Челябинский физико-математический журнал. 2020. Т. 5, вып. 1. С. 44–55.

УДК 517.95 DOI: 10.24411/2500-0101-2020-15104

РАЗРЕШИМОСТЬ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТЯХ С НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ИЛИ НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ. I

А. Г. Подгаев

Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия
pvu1707@mail.ru

Доказывается регулярная разрешимость задач для квазилинейного трёхмерного параболического уравнения с осевой симметрией в нецилиндрической области с заданной границей класса W_2^1 (часть I) или неизвестной границей, причём в целом по времени (часть II). Во втором случае уравнение описывает процессы фазовых переходов вещества из одного состояние в другое. Граница фазы перехода неизвестна и определяется вместе с решением. В отличие от известной задачи Стефана, когда скрытая теплота плавления вещества известна, здесь рассматривается задача, когда необходимо определить эту характеристику, если известен объём растаявшего вещества за данный период.

Ключевые слова: *условие Стефана, нелинейное параболическое уравнение, нецилиндрическая область, теорема компактности.*

Введение

Основная цель исследования — доказать разрешимость задачи с неизвестной границей и с условием типа Стефана на ней, при этом коэффициент, играющий роль скрытой удельной теплоты плавления вещества, также неизвестен и определяется вместе с решением.

Приведён итерационный процесс, позволяющий на каждом шаге определять как температуру в каждой точке, так и саму область, заполненную растаявшим веществом. Последнее важно для получения равномерных оценок на неизвестную границу, на последовательность построенных приближений, что будет использовано в части II. Его можно использовать и при моделировании и численных расчётах.

В части I на каждом шаге итерационного процесса решается задача в заданной нецилиндрической области, граница которой не обладает достаточной гладкостью, которая бы позволила применить известные результаты. Приближённые решения для каждого шага итерации (без сведения задачи к случаю цилиндрической области) строятся проекционным методом с использованием семейства проекторов, зависящих от временно́го параметра. Доказывается, что некоторый предел этих решений будет решением задачи в области с заданной нецилиндрической границей (часть I). Для обоснования существования предела используются методы компактности функций из шкалы банаховых пространств.

Для задач с неизвестной границей в части II установлены некоторые теоремы компактности, «привязанные» к специфике таких задач, которые, используя равномерные оценки, полученные в части I, позволяют сделать предельный переход и установить разрешимость задачи с неизвестной границей (часть II).

1. Постановка основной задачи

Различные задачи, в которых описываются процессы, сопровождающиеся фазовыми превращениями среды с поглощением или выделением скрытой теплоты, вследствие чего появляются неизвестные заранее границы фазовых переходов (называемых свободными границами), называют задачами Стефана. Наиболее широкий обзор этой задачи дан в [1; 2], а более свежие результаты по разрешимости задач, например, в [3; 4]. Как указано в [5], «до сих пор существование классического решения доказано только в малом по времени (исключая некоторые простые случаи)». Близкие к двухфазным задачам, но в заданных областях рассматривались в [6].

В работе рассматривается однофазная трёхмерная задача с расширением жидкой фазы в среду с постоянной температурой, равной температуре плавления (=0), в которой считается известной величина растаявшего вещества за заданный промежуток времени. Неизвестными в этой задаче, как и в задаче Стефана, являются, температура $c(x,t)$ в каждой точке в каждый момент времени, а также граница перехода твёрдой фазы в жидкую. Но, в отличие от задачи Стефана, скрытая удельная теплота плавления также подлежит определению. Исследован случай, когда начальные данные обладают свойством центральной симметрии. Математически это означает, что рассматривается трёхмерная задача с неизвестной границей для нелинейного уравнения теплопроводности

$$c_t = \varphi(c)\Delta c = \operatorname{div}(\varphi(c)\nabla c) - \varphi'(c)|\nabla c|^2 \tag{1}$$

в шаровом слое $1 <| x |< r(t)$, где $r(t)$ — неизвестная функция, подлежащая определению вместе с решением $c(x,t)$ уравнения (1).

