МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2020. Т. 5, вып. 2. С. 211–217.

УДК 517.9+519.62+621.396 DOI: 10.24411/2500-0101-2020-15208

ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ ФЕЙЕРА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ АНТЕННЫ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОГО СИНТЕЗА

В. А. Костин[1,a], **Д. В. Костин**[1,2,b], **А. В. Костин**[1,c]

[1] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
[2] *АО «Концерн "Созвездие"», Воронеж, Россия*
[a] *vlkostin@mail.ru*, [b] *kostindv605@gmail.com*, [c] *leshakostin@mail.ru*

Впервые решается задача амплитудно-фазового синтеза для линейной антенны с диаграммой направленности, представляемой ядром Фейера. Выясняется, что конструкция таких диаграмм направленности сочетает в себе как интерполяционные возможности полиномов Эрмита, применяемые для этой цели в работах П. К. Суетина, так и аппроксимационные свойства тригонометрических сумм, являющихся Фурье-образом атомарных функций, указанных в работах В. Ф. Кравченко.

Ключевые слова: *сумма Фейера, ортогональный многочлен, диаграмма направленности, линейная антенна, задача амплитудно-фазового синтеза.*

Введение

В важной для математиков монографии «Начала математической теории антенн» [1] П. К. Суетиным рассматривается интегральное уравнение прямолинейной антенны

$$f(\theta) = \int_{-a}^{a} e^{-Ki\xi\cos\theta} e^{i\psi(\xi)} \rho(\xi) d\xi, \quad 0 < \theta < \pi, \tag{1}$$

означающее, что антенна расположена на сегменте $[-a, a]$, называемом апертурой антенны, $\rho(\xi)$ — амплитудное распределение на этом сегменте, $\psi(\xi)$ — фазовое распределение, $K = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны, $i = \sqrt{-1}$. Функция $f(\theta)$, называемая диаграммой направленности антенны (ДН), распределяет энергию радиоизлучения в зависимости от угла θ.

Теоретически допустимая по Суетину ДН должна удовлетворять условиям, которые в [1] называются интерполяционными и определяются следующим образом. В заданной системе точек $\{\theta_m\}$, $\{\tau_m\}$, таких, что справедливы неравенства

$$0 < \theta_1 < \tau_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_m < \tau_m < \theta_{m+1} < \cdots < \theta_{n-1} < \tau_{n-1} < \pi, \tag{2}$$

на ДН накладываются условия

$$\begin{gathered} f(\theta_m) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, n; \\ f(\tau_m) = M_m e^{i\varphi_m}, \quad m = 1, 2, \ldots, n-1; \\ f'(\tau_m) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, n-1, \end{gathered} \tag{3}$$

означающие, что по направлениям $\{\theta_m\}$ радиоизлучение не происходит, а вся энергия направляется по углам $\{\tau_m\}$.

Среди точек $\{\tau_m\}$ выбирается одна главная точка τ_p, которая определяет главное направление радиоизлучения в соответствии с неравенствами

$$M_1 < M_2 < \cdots < M_{p-1} < M_p > M_{p+1} > \cdots > M_{n-1}. \tag{4}$$

Для построения таких функций в [1] используются интерполяционные многочлены Эрмита [2], и в уравнении (1) в качестве $f(\theta)$ берётся соответствующий полином $f_n(\theta)$. Для этого уравнения рассматривается задача амплитудно-фазового синтеза, в которой $f(\theta)$ известна и требуется определить одну или обе функции $\Psi(\xi)$ и $\rho(\xi)$.

Однако при решении этой задачи нельзя непосредственно применять напрашивающееся преобразование Фурье, так как функция $f(\theta)$ должна удовлетворять соответствующим условиям сходимости. Для этого в [1] вводится стабилизирующий множитель, обеспечивающий корректную разрешимость задачи.

Другой подход конструирования ДН применяется в [3, с. 330]. Здесь ДН рассматривается как реализация интеграла (1) при $\Psi(\xi) = 0$, и распределение тока $\rho(\xi)$ выражается через атомарные функции $up(\xi)$. В этом случае ДН имеет вид

$$f(\theta) = Up(a,\theta) \sum_{m=-n}^{n} C_m \exp\left(-im\frac{a}{2p}\theta\right),$$

где $Up(a,\theta)$ — образ Фурье функции $up(\xi)$ играет роль стабилизирующего множителя, а коэффициенты C_n определяют выбор параметров ДН.

В настоящей работе на примере тригонометрической суммы Фейера, оптимизационные свойства которой показаны в [4], и стабилизирующего множителя Суетина строится и изучается ДН Фейера, с которой даётся решение задачи амплитудно-фазового синтеза.

