В. Н. Ушаков^{1,c}

¹Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

²Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

^apleb@yandex.ru, ^buspen@imm.uran.ru, ^cushak@imm.uran.ru

Изучается задача поиска оптимального расположения набора подвижных фигур в границах заданного выпуклого множества (арены) на плоскости. Критерием оптимальности выбрана минимизация хаусдорфова отклонения арены от объединения этих подвижных объектов. Предложены численные алгоритмы решения задачи, основанные на разбиении арены на области влияния фигур (на обобщённые зоны Дирихле) и отыскании оптимального положения каждой из них в границах своей области. При создании алгоритмов использованы методы негладкой оптимизации и конструкции геометрической теории приближений. Выполнено численное моделирование решения задачи для случая трёх подвижных выпуклых многоугольников.

Ключевые слова: хаусдорфово отклонение, выпуклое множество, чебышёвский центр, минимизация, субдифференциал.

Введение

При численном решении прикладных задач часто требуется заменить множество конечным набором более простых однотипных объектов. Такая потребность возникает, например, для множеств со сложной геометрией или в ситуации, когда исходное множество целесообразно хранить и обрабатывать в виде совокупности унифицированных фигур. В плоском случае одним из наиболее естественных вариантов решения проблемы является замена ограниченного множества объединением набора непересекающихся многоугольников. Подобные конструкции описаны, например, в [1]. В работе рассмотрена задача об оптимальном расположении объединения многоугольников в смысле минимизации хаусдорфова отклонения от них компакта, в который эти многоугольники могут быть вложены. При этом считается, что многоугольники могут совершать произвольные собственные движения, то есть плоскопараллельные перемещения и повороты с центром в произвольной точке. Предложен и реализован в виде комплекса программ итерационный алгоритм построения конечного набора выпуклых многоугольников, подвижных в границах арены — выпуклого многоугольника. Алгоритм базируется на понятии чебышёвского центра компактного множества и локальных теоремах об оптимальности. Также привлекаются субдифференциальное исчисление и конструкции сингулярных множеств, возникающих при эволюции волновых фронтов. Эффективность работы алгоритма иллюстрируется на примере. Похожие задачи решаются в теории распознавания образов [2] и теории приближений [3].

1. Задача минимизации и схема разбиения компакта

Плоское компактное множество с непустой внутренностью может быть с какой угодно точностью аппроксимировано многоугольником, поэтому в качестве множеств рассмотрения примем многоугольники. Пусть заданы выпуклый многоугольник $A \subset \mathbb{R}^2$ (арена) и набор $\bar{B} = \{B_i\}_{i=1}^n$ из $n \in \mathbb{N}$ выпуклых многоугольников B_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Рассматривается задача об оптимальном расположении фигур \widehat{B}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, которые могут быть получены из B_i , $i = 1, 2, \dots, n$, с помощью собственных движений. Для каждого номера $i = 1, 2, \dots, n$ строится множество

$$\widehat{B}_i = \Pi(\varphi_i)B_i + \{\mathbf{x}_i\}.$$

Здесь $\Pi(\varphi_i)B$ означает преобразование

$$\Pi(\varphi_i)B_i \triangleq \{(\cos \varphi_i b_1 - \sin \varphi_i b_2, \sin \varphi_i b_1 + \cos \varphi_i b_2) \in \mathbb{R}^2 : (b_1, b_2) \in B_i\}$$

поворота компакта B_i на угол φ_i против часовой стрелки вокруг начала координат, а сложение со множеством $\{\mathbf{x}_i\}$ — сдвиг на вектор \mathbf{x}_i .

Обозначим через Ψ_n множество всех наборов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ из n чисел $\varphi_i \in [-\pi, \pi]$, $i = \overline{1, n}$. Обозначим через \mathcal{X}_n множество всех наборов $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ из n векторов $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, \dots, n$. Запишем набор из n многоугольников, полученных путём комбинации поворота и параллельного переноса каждого элементов \bar{B} :

$$\bar{B}(\Phi, X) \triangleq \{\Pi(\varphi_i)B_i + \{\mathbf{x}_i\}\}_{i=1}^n.$$

Задача заключается в том, чтобы найти такой массив чисел $\Phi^* = \{\varphi_i^*\}_{i=1}^n$, $\varphi_i^* \in [-\pi, \pi]$, $i = 1, 2, \dots, n$, и массив векторов $X^* = \{\mathbf{x}_i^*\}_{i=1}^n$, $\mathbf{x}_i^* \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, \dots, n$, чтобы выполнялось равенство

$$h(A, \bar{B}(\Phi^*, X^*)) = \min_{\Phi \in \Psi_n, X \in \mathcal{X}_n} h(A, \bar{B}(\Phi, X)), \quad (1)$$

где $h(A, B) \triangleq \max_{\mathbf{a} \in A} \rho(\mathbf{a}, B)$ — хаусдорфова отклонение [4] компакта A от компакта B , $\rho(\mathbf{a}, B) \triangleq \min_{\mathbf{b} \in B} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ — евклидово расстояние от точки \mathbf{a} до множества B , $\|\mathbf{a}\|$ — евклидова норма вектора \mathbf{a} . Изучаемая задача является усложнённым «сетевым» вариантом рассмотренной ранее задачи об отыскании положения одной фигуры, обеспечивающем минимум хаусдорфова отклонения от неё другой фигуры [5].

Сформулированную задачу можно интерпретировать как отыскание таких движений множеств B_i , $i = 1, 2, \dots, n$, чтобы для получившихся в их результате фигур \widehat{B}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, при минимально возможном ε выполнялось вложение

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n (\widehat{B}_i + O(\mathbf{0}, \varepsilon)), \quad (2)$$

где $\mathbf{0} = (0, 0)$, $O(\mathbf{c}, r) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| \leq r\}$ — круг с центром в точке \mathbf{c} , радиуса r . По сути правая часть вложения (2) есть объединение замыканий ε -окрестностей множеств \widehat{B}_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Минимальная величина ε равна значению выражения (1). Подобная постановка позволяет интерпретировать задачу также как обобщение изучаемой ранее задачи о покрытии множества наборами кругов [6]. Если круг есть замкнутая ε -окрестность точки, то в данной работе проводится аппроксимация множества A ε -окрестностями более сложных фигур — многоугольников.

