

УДК 517.928.4

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

М. И. Русанова

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
rusanova_mary94@mail.ru

Найдена равномерная асимптотика решения начальной задачи для уравнения $\varepsilon^2 u' = -u^2 + \varepsilon f(x)$, сингулярно зависящего от малого параметра ε . Уравнения такого вида являются уже хорошо изученными, но данное уравнение представляет собой неисследованный случай поведения правой части. Методом согласования построено трёхмасштабное асимптотическое разложение решения, проведено его обоснование методом верхнего и нижнего решения.

Ключевые слова: асимптотическое разложение, малый параметр, начальная задача, метод согласования, промежуточное разложение, уравнение Риккати.

Введение

В 1952 г. академиком А. Н. Тихоновым в работе [1] была рассмотрена сингулярная задача вида

$$\begin{cases} \varepsilon u' = f(x, u, \varepsilon), & x > 0, \\ u(0) = A, \end{cases}$$

в которой рассматривалось поведение решения $u(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В области определения на функцию $f(x, u, \varepsilon)$ налагалось ограничение $\frac{\partial f}{\partial u}(x, u, 0) \neq 0$, т. е. $f \sim C \cdot u$ при $x \rightarrow 0$. Особенностью данной задачи является то, что для её решения не существует асимптотического разложения вида

$$u(x, \varepsilon) = \sum_k \varepsilon^k u_k(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

равномерного для всех $x \in [0, M]$, $M > 0$. Асимптотическое разложение решения данной задачи можно выписать лишь в виде двухмасштабного разложения, если использовать метод согласования [2], либо в виде более сложного ряда

$$u(x, \varepsilon) = \sum_k \varepsilon^k u_k(x, \varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

с зависимостью самих асимптотических коэффициентов от малого параметра, если использовать метод введения погранслоя [3].

Позднее академик А. М. Ильин методом согласования рассмотрел более сложный случай [4, гл. 8] с уравнением вида $\varepsilon u' = f(x, u, \varepsilon)$, где $f \sim x - u^2$ при $x \rightarrow 0$. (Отметим, что в случае, когда $f \sim x + u^2$ при $x \rightarrow 0$, происходит так называемый «дифференциальный взрыв» и область существования непродолжаемого решения сокращается до размеров порядка ε .) Начиная с этого случая в структуре асимптотического разложения появляется промежуточный слой между внешним и внутренним асимптотическими разложениями, т. е. разложение становится трёхмасштабным. Возникает закономерный вопрос, не появится ли четырёх- и более

масштабное разложение при дальнейшем вырождении функции $f(x, u, \varepsilon)$ в правой части? Однако ответ пока неизвестен.

В работе О. Ю. Хачая [5] изучена асимптотика решения начальной задачи Коши с уравнением $\varepsilon u' = f(x, u)$, где $f(x, u) \sim x - u^k$, $k > 2$ — произвольное натуральное число. В ней доказано, что при любых таких k решение задачи имеет трёхмасштабную структуру.

А. М. Ильин и С. Ф. Долбеева в работе [6] исследовали поведение решения задачи Коши в случае, когда правая часть $f(x, u, \varepsilon)$ специального вида обращается в ноль на двух пересекающихся кривых, например, когда $f(x, u, \varepsilon) = (x - u)^2(x - 2u)^2$.

В работе Ю. А. Крутовой [7] рассмотрен случай, когда правая часть уравнения $f(x, u, \varepsilon) \sim x^2 - u^2$ при $x \rightarrow 0$. Кажется более-менее ясным то, что в случае $f(x, u, \varepsilon) \sim x^k - u^2$ при $x \rightarrow 0$ и $k > 2$ асимптотическое разложение принципиальным образом не меняется. Поэтому в данной работе мы рассмотрим «предельный» случай, когда $f(x, u, \varepsilon) \sim -u^2$ при $x \rightarrow 0$. Для упрощения вычислений мы будем исследовать начальную задачу Коши в следующей формулировке:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u' = -u^2 + \varepsilon f(x), \\ u(0, \varepsilon) = 1, \end{cases} \quad (1)$$

где $f(x) > 0$ при $x \geq 0$, $f \in C^\infty[0, +\infty)$. Из устойчивости по Ляпунову следует существование непрерывного решения рассматриваемой задачи на $[0, +\infty)$. Построенное асимптотическое разложение будет иметь ту же структуру асимптотики, что и в случае более общей правой части, имеющей заданное поведение вблизи нуля, однако в данной работе асимптотические коэффициенты будут построены в явном виде.