1. Диаграмма направленности Фейера

При произвольном натуральном n и $\theta \in (0, \pi)$ будем рассматривать тригонометрическую сумму

$$f_n(\theta) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^m (n+1-m)\cos(2m\theta) + \frac{n+1}{2}. \tag{5}$$

Покажем, что эта функция удовлетворяет всем условиям (2)–(4). Для этого укажем на следующие её свойства.

1. Замена $\theta = \frac{t+\pi}{2}$, $t \in [-\pi, \pi]$, приводит $f_n(\theta)$ к $F_n(t)$ и имеет вид

$$f_n(\theta) = f_n\left(\frac{t+\pi}{2}\right) = F_n(t) = \sum_{m=1}^{n}(n+1-m)\cos(mt) + \frac{n+1}{2} = \sigma_n(t) + \frac{n+1}{2}. \tag{6}$$

2. Используя формулу Фейера [5, с. 69]

$$\sum_{m=-(n+1)}^{n+1}(n+1-m)e^{imt} = (n+1) + 2\sum_{m=1}^{n}(n+1-m)\cos mt = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2,$$

получаем представление для $F_n(t)$ в виде ядра Фейера

$$F_n(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2. \tag{7}$$

Из (7) следует представление Валле-Пуссена [6, с. 144]

$$F_n(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{(n+1)t}{2}}{(t+2k\pi)^2}.$$

3. Из (6) следуют оценки

$$0 \le F_n(t) \le \frac{(n+1)^2}{2}.$$

При этом максимум достигается при $t = 0$. Для оценки максимумов функции $F_n(t)$ в других точках будем её в силу чётности рассматривать только при $t \in (0, \pi)$. Из (7) следует представление её нулей

$$t_k = \frac{2k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

где $[a]$ — целая часть числа a, и равное расстояние между ними

$$t_{k+1} - t_k = \frac{2\pi}{n+1}.$$

Так как $F_n(t) \ge 0$ и её нули имеют кратность 2, то они являются и точками минимума. При этом точки максимума $\tau_k \in (t_k, t_{k+1})$ расположены в этом интервале ровно по одной. И для оценки высоты лепестков ДН необходимо оценить значение функции $F_n(t)$ при $t = \tau_k$.

2. Оценка высоты лепестков ДН

Для оценки высоты k-го лепестка ДН $f_n(\theta)$ установим границы значений величин

$$M_k = \max_{\theta \in (\theta_k, \theta_{k+1})} f_n(\theta) = \max_{t \in (t_k, t_{k+1})} F_n(t), \quad \theta_k = \frac{t_k + \pi}{2}.$$

С этой целью покажем справедливость неравенств для $x \in (0, \pi/2)$ и $q = \pi/4 - 1/2$

$$x - q \le \sin^2 x \le \frac{2x}{\pi}, \ \text{если}\, x \in \left[q, \frac{\pi}{4}\right], \tag{8}$$

$$\frac{2x}{\pi} \le \sin^2 x \le x - q, \ \text{если}\, x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{9}$$

Для доказательства рассмотрим при $x \in (0, \pi/2]$ функции $g(x) = \sin^2 x$, $h_1(x) = 2x/\pi$, $h_2(x) = x - q$, которые монотонно возрастают и при $x = \pi/4$ совпадают:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = h_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = h_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

При этом, в силу выпуклости вверх функции $g(x)$, при $x \ge \pi/4$ имеет место неравенство

$$h_1(x) \le g(x). \tag{10}$$

Если же $q \le x \le \pi/4$, то в силу выпуклости вниз функции $g(x)$ справедливо неравенство

$$g(x) \le h_2(x). \tag{11}$$

Из (10) и (11) следуют неравенства (8), (9), следствием которых при $x = t/2$ являются оценки

$$\frac{1}{t-2q} \le \frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} \le \frac{\pi}{2t}, \text{ если } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \tag{12}$$

$$\frac{1}{t-2q} \ge \frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} \ge \frac{\pi}{2t}, \text{ если } t \in \left[2q, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{13}$$

Замечание 1. В случае $t = t_k = \frac{2\pi k}{n+1} \le 2q$ можно считать, что

$$\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} \sim \frac{2}{t_k^2} = \frac{2(n+1)^2}{(\pi k)^2}. \tag{14}$$

Далее отметим, что при $t \neq 0$ справедливо неравенство

$$F_n(t) \le \frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Константа $1/2$ здесь точная, так как она достигается в точках

$$\tau_k = \frac{1}{2}(t_k + t_{k+1}) = \frac{(2k+1)\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Кроме того, так как функция $\sin^2\frac{t}{2}$ возрастает при $t \in (0, \pi]$, то для $t \in (t_k, t_{k+1})$ имеем оценки

$$\frac{1}{2\sin^2\frac{(k+1)\pi}{n+1}} \le \max_{t\in(t_k,t_{k+1})} F_n(t) \le \frac{1}{2\sin^2\frac{\pi k}{n+1}}. \tag{15}$$

Таким образом, неравенства (12)–(15) позволяют оценить величину

$$M_k = \max_{t\in[t_k,t_{k+1}]} F_n(t),$$

определяющую длину k-го лепестка ДН антенны.