Для решения задачи осуществим разбиение арены A на зоны. Назовём обобщённой зоной Дирихле множества B_i в множестве A

$$D^{(i)}(A, \bar{B}) = \left\{ \mathbf{a} \in A : \rho(\mathbf{a}, B_i) = \min_{j=1,2,\dots,n} \rho(\mathbf{a}, B_j) \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Требуется найти такие массивы Φ и X , чтобы величина

$$\max_{i=1,2,\dots,n} h(A, D^{(i)}(A, \bar{B}(\Phi, X))) \quad (3)$$

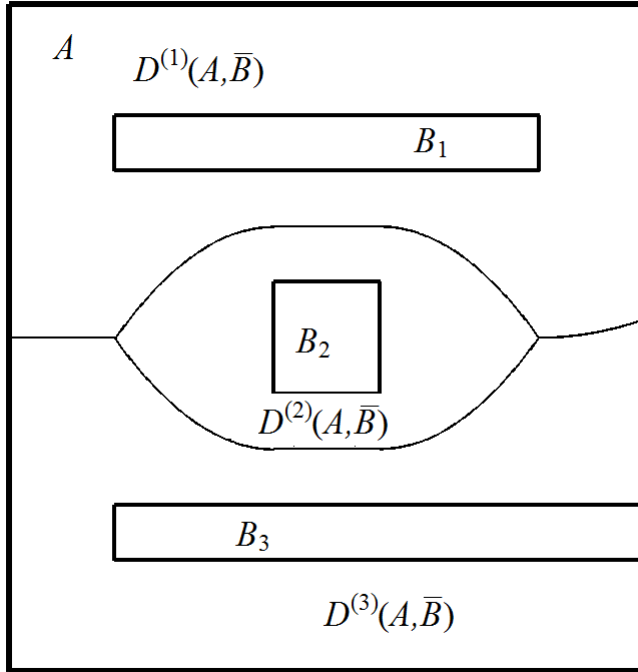


Рис. 1. Обобщённые зоны Дирихле при $n = 3$

была минимальной. Данная конструкция обобщает понятие зоны Дирихле [7] как геометрического места точек в A , которые лежат не дальше от некоторой заданной точки, чем от набора из конечного числа точек. Значение выражения (3) по построению совпадает со значением ε в выражении (2). Заметим, что в общем случае обобщённая зона Дирихле — невыпуклое множество, даже если A — выпуклый компакт (рис. 1). На рисунке жирной линией обозначена граница многоугольника A , средней линией — границы многоугольников B_i , $i = 1, 2, 3$, тонкой линией — границы множеств $D^{(i)}(A, \bar{B})$, $i = 1, 2, 3$. Границы обобщённых зон Дирихле строятся как рассеивающие линии в задаче быстрого действия с круговой вектограммой скоростей с центром в начале координат [8], в которой целевое множество совпадает с \bar{B} . При численной реализации алгоритма используется модификация разработанного ранее авторами вычислительного комплекса [9]. Подробно свойства геометрического места точек, которые находятся на равном расстоянии от двух выпуклых фигур, изучены, например, в [10].

2. Численные методы

Базовым элементом вычислительной процедуры является обобщённая зона Дирихле, которая строится для каждого из компактов B_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Затем, если $D^{(i)}(A, \bar{B}) \neq \emptyset$, то вычисляется положение множества \hat{B}_i , дающее минимум хаусдорфова отклонения от него $D^{(i)}(A, \bar{B})$, с применением оптимизационных методов, развитых на базе предложенных в [11] (для каждого $i = 1, 2, \dots, n$). Их основу составили геометрические конструкции чебышёвского центра и радиуса множеств, о которых речь пойдёт ниже. Важную роль играют также производные по направлениям минимизируемой функции. При этом множество $D^{(i)}(A, \bar{B})$ аппроксимируется невыпуклым в общем случае многоугольником A_i так, чтобы выполнялось включение $D^{(i)}(A, \bar{B}) \subseteq A_i$ и величина $h(A_i, D^{(i)}(A, \bar{B}))$ была бы минимально возможной, $i = 1, 2, \dots, n$.

Для произвольного многоугольника A (в общем случае невыпуклого) и выпуклого многоугольника B рассмотрим задачу о построении многоугольника B^* , конгруэнтного B , такого, чтобы хаусдорфово отклонение $h(A, B^*)$ было минимальным. Заметим, что функция $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, B)$ является выпуклой, поэтому вместо A достаточно рассмотреть набор его вершин $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^N$, где N — число вершин многоугольника A . Здесь

$$h(A, B^*) = \max_{j=1,2,\dots,N} \rho(\mathbf{a}_j, B).$$

Приведём некоторые определения, необходимые для описания итерационного алгоритма решения задачи.

Проекцией $\mathbf{p}(\mathbf{a}, B)$ точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ на замкнутое множество $B \subset \mathbb{R}^2$ называется ближайшая к \mathbf{a} в евклидовой метрике точка из B . Заметим, что если множество B невыпуклое, то ближайших к \mathbf{a} точек может быть более одной, но в случае выпуклого множества она единственна [12, Лемма 1.9.1].

Чебышёвским центром [13] компактного множества $A \subset \mathbb{R}^2$ называется такая точка $\mathbf{c}(A)$, что

$$h(A, \{\mathbf{c}(A)\}) = \inf \{h(A, \{\mathbf{x}\}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}. \quad (4)$$

Величина (4) называется *чебышёвским радиусом* $r(A)$ компактного множества $A \subset \mathbb{R}^2$. Подробнее свойства чебышёвского центра и области его приложения в геометрических задачах, например, в задачах о покрытиях, приведены в [14].

2.1. Методы параллельного сдвига

Рассмотрим произвольный многоугольник A с набором вершин $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^N$, $N > 1$, и выпуклый многоугольник B . Будем обозначать

$$V(A, B) \triangleq \{\mathbf{a}_j : \rho(\mathbf{a}_j, B) > 0, j = 1, 2, \dots, N\}$$

множество тех вершин многоугольника A , которые не принадлежат B . Если это множество пустое, то имеет место равенство $h(A, B) = 0$, в противном случае $h(A, B) > 0$.

Введём в рассмотрение множество $W(A, B) \triangleq \{\mathbf{a}_j - \mathbf{p}(\mathbf{a}_j, B) : \mathbf{a}_j \in V(A, B)\}$ характеристических векторов многоугольника A относительно B .

Теорема 1. Пусть заданы произвольный многоугольник A и невыпуклый многоугольник B . Если $A \not\subseteq B$, то справедливо неравенство

$$h(A, \check{B}) \leq h(A, B), \quad (5)$$

где

$$\check{B} = B + \{\mathbf{c}(W(A, B))\}. \quad (6)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что поскольку функция евклидового расстояния до выпуклого множества является выпуклой на всей плоскости, то её строгий максимум на многоугольнике A может достигаться только в его вершинах (подробнее см. [12]). Поэтому можно записать равенства

$$h(A, B) = \max_{j=1,2,\dots,N} \rho(\mathbf{a}_j, B), \quad (7)$$

$$h(A, \check{B}) = \max_{j=1,2,\dots,N} \rho(\mathbf{a}_j, B + \{\mathbf{c}(W(A, B))\}). \quad (8)$$

Из определения множества характеристических векторов и (7) следует, что

$$h(A, B) = \max_{\mathbf{w}_k \in W(A, B)} \|\mathbf{w}_k\|.$$

Для любой вершины $\mathbf{a}_j \in V(A, B)$ из (6) выполняется $(\mathbf{p}(\mathbf{a}_j, B) + \mathbf{c}(W(A, B))) \in \check{B}$. Поэтому с учётом определения чебышёвского центра

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{a}_j, \check{B}) &\leq \|\mathbf{a}_j - (\mathbf{p}(\mathbf{a}_j, B) + \mathbf{c}(W(A, B)))\| = \|\mathbf{w}^* - \mathbf{c}(W(A, B))\| \leq \\ &\leq \|\mathbf{w}_k - \mathbf{0}\| \leq \max_{\mathbf{w}_k \in W(A, B)} \|\mathbf{w}_k\| = h(A, B), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mathbf{w}^* \in W(A, B)$.