Отметим, что рассматриваемое уравнение представляет собой так называемое уравнение Риккати. Оно является одним из наиболее интересных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Уравнение Риккати встречается в различных областях математики (например, в алгебраической геометрии и в теории конформных отображений) и физики. К нему, в частности, сводится стационарное уравнение Шрёдингера (см., например, [8]). Оно также нередко возникает в прикладных математических задачах [9, введение].

1. Внешнее разложение

Будем строить асимптотическое разложение решения в виде формального ряда U по степеням малого параметра ε :

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{1/2+3k/2} u_k(x).$$

Подставляя этот ряд в наше уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon : 0 &= -u_0^2 + f(x), \\ \varepsilon^{5/2} : u_0' &= -2u_0 u_1, \\ \varepsilon^4 : u_1' &= -u_1^2 - 2u_0 u_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Из первого уравнения следует, что $u_0(x) = \pm \sqrt{f(x)}$, выберем $u_0(x) = \sqrt{f(x)}$. (На самом деле наш выбор определяется здесь знаком начального значения $u(0, \varepsilon)$.)

Из остальных уравнений легко последовательно найти все асимптотические коэффициенты. Например,

$$u_1(x) = -\frac{f'(x)}{4f(x)},$$

$$u_2(x) = -\frac{f''(x)}{8f^{3/2}(x)} - \frac{5}{32\sqrt{f(x)}} \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 \text{ и т. д.}$$

Поскольку $f(x) > 0$, то делить на $f(x)$ можно. Однако очевидно, что начальное условие $u(0, \varepsilon) = 1$ не выполняется даже асимптотически, поэтому вблизи точки $x = 0$ требуется дополнительное внутреннее асимптотическое разложение.

2. Внутреннее разложение

Для построения внутреннего разложения введём «внутреннюю» переменную $\xi = x/\varepsilon^2$. Обозначим за $v(\xi, \varepsilon) = u(\varepsilon^2\xi, \varepsilon)$. В результате такой замены мы получим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\xi} = -v^2(\xi) + \varepsilon f(\varepsilon^2\xi), & \xi > 0, \\ v(0, \varepsilon) = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Внутреннее разложение будем искать в виде формального ряда

$$V = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j v_j(\xi).$$

Для нахождения его коэффициентов подставим его в уравнение (2) и приравняем члены при одинаковых степенях ε , используя разложение в ряд Тейлора $f(\varepsilon^2\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \xi^k$.

При подстановке ряда V в начальное условие получим

$$v_0(0) + \varepsilon v_1(0) + \varepsilon^2 v_2(0) + \dots = 1,$$

откуда получаем следующие начальные условия:

$$v_0(0) = 1, \quad v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = 0, \dots$$

Таким образом, коэффициенты внутреннего асимптотического разложения могут определяться из следующих начальных задач:

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} v'_0 = -v_0^2, \\ v_0(0) = 1, \end{cases}$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} v'_1 = -2v_0v_1 + f(0), \\ v_1(0) = 0, \end{cases}$$

$$\varepsilon^2 : \begin{cases} v'_2 = -2v_0v_2 - v_1^2, \\ v_2(0) = 0, \end{cases}$$

...

Отсюда можно последовательно найти

$$v_0(\xi) = \frac{1}{\xi + 1},$$

$$v_1(\xi) = \frac{f(0)}{3} \left(\xi + 1 - \frac{1}{(\xi + 1)^2} \right),$$

$$v_2(\xi) = -\frac{1}{9} \frac{f^2(0)}{(\xi + 1)^2} \left(\frac{\xi^5}{5} + \xi^4 + 2\xi^3 - \xi - 1 - \frac{1}{\xi + 1} \right)$$

и другие асимптотические коэффициенты внутреннего разложения.