3. Каноническая форма диаграммы направленности Фейера и некоторые её свойства

В [1, с. 15] рассматривается каноническое представление уравнения (1), которое после замены

$$\xi = ax, \quad \theta = \arccos\left(-\frac{t}{ak}\right)$$

приводится к виду

$$F(t) = \int_{-1}^{1} e^{ixt} e^{i\phi(x)} R(x)dx.$$

В этом уравнении функция $F(t)$ — диаграмма направленности антенны в каноническом виде, $R(x)$ — амплитудное распределение, $\phi(x)$ — фазовое распределение. При этом $aK = 2\pi a/\lambda = b$, $k = 2\pi/\lambda$, $t \in [-b, b]$, K — волновое число, λ — длина волны, $2a$ — длина антенны.

В случае ДН $f(\theta)$ вида (5) функция $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = F_n(t) = f\left(\arccos\left(-\frac{t}{ak}\right)\right) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^m (n+1-m) \cos 2m \left[\arccos\left(-\frac{t}{ak}\right)\right] +$$

$$+\frac{n+1}{2} = \sum_{m=1}^{n}(-1)^m(n+1-m)T_{2m}\left(-\frac{t}{ak}\right) + \frac{n+1}{2}, \tag{16}$$

где $T_{2m}(\cdot)$ — ортогональные многочлены Чебышёва 1-го рода. И, таким образом, $F_n(t)$ является полиномом степени $2n$ с сохранением свойств теоретической диаграммы направленности.

Отсюда в силу утверждения [1, с. 35] следует формула обращения

$$e^{i\Phi(x)}R(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}F_n(t)\left(\frac{n+1}{t}\sin\frac{t}{n+1}\right)^{n+1} dt, \tag{17}$$

показывающая, что задача амплитудно-фазового синтеза со стабилизирующим множителем

$$A_n(t) = \left(\frac{2n+1}{t}\sin\frac{t}{2n+1}\right)^{2n+1}$$

имеет решение при любом многочлене $F_n(t)$ вида (16), который в нашем случае существенно отличается от интерполяционных многочленов, используемых в [1] в аналогичном случае.

Записывая (17), с учётом чётности функции $T_{2m}\left(\frac{t}{2a}\right)A_n(t)$ получим

$$[\cos\Phi(x) + i\sin\Phi(x)]R(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\left[\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(n+1-m)T_{2m}\left(-\frac{t}{ak}\right) + \frac{n+1}{2}\right]A_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(n+1-m)\int\limits_{0}^{\infty}\cos(xt)\cdot T_{2m}\left(\frac{t}{ak}\right) + \frac{n+1}{2}\right]A_{2k+1}(t)dt = G_n(x),$$

приходим к равенствам $\cos\Phi(x)\cdot R(x) = G_n(x)$,

$$\sin\Phi(x)\cdot R(x) = 0. \tag{18}$$

Отсюда следует, что если в соответствии с представлениями

$$\Phi(x) = 2\,\mathrm{arctg}\, Q_m(x), \tag{19}$$

приведёнными в [1, с. 38], где $Q_m(x)$ — неизвестный алгебраический многочлен, то $|\Phi(x)| \le \pi$ и, таким образом, в (18) $\Phi(x) \equiv 0$.

Итак, доказано следующее утверждение.

Предложение 1. *Если в интегральном уравнении* (1) $f(\theta) = f_n(\theta)$ *имеет вид* (5), *а* $\Phi(x)$ *имеет вид* (19), *то это уравнение имеет решение с единственной парой функций* $\psi(\xi) \equiv 0$,

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(n+1-m)\int\limits_{0}^{\infty}\cos\frac{\xi t}{a}T_{2m}\left(\frac{t}{ak}\right)A_{2m+1}(t)dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}(n+1)\int\limits_{0}^{\infty}\cos\frac{\xi t}{a}A_{2n+1}(t)dt.$$

Замечание 2. Функцию $\rho(\xi)$ можно выразить и через алгебраический многочлен, если воспользоваться равенством (см. [7, с. 19])

$$T_{2m}(z) = m\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{2m-k}\left(\begin{array}{c} 2m-k \\ k \end{array}\right)(4z^2)^{m-k}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

4. Заключение

В работе впервые решается задача амплитудно-фазового синтеза для линейной антенны с диаграммой направленности, представляемой ядром Фейера. Выясняется, что конструкция таких диаграмм направленности сочетает в себе как интерполяционные возможности полиномов Эрмита, применяемые для этой цели в [1], так и аппроксимационные свойства тригонометрических сумм, являющихся Фурье-образом атомарных функций, указанных в [3].