С другой стороны, для любой вершины \mathbf{a}_l многоугольника A , для которой $\mathbf{a}_l \notin V(A, B)$, из (6) следует, что $(\mathbf{a}_l + \mathbf{c}(W(A, B))) \in \check{B}$. Поскольку чебышёвский центр замкнутого множества принадлежит его выпуклой оболочке, то его норма не может превышать наибольшую из норм элементов данного множества. Поэтому

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{a}_l, \check{B}) &\leq \|\mathbf{a}_l - (\mathbf{a}_l + \mathbf{c}(W(A, B)))\| = \\ &= \|\mathbf{c}(W(A, B))\| \leq \max_{\mathbf{w}_k \in W(A, B)} \|\mathbf{w}_k\| = h(A, B). \end{aligned} \quad (10)$$

Из оценок (9) и (10) (одна из которых выполняется для любой вершины \mathbf{a}_j , $j = 1, 2, \dots, N$) и равенства (8) вытекает оценка (5). \square

Пример многоугольников A и B и построения вектора, переводящего B в \check{B} , представлен на рис. 2.

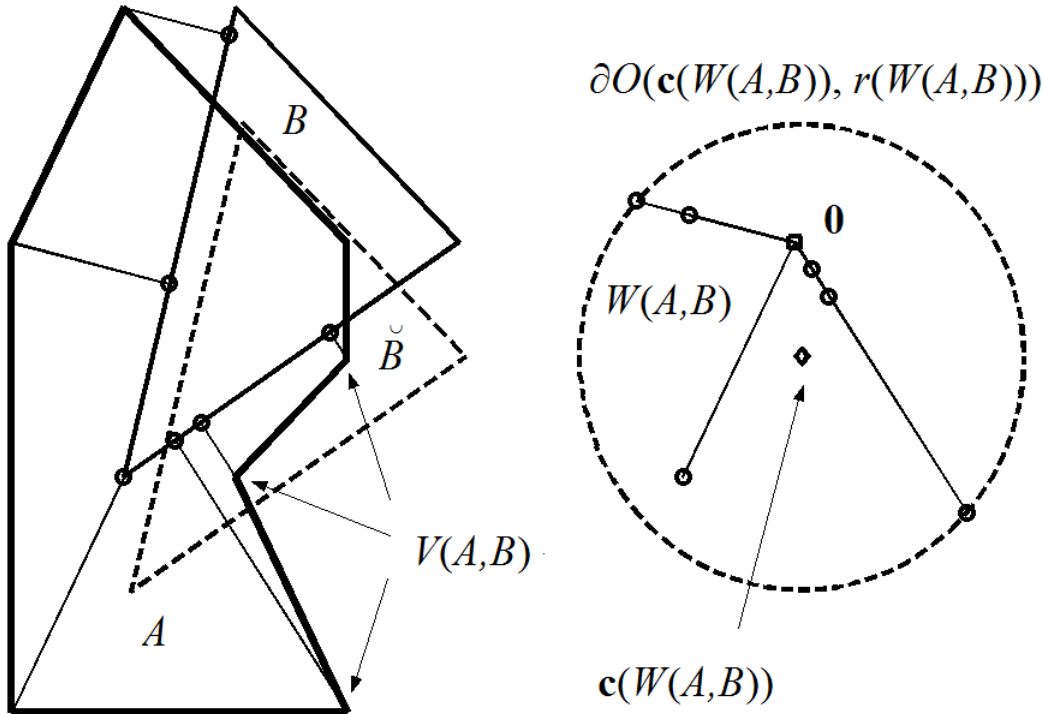


Рис. 2. Пример невыпуклого многоугольника A , выпуклых многоугольников B и \check{B} , множеств $V(A, B)$ и $W(A, B)$, точки $\mathbf{c}(W(A, B))$ и окружности $O(\mathbf{c}(W(A, B)), r(W(A, B)))$

Теорема 1 даёт возможность локально уменьшить отклонение одного произвольного многоугольника от другого выпуклого. Однако актуален вопрос о нахождении

глобального минимума функции хаусдорфова отклонения множества A от компакта B , сдвинутого на произвольный вектор \mathbf{x} : $F(\mathbf{x}) = h(A, B + \{\mathbf{x}\})$. Аналогично формуле (7) или (8) функцию $F(\mathbf{x})$ можно представить как максимум из функций евклидова расстояния от точки до множества:

$$F(\mathbf{x}^*) = \max_{j=1,2,\dots,N} f_j(\mathbf{x}),$$

где $f_j(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{a}_j, B + \{\mathbf{x}\})$, $j = 1, 2, \dots, N$. Функции $f_j(\mathbf{x})$ посредством евклидова расстояния до фиксированного множества можно представить в виде

$$f_j(\mathbf{x}) = \rho((\mathbf{a}_j - \mathbf{x}), B) = \rho(-\mathbf{x}, B - \{\mathbf{a}_j\}) = \rho(\mathbf{x}, \{\mathbf{a}_j\} - B), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Из свойств функции $f(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ известно, что при выпуклом M она выпукла на всей плоскости \mathbb{R}^2 , дифференцируема во всех точках $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus M$, и в них её градиент имеет вид

$$D\rho(\mathbf{x}, M) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}(\mathbf{x}, M)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}(\mathbf{x}, M)\|},$$

подробнее см. [15, гл. II, п. 3]. Следовательно, по построению функций $f_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, \dots, N$, при $f_j(\mathbf{x}) > 0$ имеем

$$Df_j(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{a}_j - \mathbf{p}(\mathbf{a}_j, B + \{\mathbf{x}\})}{\|\mathbf{a}_j - \mathbf{p}(\mathbf{a}_j, B + \{\mathbf{x}\})\|}. \quad (11)$$

Обозначим $I(\mathbf{x}) \triangleq \{j = 1, 2, \dots, N: f_j(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})\}$ — множество номеров тех функций $f_j(\mathbf{x})$, значение которых максимально среди $f_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, \dots, N$. Для функции $F(\mathbf{x})$, представляющей собой максимум из конечного числа функций, справедлива формула субдифференциала (при условии, что $F(\mathbf{x}) > 0$)

$$D^-F(\mathbf{x}) = \text{co} \left(\bigcup_{j \in I(\mathbf{x})} Df_j(\mathbf{x}) \right), \quad (12)$$

где $\text{co}(M)$ означает выпуклую оболочку множества M . Для решения задачи минимизации имеет ключевое значение, что если у функции $F(\mathbf{x})$ определено множество $D^-F(\mathbf{x}^*)$, то для производной

$$\left. \frac{dF(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \triangleq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \frac{F(\mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{g}) - F(\mathbf{x}^*)}{\varepsilon}$$