3. Промежуточное разложение

Введём новую переменную $\eta = \varepsilon^{-3/2}x$ и функцию $w(\eta, \varepsilon) = u(\varepsilon^{3/2}x, \varepsilon)$. После такой замены получим следующее уравнение на функцию w :

$$\varepsilon^{1/2} \frac{dw}{d\eta} = -w^2 + \varepsilon f(\varepsilon^{1/2}\eta). \quad (3)$$

Будем искать промежуточное асимптотическое разложение в виде формального ряда

$$W = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} w_j(\eta). \quad (4)$$

Также разложим в ряд Тейлора функцию $f(\varepsilon^{3/2}\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{3k/2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \eta^k$.

Подставим данные ряды в уравнение (3):

$$\varepsilon^{1/2}(w'_0 + \varepsilon^{1/2}w'_1 + \dots) = -(w_0 + \varepsilon^{1/2}w_1 + \dots)^2 + \varepsilon f(0) + \varepsilon^{3/2}f'(0)\eta + \dots,$$

а затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Получим следующие уравнения:

ε^0 : $0 = -w_0^2$, отсюда $w_0 \equiv 0$ и, следовательно, промежуточное разложение, как и внешнее, не удовлетворяет начальному условию;

$\varepsilon^{1/2}$: $w'_0 = -2w_0w_1$ тождественно выполняется;

ε^1 : $w'_1 = -w_1^2 - 2w_0w_2 + f(0)$.

Несмотря на то что последнее уравнение является уравнением Риккати, в данном случае несложно найти его два решения: $w_1(\eta) = \sqrt{f(0)} \operatorname{cth}(\sqrt{f(0)}(\eta + C_1))$ или $w_1(\eta) = \sqrt{f(0)} \operatorname{th}(\sqrt{f(0)}(\eta + C_1))$, где C_1 — произвольная постоянная. Выберем в качестве функции w_1 первое решение, в противном случае нам не удастся произвести в последующем процесс согласования.

$\varepsilon^{3/2}$: $w'_2 = -2w_0w_3 - 2w_1w_2$.

Отсюда $w_2(\eta) = C_2(\operatorname{cth}^2(\sqrt{f(0)}(\eta + C_1)) - 1)$.

ε^2 : $w'_3 = -2w_0w_4 - 2w_1w_3 - w_2^2$.

Следовательно,

$$w_3(\eta) = \frac{C_3}{\operatorname{sh}^2(\sqrt{f(0)}(\eta + C_1))} + \frac{C_2^2 \exp(-\sqrt{f(0)}(\eta + C_1))}{\sqrt{f(0)} \cdot \operatorname{sh}^3(\sqrt{f(0)}(\eta + C_1))}.$$

Продолжая данный процесс, можно последовательно определить все функции $w_k(\eta)$ из ряда (4). Отметим, что на каждом шаге при определении очередной функции $w_k(\eta)$ появляется новая неопределённая постоянная C_k , которую можно определить из условия согласования асимптотических рядов, что мы и сделаем в следующем пункте.

4. Согласование

В соответствии с условиями согласования для любых l, m, n должны быть выполнены следующие равенства:

$$A_{l,\xi} A_{m,\eta} W = A_{m,\eta} A_{l,\xi} V, \quad A_{m,\eta} A_{n,x} U = A_{n,x} A_{m,\eta} W,$$

где через $A_{n,x}$ обозначается оператор взятия частичной суммы ряда, записанной от переменной x и содержащей степени ε с показателем до n включительно [2, введение].