Эти и другие важные свойства ядер Фейера позволяют решать в явном виде и анализировать задачи амплитудно-фазового синтеза, подобные рассмотренным в настоящей работе, и стимулировать к привлечению их исследования теории почти-периодических функций.

Список литературы

1. **Суетин, П. К.** Начала математической теории антенн / П. К. Суетин. — М. : Инсвязь, 2008. — 228 с.
2. **Суетин, П. К.** Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. — М. : Наука, 1979. — 416 с.
3. **Кравченко, В. Ф.** Лекции по теории атомарных функций и некоторые их приложения / В. Ф. Кравченко. — М. : Радиотехника, 2003. — 512 с.
4. **Костин, Д. В.** Многочлены Максвелла — Фейера и оптимизация полигармонического импульса / Д. В. Костин, В. А. Костин, Ю. И. Сапронов // Докл. Акад. наук. — 2012. — Т. 445, № 3. — С. 271–273.
5. **Левитан, Б. М.** Почти-периодические функции / Б. М. Левитан. — М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1953. — 396 с.
6. **Ахиезер, Н. И.** Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. — М. : Наука, 1965. — 407 с.
7. **Пашковский, С. П.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва / С. П. Пашковский. — М. : Наука, 1983. — 384 с.

Поступила в редакцию 25.02.2020
После переработки 11.05.2020

Сведения об авторах

Костин Владимир Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; e-mail: vlkostin@mail.ru.

Костин Дмитрий Владимирович, доктор физико-математических наук, начальник отдела АО «Концерн "Созвездие"»; профессор кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; e-mail: kostindv605@gmail.com.

Костин Алексей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; e-mail: leshakostin@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2020. Vol. 5, iss. 2. P. 211–217.

DOI: 10.24411/2500-0101-2020-15208

FEJER RADIATION PATTERN FOR LINEAR ANTENNA AND SOLVING THE PROBLEM OF AMPLITUDE-PHASE SYNTHESIS

V.A. Kostin[1,a], **D.V. Kostin**[1,2,b] , **A.V. Kostin** [1,c]

[1] *Voronezh State University, Voronezh, Russia*
[2] *JSC Concern «Sozvezdie», Voronezh, Russia*
[a] *vlkostin@mail.ru,* [b] *kostindv605@gmail.com,* [c] *leshakostin@mail.ru*

For the first time, the problem of amplitude-phase synthesis for a linear antenna with a radiation pattern represented by the Fejer core is solved. It turns out that the design of such radiation patterns combines both the interpolation capabilities of Hermite polynomials used for this purpose in the works of P.K. Suetin and the approximation properties of trigonometric sums, which are Fourier transforms of atomic functions indicated in B.F. Kravchenko.

Keywords: *Fejer sum, orthogonal polynomial, radiation pattern, linear antenna, problem of amplitude-phase synthesis.*

References

1. **Suetin P.K.** *Nachala matematicheskoy teorii antenn* [The beginning of the mathematical theory of antennas]. Moscow, Insvyaz' Publ., 2008. 228 p. (In Russ.).
2. **Suetin P.K.** *Klassicheskiye ortogonal'nye mnogochleny* [Classical orthogonal polynomials]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 416 p. (In Russ.).
3. **Kravchenko V.F.** *Lektsii po teorii atomarnyih funktsiy i nekotorye ikh prilozheniya* [Lectures on the theory of atomic functions and some of their applications]. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2003. 512 p. (In Russ.)
4. **Kostin V.A., Kostin V.A., Sapronov Yu.I.** Maxwell — Fejer polynomials and optimization of polyharmonic impulse. *Doklady Mathematics*, 2012, vol. 86, no. 1, pp. 512–514.
5. **Levitan B.M.** *Pochti-pereodicheskiye funktsii* [Almost periodic functions]. Moscow, Gosteortekhizdat Publ., 1953. 396 p. (In Russ.).
6. **Achiezer N.I.** *Theory of approximation.* New York, Frederick Ungar Publ. 623 p.
7. **Pashkovsky S.P.** *Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebyshyova* [Computational applications of Chebyshyov polynomials and series]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 384 p. (In Russ.).

Accepted article received 25.02.2020
Corrections received 11.05.2020