по любому направлению $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$ выполняется

$$\left. \frac{dF(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \max_{\mathbf{y} \in D^-F(\mathbf{x}^*)} \langle \mathbf{g}, \mathbf{y} \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение векторов, подробнее см. [16]. С учётом (11) можно записать (10) в виде

$$D^-F(\mathbf{x}) = \text{co} \left(\bigcup_{j \in I(\mathbf{x})} \frac{\mathbf{p}(\mathbf{a}_j, (B + \{\mathbf{x}\})) - \mathbf{a}_j}{\|\mathbf{a}_j - \mathbf{p}(\mathbf{a}_j, (B + \{\mathbf{x}\}))\|} \right). \quad (13)$$

Заметим, что для функций $f_j(\mathbf{x})$, которые принимают значение $f_j(\mathbf{x}) = 0$, значения градиентов могут быть не определены, но их номера j не входят в $I(\mathbf{x})$.

Теорема 2. Пусть заданы произвольный многоугольник A и невыпуклый многоугольник B . Для того, чтобы в точке $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^2$ функция $F(\mathbf{x})$ достигала глобального минимума, необходимо, чтобы выполнялось одно из двух условий:

$$A \subseteq (B + \{\mathbf{x}^*\}) \quad (14)$$

или

$$\mathbf{c}(W(A, B + \{\mathbf{x}^*\})) = 0. \quad (15)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $F(\mathbf{x}^*) = 0$, то вложение (14) выполняется по определению хаусдорфова отклонения. Если же $F(\mathbf{x}^*) > 0$, то (14) не выполняется. Покажем, что тогда имеет место (15).

Выпуклая функция $F(\mathbf{x})$ достигает минимума в точке \mathbf{x}^* , тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{0} \in D^-F(\mathbf{x}^*). \quad (16)$$

Заметим, что точек минимума может быть более одной, при этом всё множество точек, на которых достигается минимум, является выпуклым.

Обозначим $W^*(A, B) = \left\{ \mathbf{w}_k^* \in W(A, B) : \|\mathbf{w}_k^*\| = \max_{\mathbf{w} \in W(A, B)} \|\mathbf{w}\| \right\}$ — множество векторов с наибольшей нормой среди $W(A, B)$. Покажем, что если справедливо

$$\mathbf{0} \in \text{co}(W^*(A, B)), \quad (17)$$

то выполняется и равенство

$$\mathbf{0} = \mathbf{c}(W(A, B)). \quad (18)$$

Прежде всего заметим, что из (17) следует, что

$$\mathbf{0} = \mathbf{c}(W^*(A, B)). \quad (19)$$

Обозначим $R = \|\mathbf{w}_k^*\|$, $\mathbf{w}_k^* \in W^*(A, B)$. Действительно, допустим что есть точка $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$, такая что $h(W^*(A, B), \{\mathbf{g}\}) < R$. Из условия (17) следует, что для любой полуплоскости Λ , содержащей начало координат, выполняется $\Lambda \cap W^*(A, B) \neq \emptyset$. Значит, хотя бы один элемент $\mathbf{w}_k^* \in W^*(A, B)$ содержится в $\Lambda = \{\mathbf{y} : \langle \mathbf{y}, \mathbf{g} \rangle \leq 0\}$. Для всех точек полуплоскости Λ , имеющих норму R , в том числе и для \mathbf{w}_k^* , выполняется неравенство $\|\mathbf{g} - \mathbf{w}_k^*\| \geq \sqrt{\|\mathbf{g}\|^2 + R^2}$, поскольку точки \mathbf{g} , $\mathbf{0}$ и \mathbf{w}_k^* являются вершинами остроугольного или прямоугольного треугольника. Значит, $\|\mathbf{g} - \mathbf{w}_k^*\| > R$, т. е. пришли к противоречию.

По построению множеств $W(A, B)$ и $W^*(A, B)$ имеем $h(W^*(A, B), \{\mathbf{0}\}) = R$ и $h(W(A, B), \{\mathbf{0}\}) = R$. Тогда для любой точки $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$ из равенства (19) и вложения $W^*(A, B) \subseteq W(A, B)$ вытекает, что

$$h(W(A, B), \{\mathbf{g}\}) \geq h(W^*(A, B), \{\mathbf{g}\}) \geq R \geq h(W(A, B), \{\mathbf{0}\}).$$

Данное неравенство доказывает (18).

Субдифференциал (13) можно записать через множество $W^*(A, B + \{\mathbf{x}\})$ как

$$D^-F(\mathbf{x}) = \text{co}(-W^*(A, B + \{\mathbf{x}\})).$$

Условие (16) означает, что для множества $W^*(A, B + \{\mathbf{x}\})$ имеет место включение $\mathbf{0} \in \text{co}(-W^*(A, B + \{\mathbf{x}\}))$, а значит, и $\mathbf{0} \in W^*(A, B + \{\mathbf{x}\})$. Стало быть, выполняется (15). \square

Замечание 1. При реализации программного комплекса требуется отслеживание корректности предложенных алгоритмов параллельного сдвига многоугольников, потому что в некоторых очень специфических и тем не менее встречающихся на практике случаях алгоритмы могут быть неустойчивыми и выходить на циклы. Пусть, например, неподвижный многоугольник A — квадрат с набором вершин $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$; а подвижный B — прямоугольник с набором вершин $(1, 1), (0, 1), (0, -1), (1, -1)$. Множество лежащих вне B вершин многоугольника A состоит из двух точек $V(A, B) = \{(-1, 1), (-1, -1)\}$. Множество характеристических векторов состоит из двух совпадающих элементов $W(A, B) = \{(-1, 0), (-1, 0)\}$. Вектор сдвига равен $(-1, 0)$ — чебышёвскому центру множества $W(A, B)$. Многоугольник \check{B} , полученный по формуле (6), имеет вершины $(0, 1), (-1, 1), (-1, -1), (0, -1)$. Неравенство (5) выполняется, но не строго, а как равенство $h(A, B) = h(A, \check{B}) = 1$. Более того, если применить к многоугольникам A и \check{B} снова формулу (6), то получится многоугольник, который совпадает с B . В подобных случаях в алгоритмы вводится некоторый демпфирующий коэффициент $\xi \in (0, 1)$. Координаты нового многоугольника \check{B} вычисляются по формуле

$$\check{B} = B + \xi \{ \mathbf{c}(W(A, B)) \},$$

которая стабилизирует алгоритм, при этом происходит уменьшение скорости его работы.