Для определения постоянных C_k достаточно провести согласование только V и W . Следить за согласованием асимптотических рядов удобно используя специальную таблицу согласования:

$W \setminus V$	$v_0(\xi)$	$\varepsilon v_1(\xi)$	$\varepsilon^2 v_2(\xi)$...
$\varepsilon^{1/2} w_1(\eta)$	ξ^{-1}	$\varepsilon \xi f(0)/3$	$-\varepsilon^2 \xi^3 f^2(0)/45$...
	$\varepsilon^{1/2} \eta^{-1}$	$\varepsilon^{1/2} \eta f(0)/3$	$\varepsilon^{1/2} \eta^3 f^2(0)/45$...
$\varepsilon w_2(\eta)$	$-\xi^{-2}$	$\varepsilon \xi f(0)/3$	$-\varepsilon^2 \xi^2 f^2(0)/15$...
	$\varepsilon \eta^{-2} C_2 / f(0)$	$-\varepsilon C_2 / 3$	$\varepsilon \eta^2 C_2 f(0) / 15$...
$\varepsilon^{3/2} w_3(\eta)$	ξ^{-3}	0	$\varepsilon^2 \xi f^2(0) / 15$...
	$\varepsilon^{3/2} \eta^{-3} C_2^2 f^{-2}(0)$	0	$-\varepsilon^{3/2} \eta C_2^2 / 15$...
...

Таблица устроена стандартным образом [2, гл. 5]. В верхних и нижних частях клеток стоят равные функции с учётом замены переменной $\xi = \varepsilon^{1/2} \eta$. В столбцы этой таблицы записаны разложения коэффициентов внутреннего разложения $v_i(\xi)$ при $\xi \rightarrow +\infty$, а строки — разложения коэффициентов промежуточного разложения $w_j(\eta)$ при $\eta \rightarrow 0$. Таким образом определяются $C_1 = 0$, $C_2 = -f(0)$, $C_3 = f^{3/2}(0)$ и т. д. Отсюда

$$\begin{aligned} w_1(\eta) &= \sqrt{f(0)} \operatorname{cth}(\sqrt{f(0)} \cdot \eta), \\ w_2(\eta) &= -\frac{f(0)}{\operatorname{sh}^2(\sqrt{f(0)} \cdot \eta)}, \\ w_3(\eta) &= f^{3/2}(0) \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{f(0)} \cdot \eta)}{\operatorname{sh}^3(\sqrt{f(0)} \cdot \eta)}. \end{aligned}$$

На этом построение формального асимптотического разложения закончено.

5. Обоснование

Воспользуемся методом нижнего и верхнего решения, описанным, например, в [3]. Обоснование проведём только для двух членов асимптотики, для большего числа его можно провести аналогично. Рассмотрим произвольную начальную задачу

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) = 0, & x \in I = (x_0, x_1), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (5)$$

где $f \in C(I)$, и введём два определения.

Определение 1. Функцию \underline{Y} , имеющую свойства:

1) $\underline{Y}(0) \leq y_0$,

2) $\frac{d\underline{Y}}{dx} - f(x, \underline{Y}) \leq 0$ при $x \in I$,

назовём *нижним решением* начальной задачи (5).

Определение 2. Функцию \bar{Y} , имеющую свойства:

1) $\bar{Y}(0) \geq y_0$,

2) $\frac{d\bar{Y}}{dx} - f(x, \bar{Y}) \geq 0$ при $x \in I$,

назовём *верхним решением* начальной задачи (5).

Как известно (см. [10, гл. IV, § 1]), из существования нижнего и верхнего решения следует существование единственного решения $y(x)$ задачи (5), при этом

$$\underline{Y}(x) \leq y(x) \leq \bar{Y}(x) \text{ при } x \in I.$$

Пусть функция $u(x, \varepsilon) \equiv v(\xi, \varepsilon) \equiv \varepsilon^{1/2}w(\eta, \varepsilon)$ является точным решением задачи (1) (или в других переменных — задачи (2)). Обозначим через $V_2 = v_0(\xi) + \varepsilon v_1(\xi)$.