2.2. Методы поворота

Рассмотрим поворот многоугольника B с центром в заданной точке \mathbf{b} на угол φ против часовой стрелки. Будем обозначать получившийся многоугольник так:

$$\text{rotation}(B, \mathbf{b}, \varphi) \triangleq \{\mathbf{b}\} + \Pi(\varphi)(B - \{\mathbf{b}\}), \quad (20)$$

а хаусдорфово отклонение как

$$\chi(\varphi) = h(A, \text{rotation}(B, \mathbf{b}, \varphi)). \quad (21)$$

Предложение 1. Функция $\chi(\varphi)$ липшицева на множестве $[-\pi, \pi]$ с константой Липшица

$$L = h(B, \{\mathbf{b}\}). \quad (22)$$

Доказательство. Рассмотрим два произвольных значения угла $\varphi_1, \varphi_2 \in [-\pi, \pi]$. Покажем, что выполняется оценка

$$|\chi(\varphi_2) - \chi(\varphi_1)| \leq L|\varphi_2 - \varphi_1|. \quad (23)$$

Полагаем без ограничения общности, что $\chi(\varphi_2) \geq \chi(\varphi_1)$. Обозначим многоугольники, получающиеся за счёт вращения B по формуле (20):

$$\vec{B} = \{\mathbf{b}\} + \Pi(\varphi_1)(B - \{\mathbf{b}\}), \quad \overleftarrow{B} = \{\mathbf{b}\} + \Pi(\varphi_2)(B - \{\mathbf{b}\}).$$

По построению

$$h(\vec{B}, \{\mathbf{b}\}) = h(\overleftarrow{B}, \{\mathbf{b}\}) = L. \quad (24)$$

Из формулы (20) следует, что

$$\forall \mathbf{a} \in A \exists \vec{\mathbf{b}} \in \vec{B}: \|\mathbf{a} - \vec{\mathbf{b}}\| \leq \chi(\varphi_1). \quad (25)$$

Поскольку многоугольник \overleftarrow{B} получается из \overrightarrow{B} поворотом на угол $\varphi_2 - \varphi_1$, то в \overleftarrow{B} содержится точка $\overleftarrow{\mathbf{b}} = \text{rotation}(\overrightarrow{\mathbf{b}}, \mathbf{b}, \varphi_2 - \varphi_1)$. При этом для радиуса R окружности с центром в \mathbf{b} , на которой лежат точки $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ и $\overleftarrow{\mathbf{b}}$, имеет место оценка из равенств (24) $R \leq L$. Поскольку длина $\|\overrightarrow{\mathbf{b}} - \overleftarrow{\mathbf{b}}\|$ хорды $[\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overleftarrow{\mathbf{b}}]$, соединяющей две точки $\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overleftarrow{\mathbf{b}}$, на окружности $\partial O(\mathbf{b}, R)$, не превышает длину $R|\varphi_2 - \varphi_1|$ дуги данной окружности между ними, то $\|\overrightarrow{\mathbf{b}} - \overleftarrow{\mathbf{b}}\| \leq R|\varphi_2 - \varphi_1| \leq L|\varphi_2 - \varphi_1|$. Из полученной оценки, утверждения (25) и неравенства треугольника получается

$$\forall \mathbf{a} \in A \exists \overleftarrow{\mathbf{b}} \in \overleftarrow{B}: \|\mathbf{a} - \overleftarrow{\mathbf{b}}\| \leq \chi(\varphi_1) + L|\varphi_2 - \varphi_1|. \quad (26)$$

В силу определения хаусдорфова отклонения выполняется неравенство $h(A, \overleftarrow{B}) \leq h(A, \overrightarrow{B}) + L|\varphi_2 - \varphi_1|$, а с учётом принятого допущения о том, что $h(A, \overleftarrow{B}) \geq h(A, \overrightarrow{B})$, из (26) следует (23). Таким образом, выполняется равенство (22). \square

Предложение 1 даёт основание для вывода, что в качестве центра вращения многоугольника B с целью минимизации L лучше всего выбрать точку $\mathbf{c}(B)$. Тогда по формуле (22) выполняется $L = r(B)$, что улучшает свойства алгоритма. Заметим, что использование функции (21) может быть очень затратным в плане ресурсов при решении оптимизационной задачи. В частности, функция может иметь любое конечное число экстремумов и точек негладкости на отрезке $[-\pi, \pi]$, что обусловлено тем, что при различных положениях многоугольника (20) разные вершины из набора $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^N$ оказываются наиболее удалёнными от него. Поэтому минимизация функции $\chi(\varphi)$ реализована пошаговыми итерационными методами.

В рамках программного комплекса реализован следующий алгоритм. В начале работы требуется задать параметры φ_0 — максимально допустимый угол поворота, $\delta\varphi$ — предельная точность по углу. Предполагается, что $A \not\subseteq B$ (иначе задача становится тривиальной).

Алгоритм 1.

1. Вычисление $\mathbf{b} := \mathbf{c}(B)$.
2. Запись $B^{(0)} := B$, вычисление $h^{(0)} := h(A, B^{(0)})$.
3. Установка счётчика итераций $k := 0$.
4. Запись текущего значения угла поворота $\varphi := (-1)^k \varphi_0 / 2^k$.
5. Инкремент счётчика $k := k + 1$.
6. Построение многоугольника $B^{(k)} := \text{rotation}(B, \mathbf{b}, \varphi)$.
7. Вычисление $h^{(k)} := h(A, B^{(k)})$.
8. Если $h^{(k)} < h^{(0)}$, то запись $k^* := k$ и переход к пункту 10.
9. Если $|\varphi| < \delta\varphi$, то запись $k^* := 0$ и переход к пункту 10.
10. Переход к пункту 4.
11. Запись в качестве нового значения многоугольника $\tilde{B} := B^{(k^*)}$, найденного на итерации с номером k^* .

При работе алгоритма хаусдорфова отклонение вычисляется путём перебора вершин по формуле (7). Алгоритм таков, что за конечное число k итераций строит новый многоугольник \tilde{B} , для которого

$$h(\tilde{B}, A) \leq h(B, A). \quad (27)$$

При этом строгое равенство достигается только в том случае, если $\tilde{B} = B$. Знание угла поворота φ и числа итераций на последнем шаге даёт возможность скорректировать параметры φ_0 и $\delta\varphi$ при следующем запуске алгоритма. Пример многоугольников A и B , а также многоугольника \tilde{B} , полученного в результате работы алгоритма 1, показаны на рис. 3. Результаты моделирования соответствуют оценке (27).