В качестве нижнего решения задачи (2) возьмём $\underline{V} = V_2 - A\varepsilon^{5/4}$. Тогда

1) $\underline{V}(0, \varepsilon) = v_0(0) + \varepsilon v_1(0) - A\varepsilon^{5/4} = 1 - A\varepsilon^{5/4} \leq 1 = v(0, \varepsilon)$, где $v(\xi, \varepsilon)$ — точное решение задачи (2),

$$2) \frac{d\underline{V}}{d\xi} - \underline{V}^2 + \varepsilon f(\varepsilon^2\xi) = -\frac{2A\varepsilon^{5/4}}{\xi+1} + \frac{1}{9}f^2(0) \left(\xi+1 - \frac{1}{(\xi+1)} \right)^2 \varepsilon^2 - \frac{2}{3}f(0) \left(\xi+1 - \frac{1}{(\xi+1)} \right) A\varepsilon^{9/4} + A^2\varepsilon^{5/2} + O(\varepsilon^3\xi).$$

Следовательно, при достаточно большом $A > 0$ и достаточно малом, выбранном по A , параметре ε на отрезке $\xi \in [0, \varepsilon^{-1/4}]$ функция \underline{V} действительно является нижним решением задачи (2).

В качестве верхнего решения возьмём функцию $\bar{V} = V_2 + A\varepsilon^{5/4}$. Аналогично при достаточно большом A и достаточно малом ε на отрезке $\xi \in [0, \varepsilon^{-1/4}]$ функция \bar{V} действительно является верхним решением задачи (2).

Таким образом, мы доказали, что $|v(\xi, \varepsilon) - V_2| = O(\varepsilon^{5/4})$ при $\xi \in [0, \varepsilon^{-1/4}]$ или, с учётом замены $\eta = \varepsilon^{1/2}\xi$, при $\eta \in [0, \varepsilon^{1/4}]$.

Обозначим через $W_2 = \varepsilon^{1/2}w_1(\eta) + \varepsilon w_2(\eta)$. В качестве нижнего решения возьмём функцию $\underline{W} = W_2 - B\varepsilon^{5/4}/\text{sh}(\sqrt{f(0)} \cdot \eta)$. Тогда при достаточно большом B и затем выбранном по нему достаточно малом ε выполняются неравенства:

$$1) \underline{W}(\varepsilon^{1/4}, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}w_1(\varepsilon^{1/4}) + \varepsilon w_2(\varepsilon^{1/4}) - \frac{B\varepsilon^{5/4}}{\text{sh}(\sqrt{f(0)} \cdot \varepsilon^{1/4})} = \varepsilon^{1/2} \left(\varepsilon^{-1/4} + \frac{f(0)}{3}\varepsilon^{1/4} + O(\varepsilon^{3/4}) \right) + \varepsilon \left(\varepsilon^{-1/2} + \frac{f(0)}{3} + O(\varepsilon^{1/2}) \right) - \frac{B\varepsilon^{5/4}}{\sqrt{f(0)} \cdot \varepsilon^{1/4} + O(\varepsilon^{3/4})} \leq \underline{V} \Big|_{\xi=\varepsilon^{-1/4}} \leq w(\varepsilon^{1/4}, \varepsilon),$$

$$2) \varepsilon^{1/2} \frac{d\underline{W}}{d\eta} + \underline{W}^2 - \varepsilon f(\varepsilon^{1/2}\eta) = -B\sqrt{f(0)} \frac{\text{ch}(\eta\sqrt{f(0)})}{\text{sh}^2(\eta\sqrt{f(0)})} \cdot \varepsilon^{7/4} + \frac{f^2(0)}{\text{sh}^4(\eta\sqrt{f(0)})} \varepsilon^2 + \frac{2f(0)B\varepsilon^{9/4}}{\text{sh}^3(\eta\sqrt{f(0)})} + \frac{B^2\varepsilon^{5/2}}{\text{sh}^2(\eta\sqrt{f(0)})} + O(\varepsilon^2\eta) \leq 0 \text{ при } \eta \leq \varepsilon^{1/4}.$$

Следовательно, при $\eta \in [\varepsilon^{1/4}, \varepsilon^{-5/4}]$ или, что то же самое, при $x \in [\varepsilon^{7/4}, \varepsilon^{1/4}]$ функция \underline{W} является нижним решением задачи (1) с учётом замены переменных. Совершенно аналогично можно доказать, что $\underline{W} = W_2 + B\varepsilon^{5/4}/\text{sh}(\sqrt{f(0)} \cdot \eta)$ является верхним решением задачи (1) на отрезке $x \in [\varepsilon^{7/4}, \varepsilon^{1/4}]$.