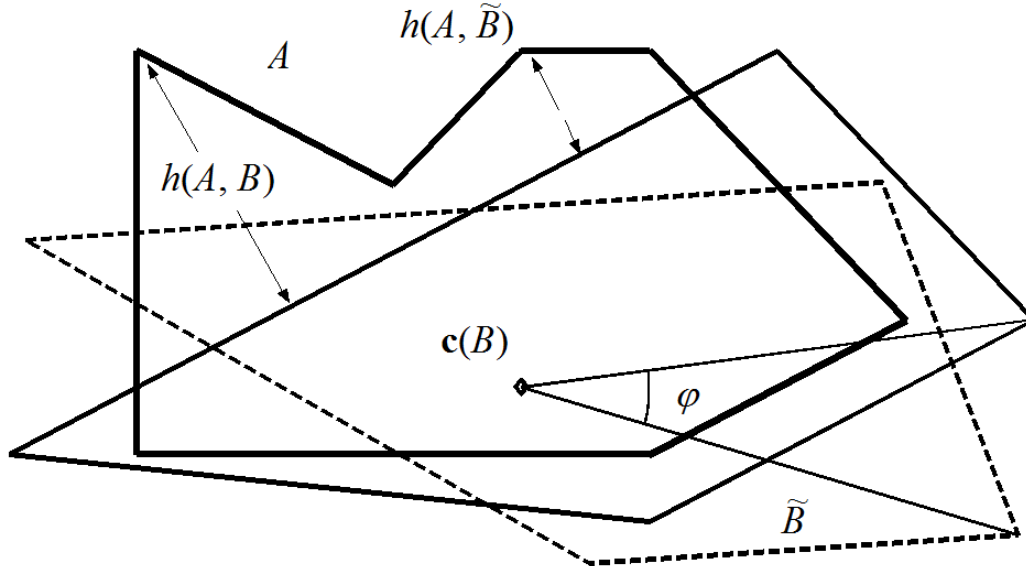


Рис. 3. Пример невыпуклого многоугольника A , выпуклого многоугольника B и построенного по ним с помощью алгоритма 1 многоугольника \tilde{B}

3. Результаты моделирования

Авторами разработан программный комплекс итерационного изменения координат набора подвижных многоугольников B_i , $i = 1, 2, \dots, n$, с целью минимизации хаусдорфова отклонения заданной арены A от этого набора. Для его реализации используется среда MATLAB. Его основу составляет процедура разбиения множества A на обобщённые зоны Дирихле, аппроксимация их невыпуклыми в общем случае многоугольниками A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, и последующие процедуры сдвига множеств B_i , $i = 1, 2, \dots, n$, в направлении, заданном теоремой 1, и поворота с помощью алгоритма 1. Проверка того, насколько положение полученных многоугольников \hat{B}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, близко к локально оптимальному, выполняется с помощью теоремы 2. Для отыскания глобального минимума величины (1) предусмотрена возможность многократного запуска программного комплекса с внесением стохастических изменений \mathbf{y}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, в координаты многоугольников (но ограниченных по модулю так, чтобы выполнялись условия $(B_i + \{\mathbf{y}_i\}) \cap A \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \dots, n$). Также есть опция стохастического поворота многоугольников B_i , $i = 1, 2, \dots, n$, на углы $\tilde{\varphi}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим конкретную задачу. Пусть задана арена — многоугольник A с набором вершин $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^4 = \{(-4, -3), (-4, 3), (4, 3), (4, -3)\}$. Также заданы три подвижных многоугольника: B_1 с набором вершин

$$\{\mathbf{b}_i^{(1)}\}_{i=1}^3 = \{(-2.5, 2), (-3, 0.5), (-1.5, 0.5)\},$$

B_2 с набором вершин $\{\mathbf{b}_i^{(2)}\}_{i=1}^4 = \{(0 - 1.5), (-0.5, -0.5), (-1.5, -2), (-1, -2)\}$, и B_3 с набором вершин $\{\mathbf{b}_i^{(3)}\}_{i=1}^3 = \{(0, 1), (0, 0), (1, -0)\}$. Требуется найти такие векторы X^* и углы Φ^* , чтобы величина (1) при $n = 3$ была минимальной.

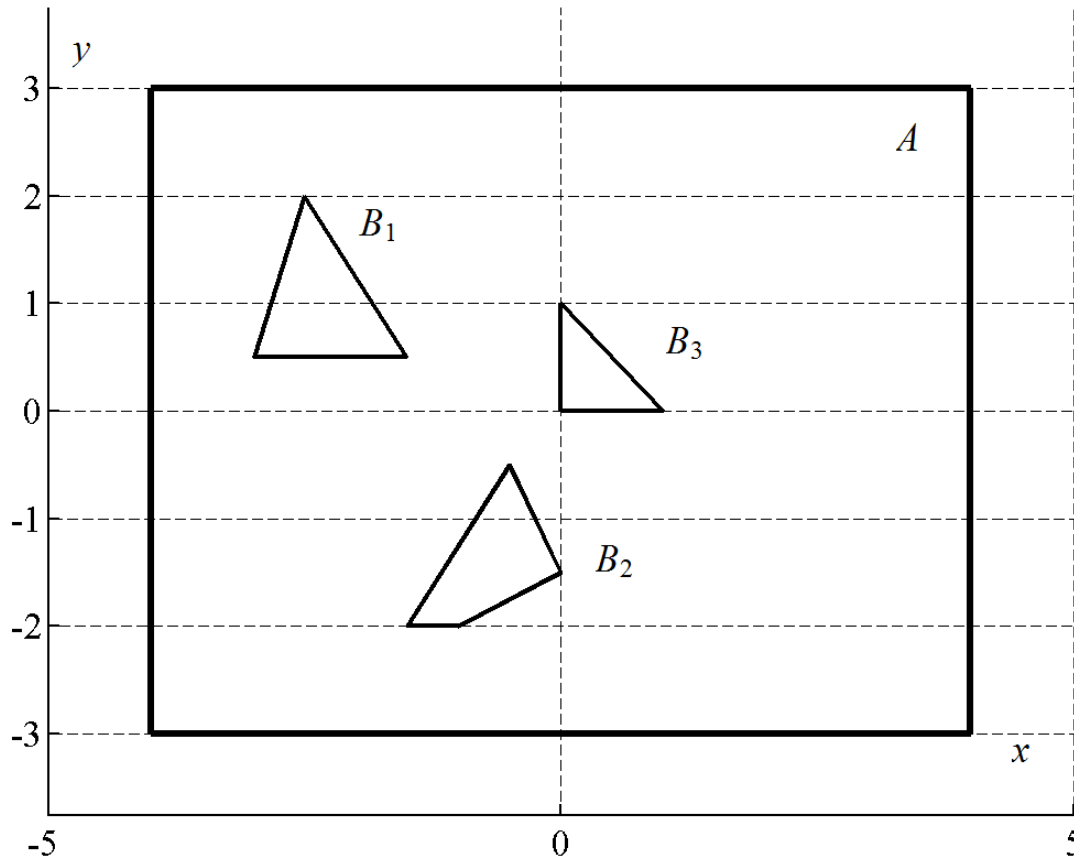


Рис. 4. Начальное расположение многоугольников A и B_i , $i = 1, 2, 3$

Для изначального расположения многоугольников имеет место равенство $h(A, \bar{B}) = 4.2426$. Множества A и B_i , $i = 1, 2, 3$, показаны на рис. 4.