На оставшемся участке $x \in [\varepsilon^{1/4}, +\infty)$ в качестве нижнего решения возьмём $\underline{U} = u_0(x) - C \cdot \varepsilon^{5/8}$. Тогда при достаточно большом параметре C , а затем выбранном по нему достаточно малом ε будут выполняться неравенства:

$$1) \underline{U}(\varepsilon^{1/4}, \varepsilon) = u_0(\varepsilon^{1/4}) - C \cdot \varepsilon^{5/8} = \varepsilon^{1/2}(\sqrt{f(0)} + O(\varepsilon^{1/4})) - C \cdot \varepsilon^{5/8} \leq \underline{W}(\varepsilon^{-5/4}, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\sqrt{f(0)} + O(\exp(-\varepsilon^{-5/4})) \leq u(\varepsilon^{1/4}, \varepsilon),$$

$$2) \varepsilon^2 \frac{dU}{dx} + U^2 - \varepsilon f(x) = -2C\sqrt{f(x)} \cdot \varepsilon^{9/8} + C^2\varepsilon^{5/4} + \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\varepsilon^{5/4} \leq 0$$

при достаточно малом ε и не слишком большом x (в зависимости от функции $f(x)$). Иначе говоря, второе неравенство выполняется на промежутке $x \in [\varepsilon^{1/4}, F[f](\varepsilon)]$, где F — некоторый оператор, причём функция $F[f](\varepsilon) \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Аналогично можно построить верхнее решение вида $\underline{U} = u_0(x) + C \cdot \varepsilon^{5/8}$.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Решение начальной задачи (1) существует и удовлетворяет следующему асимптотическому равенству:*

$$u(x, \varepsilon) \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \begin{cases} v_0(\xi) + \varepsilon v_1(\xi) + O(\varepsilon^{5/4}) & \text{при } x \in [0, \varepsilon^{7/4}], \\ \varepsilon^{1/2}w_1(\eta) + \varepsilon w_2(\eta) + O\left(\frac{\varepsilon^{5/4}}{\text{sh}(\sqrt{f(0)} \cdot \eta)}\right) & \text{при } x \in [\varepsilon^{7/4}, \varepsilon^{1/4}], \\ \varepsilon^{1/2}u_0(x) + O(\varepsilon^{5/8}) & \text{при } x \in [\varepsilon^{1/4}, F[f](\varepsilon)], \end{cases}$$

$$\text{где } \xi = \frac{x}{\varepsilon^2}, \quad \eta = \frac{x}{\varepsilon^{3/2}},$$

$$v_0(\xi) = \frac{1}{\xi + 1},$$

$$v_1(\xi) = \frac{f(0)}{3} \left(\xi + 1 - \frac{1}{(\xi + 1)^2} \right),$$

$$w_1(\eta) = \sqrt{f(0)} \text{cth}(\sqrt{f(0)} \cdot \eta),$$

$$w_2(\eta) = -\frac{f(0)}{\text{sh}^2(\sqrt{f(0)} \cdot \eta)},$$

$$u_0(x) = \sqrt{f(x)}.$$

Автор благодарит А. А. Ершова за постановку задачи и полезные обсуждения работы.

Список литературы

1. **Тихонов, А. Н.** Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных / А. Н. Тихонов // Мат. сб. — 1952. — Т. 31 (73), № 3. — С. 575–586.
2. **Ильин, А. М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач / А. М. Ильин. — М.: Наука, 1989. — 336 с.
3. **Васильева, А. Б.** Контрастные структуры в сингулярно возмущённых задачах / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефёдов. // Фундамент. и приклад. математика. — 1998. — Т. 4, № 3. — С. 799–851.
4. **Ильин, А. М.** Асимптотические методы в анализе / А. М. Ильин, А. Р. Данилин. — М.: Физматлит, 2009. — 248 с.
5. **Хачай, О. Ю.** Асимптотическое разложение решения начальной задачи для сингулярно возмущённого обыкновенного дифференциального уравнения / О. Ю. Хачай // Дифференц. уравнения. — 2008. — Т. 44, № 2. — С. 270–272.
6. **Ильин, А. М.** Асимптотика решения дифференциального уравнения с малым параметром в случае двух решений предельного уравнения / А. М. Ильин, С. Ф. Долбеёва // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 1. — С. 98–108.