Решение ищется с помощью многократного запуска программного комплекса. Получены массивы, задающие перемещение подвижных многоугольников: $\Phi^* = \{-3.0829, -2.4199, 3.1226\}$, $X^* = \{(-5.935, -1.642), (1.5576, -1.452), (1.797, 1.883)\}$. Хаусдорфово отклонение арены A от объединения $\bar{B}(\Phi^*, X^*)$ фигур, полученных путём поворота и параллельного перемещения фигур B_i , $i = 1, 2, 3$, равно $h(A, \bar{B}(\Phi^*, X^*)) \approx 2.4803$. Результаты моделирования показаны на рис. 5. На рисунке обозначены многоугольник A , многоугольники \hat{B}_i , $i = 1, 2, 3$, границы ε -окрестностей многоугольников \hat{B}_i , $i = 1, 2, 3$, в объединение которых по формуле (2) вложено A . В данном случае $\varepsilon = 2.4803$.

Для решения примера выполнено 17 запусков программного комплекса. Время работы комплекса составляло 3–4 минуты на каждый запуск, включая генерацию стохастического изменения координат многоугольников.

4. Заключение

В рамках исследований описаны и обоснованы алгоритмы минимизации хаусдорфова отклонения заданного выпуклого многоугольника A от объединения выпуклых многоугольников B_i , $i = 1, 2, \dots, n$, которые можно параллельно передвигать и вращать. Их основу составили схема разбиения множества A на области влияния текущих подвижных многоугольников и итерационные процедуры изменения координат каждого из этих многоугольников. Доказаны теоремы 1 и 2 о минимизации хаусдорфова отклонения $h(A_i, B_i)$ обобщённой зоны Дирихле A_i от порождающего её выпуклого компакта B_i посредством плоскопараллельного движения B_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Доказано предложение 1 о свойствах функции $h(A_i, B_i)$ при

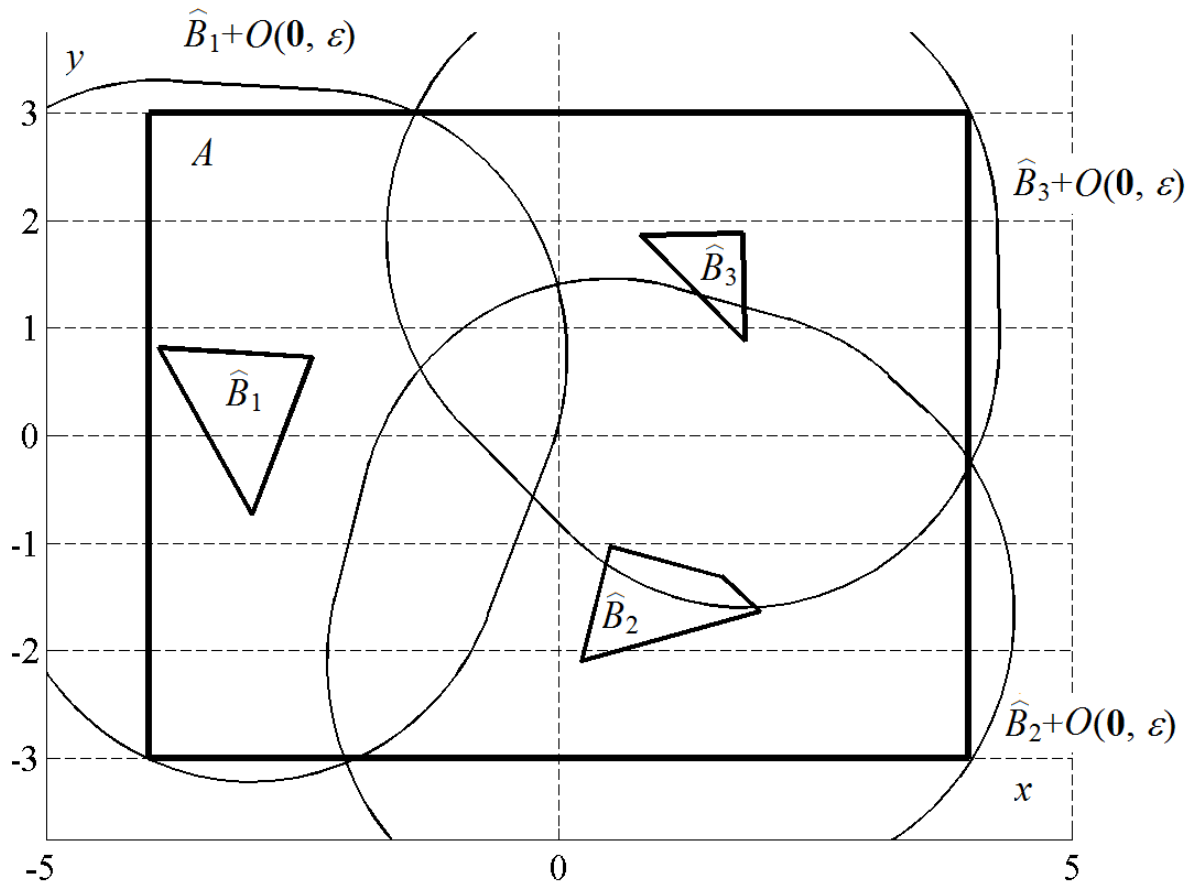


Рис. 5. Итоговое расположение многоугольников A и \widehat{B}_i , $i = 1, 2, 3$, и их окрестностей $\widehat{B}_i + O(\mathbf{0}, \varepsilon)$, $i = 1, 2, 3$

вращении компакта B_i . Проведено моделирование решения задачи об оптимизации положения трёх подвижных многоугольников при заданной арене — прямоугольнике.

Список литературы

1. **Бронштейн, Е. М.** Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками / Е. М. Бронштейн // *Соврем. математика. Фунд. направления.* — 2007. — Т. 22. — С. 5–37.
2. **Huttenlocher, D. P.** Comparing images using the Hausdorff distance / D. P. Huttenlocher, G. A. Klanderman, W. J. Rucklidge // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.* — 1993. — Vol. 15, no. 9. — P. 850–863.
3. **Gruber, P. M.** Approximation by convex polytopes / P. M. Gruber // *Polytopes: Abstract, Convex and Computational*, NATO ASI Series (Series C: Mathematical and Physical Sciences), eds. T. Bisztriczky, P. McMullen, R. Schneider, A. I. Weiss. — 1994. — Vol. 440. — P. 173–203.
4. **Хаусдорф, Ф.** Теория множеств / Ф. Хаусдорф. — М.: Комкнига, 2006. — 304 с.
5. **Lakhtin, A. S.** Minimization of Hausdorff distance between convex polyhedrons / A. S. Lakhtin, V. N. Ushakov // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2005. — Vol. 126, no. 6. — P. 1553–1560.
6. **Ушаков, В. Н.** Оптимизация хаусдорфова расстояния между множествами в евклидовом пространстве / В. Н. Ушаков, А. С. Лахтин, П. Д. Лебедев // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* — 2014. — Т. 20, № 3. — С. 291–308.
7. **Брусов, В. С.** Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости / В. С. Брусов, С. А. Пиявский // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* — 1971. — Т. 11, № 2. — С. 304–312.