7. Крутова, Ю. А. Асимптотика решения одной нелинейной задачи Коши // Челяб. физ.-мат. журн. — 2016. — Т. 1, вып. 1. — С. 43–51.
8. Цапенко, Н. Е. Уравнение Риккати и волновые процессы / Н. Е. Цапенко. — М. : Изд-во Моск. гос. горного ун-та, 2008. — 244 с.
9. Егоров, А. И. Уравнения Риккати / А. И. Егоров. — М. : Физматлит, 2001. — 320 с.
10. Чаплыгин, С. А. Новый метод приближённого интегрирования дифференциальных уравнений / С. А. Чаплыгин. — М. : Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1950. — 102 с.

Поступила в редакцию 01.05.2016

После переработки 12.06.2016

Сведения об авторе

Русанова Мария Игоревна, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: rusanova_mary94@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 2. P. 59–67.

ASYMPTOTICS OF SOLUTION OF THE RICCATI EQUATION

M.I. Rusanova

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

rusanova_mary94@mail.ru

Uniform asymptotics is found for a solution of the initial value problem to the equation $\varepsilon^2 u' = -u^2 + \varepsilon f(x)$, singularly depending on a small parameter ε . Equations of this type are already well studied, but this equation represents an unexplored case of the right-hand side behavior. By the method of asymptotics matching the three-scale asymptotic expansion for a solution is constructed and is justified by the method of upper and lower solutions.

Keywords: *asymptotic expansion, small parameter, initial value problem, asymptotics matching method, intermediate expansion, Riccati equation.*

References

1. Tikhonov A.N. Sistemy differentsial'nykh uravneniy, sodержashchikh malye parametry pri proizvodnykh [Systems of differential equations containing small parameters at derivatives]. *Matematicheskiiy sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1952, vol. 31 (73), no. 3, pp. 575–586. (In Russ.).
2. И'ин А.М. Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems, transl. Math. Monogr. 102, AMS, Providence, RI, 1992. 279 p.
3. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N. Kontrastnye struktury v singulyarno vozmushchyonnykh zadachakh [Contrast structures in singularly perturbed problems]. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* [Fundamental and applied mathematics], 1998, vol. 4, no. 3, pp. 799–851. (In Russ.).
4. И'ин А.М., Danilin A.R. Asimptoticheskie metody v analize [Asymptotic methods in analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 248 p. (In Russ.).
5. Khachay O.Yu. Asymptotic expansion of the solution of the initial value problem for a singularly perturbed ordinary differential equation. *Differential equations*, 2008, vol. 44, no. 2, pp. 282–285.

6. **И'ин А.М., Dolbeeva S.F.** Asymptotics of the solution to a differential equation with a small parameter in the case of two limit solutions. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2006, vol. 253, suppl. 1, pp. 105–116.
7. **Krutova Yu.A.** Asimptotika resheniya odnoy nelineynoy zadachi Koshi [Asymptotics of the solution of a nonlinear Cauchy problem]. *Chelyabinskiy fiziko-matematicheskiiy zhurnal* [Chelyabinsk physical and mathematical journal], 2016, vol. 1, iss. 1, pp. 43–51. (In Russ.).
8. **Tsapenko N.E.** Uravnenie Rikkati i volnovye protsessy [The Riccati equation and wave processes]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 2008. 244 p. (In Russ.).
9. **Egorov A.I.** Uravneniya Rikkati [Riccati equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 320 p. (In Russ.).
10. **Chaplygin S.A.** Novyy metod priblizhyonnogo integrirovaniya differentsial'nykh uravneniy [New method of approximate integration of differential equations]. Moscow, 1950. 102 p.

Accepted article received 01.05.2016

Corrections received 12.06.2016