8. **Лебедев, П. Д.** Конструирование негладкого решения задачи управления по быстродействию при низком порядке гладкости границы целевого множества / П. Д. Лебедев, А. А. Успенский // Тр. Ин-та математики и механики. — 2019. — Т. 25, № 1. — С. 108–119.
9. **Лебедев, П. Д.** Программа построения волновых фронтов и функции евклидова расстояния до компактного невыпуклого множества / П. Д. Лебедев, А. А. Успенский. — Свид-во о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2017662074 от 27.10.2017.
10. **Siersma, D.** Properties of conflict sets in the plan / D. Siersma // Banach Center Publications. — 1999. — Vol. 50. — P. 267–276.
11. **Ушаков, В. Н.** Итерационные методы минимизации хаусдорфова расстояния между подвижными многоугольниками / В. Н. Ушаков, П. Д. Лебедев // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютер. науки. — 2017. — Т. 27, вып. 1. — С. 86–97.
12. **Половинкин, Е. С.** Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е. С. Половинкин, М. В. Балашов. — М. : Физматлит, 2004. — 416 с.
13. **Гаркави, А. Л.** О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества / А. Л. Гаркави // Успехи мат. наук. — 1964. — Т. 19, вып. 6. — С. 139–145.
14. **Алимов, А. Р.** Чебышёвский центр множества, константа Юнга и их приложения / А. Р. Алимов, И. Г. Царьков // Успехи мат. наук. — 2019. — Т. 74, вып. 5. — С. 3–82.
15. **Пшеничный, Б. Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б. Н. Пшеничный. — М. : Наука, 1980. — 320 с.
16. **Демьянов, В. Ф.** Недифференцируемая оптимизация / В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев. — М. : Наука, 1981. — 384 с.

Поступила в редакцию 19.03.2020

После переработки 10.05.2020

Сведения об авторах

Лебедев Павел Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия; старший научный сотрудник лаборатории «Теория управления», Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия; e-mail: pleb@yandex.ru.

Успенский Александр Александрович, доктор физико-математических наук, заведующий сектором, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия; старший научный сотрудник лаборатории «Теория управления», Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия; e-mail: uspen@imm.uran.ru.

Ушаков Владимир Николаевич, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия; e-mail: ushak@imm.uran.ru.

ALGORITHMS OF MINIMIZATION OF HAUSDORFF DEVIATION OF A CONVEX COMPACT FROM A SET OF MOVABLE CONVEX POLYGONS

P.D. Lebedev^{1,2,a}, A.A. Uspenskii^{1,2,b}, V.N. Ushakov^{1,b}

¹*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia*

²*Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin,
Yekaterinburg, Russia*

^a*pleb@yandex.ru*, ^b*uspen@imm.uran.ru*, ^c*ushak@imm.uran.ru*

We study the problem of finding the optimal location of a set of moving figures within the boundaries of a given convex set (arena) on the plane. The optimality criterion was chosen to minimize the Hausdorff deviation of the arena from the union of these moving objects. Numerical algorithms are proposed for solving the problem, based on dividing the arena into areas of influence of the figures (into generalized Dirichlet zones) and finding the optimal position of each of them within the boundaries of its area. When creating the algorithms, non-smooth optimization methods and the constructions of the geometric theory of approximations were used. A numerical simulation of the solution of the problem is performed for the case of three moving convex polygons.

Keywords: *Hausdorff deviation, convex set, Chebyshev center, minimization, subdifferential.*

References

1. **Bronshtein E.M.** Approximations of convex sets by polytops. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya* [Contemporary Mathematics. Fundamental Directions], 2007, vol. 22, pp. 5–37. (In Russ.).
2. **Huttenlocher D.P., Klanderman G.A., Rucklidge W.J.** Comparing images using the Hausdorff distance. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1993, vol. 15, no. 9, pp. 850–863.
3. **Gruber P.M.** Approximation by convex polytopes. *Polytopes: Abstract, Convex and Computational, NATO ASI Series (Series C: Mathematical and Physical Sciences)*, eds. T. Bisztriczky, P. McMullen, R. Schneider, A.I. Weiss, 1994, vol. 440, pp. 173–203.
4. **Hausdorff F.** *Teoriya mnozhestv* [Set theory]. Moscow, Komkniga Publ., 2006. 304 p. (In Russ.).
5. **Lakhtin A.S., Ushakov V.N.** Minimization of Hausdorff distance between convex polyhedrons. *Journal of Mathematical Sciences*, 2005, vol. 126, no. 6, pp. 1553–1560.
6. **Ushakov V.N., Lakhtin A.S., Lebedev P.D.** Optimization of the Hausdorff distance between sets in Euclidean space. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. 222–238.
7. **Brusov V.S., Piyavskii S.A.** Vychislitel'nyy algoritm optimal'nogo pokrytiya oblastey ploskosti [A computational algorithm for optimally covering a plane region], *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1971, vol. 11, iss. 2, pp. 17–27. (In Russ.).
8. **Lebedev P.D., Uspenskii A.A.** Konstruirovaniye negladkogo resheniya zadachi upravleniya po bystrodeystviyu pri nizkom poryadke gladkosti granitsy tselevogo mnozhestva [Construction of a nonsmooth solution in a time-optimal problem with a low order of smoothness of the target set boundary]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of RAS], 2019, vol. 25, no. 1, pp. 108–119. (In Russ.).

9. **Lebedev P.D., Uspenskii A.A.** Programma postroyeniya volnovykh frontov i funktsiy yevklidova rasstoyaniya do kompaktnogo nevyuklogo mnozhestva. *Program for constructing wave fronts and functions of the Euclidean distance to a compact nonconvex set*. Certificate of state registration of the computer program no. 2017662074, October 27, 2017.
10. **Siersma D.** Properties of conflict sets in the plan. *Banach Center Publications*, 1999, vol. 50, pp. 267–276.
11. **Ushakov V.N., Lebedev P.D.** Iteratsionnye metody minimizatsii khausdorfova rasstoyaniya mezhdru podvizhnymi mnogougol'nikami [Iterative methods for minimization of the Hausdorff distance between movable polygons]. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki* [Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Sciences, 2017, vol. 27, iss.1, pp. 86–97. (In Russ.).
12. **Polovinkin E.S., Balashov M.V.** *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza* [Elements of convex and strong convex analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 416 p. (In Russ.).
13. **Garkavi A.L.** O chebyshevskom tsentre i vypukloy obolochke mnozhestva [On the Chebyshev center and convex hull of a set]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Advances in Mathematical Sciences], 1964, vol. 19, no. 6, pp. 139–145. (In Russ.).
14. **Alimov A.R., Tsar'kov I.G.** Chebyshev centres, Jung constants, and their applications. *Russian Mathematical Surveys*, 2019, vol. 74, no. 5, pp. 3–82.
15. **Pshenichnyi B.N.** *Vypuklyy analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex analysis and extremal problems]. Nauka, Moscow, 1980. (In Russ.).
16. **Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V.** *Nondifferentiable Optimization*. Springer-Verlag, New York, 1985. xvii+452 p.

Accepted article received 19.03.2020

Corrections received 10.05.2020