Уравнение (1) дополняется начальным условием

$$c(x,0) = c_0(x) \geq 0, \quad 1 \leq |x| \leq 2. \tag{2}$$

На известной неподвижной части границы $|x| = 1$ в каждый момент времени задаётся поток тепла (для простоты берём случай его отсутствия):

$$\frac{\partial\Phi(c)}{\partial n} = \sum_{i=1}^{3} \varphi(c)c_{x_i}n_i = 0 \text{ при } |x| = 1,\, t > 0, \tag{3}$$

где $\Phi(\eta) = \int_0^\eta \varphi(\xi)d\xi$ — первообразная для φ. На неизвестной границе (фазового перехода) задаётся постоянная температура (плавления вещества), которую считаем равной нулю и записываем в эквивалентном виде:

$$\Phi(c) = 0 \text{ при } |x| = r(t),\ t > 0, \tag{4}$$

а также условие Стефана

$$\varphi(c)\nabla_x c\nabla_x h = Lh'_t \text{ при } |x| = r(t),\ t > 0, \tag{5}$$

где $h(x,t) = 0$ есть уравнение неизвестной границы, причём $h < 0$ соответствует внутренности области. Условие (5), если уравнение границы имеет вид $h(x,t) = \tilde{h}(x) - t = 0$, можно записать в виде

$$\varphi\nabla_x c\nabla_x\tilde{h} = -L \quad \text{при } |x| = r(t),\ t > 0. \tag{5'}$$

В условиях (5), (5′) L — постоянная, показывающая, какое минимальное количество теплоты необходимо для того, чтобы перевести единицу массы вещества из твёрдого состояния в жидкое при неизменной температуре, равной температуре плавления. В отличие от известной задачи Стефана [1; 2; 3], в которой L — заданная постоянная, будет рассмотрена задача, в которой L, так называемая скрытая удельная теплота плавления, является искомым коэффициентом. При этом мы будем задавать дополнительное условие: в заданный момент времени $t = T$ количество растаявшей массы (объёма) должно достигнуть заданной величины. В принципе задача относится к классу обратных задач, связанных с задачей Стефана, см., например, [4], но как будет видно, она устойчива по отношению к входным данным. Если считать начальное распределение температуры центрально симметричным, т. е. $c_0(x) = c_1(|x|)$, то из физики процесса можно ожидать, что и решение задачи при $t > 0$ будет таким же. В частности, поэтому в граничных условиях сразу предполагается эта симметрия. Далее мы увидим, что это ожидание оправданно. Итак, будем искать решение задачи (1)–(5) в виде $c(x,t) = \frac{u(r,t)}{r}$, где $r = |x|$ — евклидово расстояние. В этом случае, обозначая через $'$ производную по r, поток можно записать в виде

$$\frac{\partial\Phi(c)}{\partial n} = \varphi(c)\frac{\partial c}{\partial n} = \varphi(c)\left(\frac{u}{r}\right)' = \varphi\left(\frac{u}{r}\right)\left(\frac{u}{r}\right)'.$$

А условие Стефана (5′) при выборе $\tilde{h}(x) = \theta(r)$ примет вид

$$\varphi\left(\frac{u}{r}\right)\theta'(r)\left(\frac{u}{r}\right)' = -L \text{ при } r = r(t).$$

Используя обратную для $\theta(r)$ функцию $r = r(t)$, получим

$$\varphi\left(\frac{u}{r}\right)\left(\frac{u}{r}\right)' = -Lr' \text{ при } r = r(t).$$

Уравнение в случае трёх пространственных переменных, в свою очередь, преобразуется к виду:

$$\frac{\partial\left(\frac{u}{r}\right)}{\partial t} = \varphi\left(\frac{u}{r}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2} = \left(\varphi(\frac{u}{r})\left(\frac{u}{r}\right)'\right)' + \frac{2}{r}\varphi\left(\frac{u}{r}\right)\left(\frac{u}{r}\right)'_r - \varphi'\left(\frac{u}{r}\right)\left(\frac{u}{r}\right)'^2.$$

Следовательно, вводя новую функцию $\tilde{u}(r,t) = \frac{u(r,t)}{r}$, а затем убирая волну, сведём задачу нахождения решения $c(x,t)$ и границы раздела фаз к задаче

$$u_t = (\Phi(u))''_{rr} - \varphi'(u)(u'_r)^2 + \frac{2}{r}\varphi(u)u'_r, \quad 1 < r < r(t),\ t \in (0,T), \tag{6}$$

$$u(r,0) = u_0(r), \quad 1 \le r \le 2, \tag{7}$$

.

$$(\Phi(u))'_r = 0 \text{ при } r = 1,\ t \in (0,T), \tag{8}$$

$$u = 0 \text{ при } r = r(t),\ t \in (0,T), \tag{9}$$

$$(\Phi(u))'_r = -Lr'(t) \text{ при } r = r(t),\ t \in (0,T). \tag{10}$$

В работе будем предполагать, что функция $\varphi'(\xi)$ непрерывна для всех ξ, а также, что

$$\varphi(\xi) \ge \delta > 0, \quad \xi\varphi'(\xi) \ge 0. \tag{11}$$

Введём нецилиндрическую область $Q_t = \{(r,\tau):\ 1 < r < r(t),\ \tau \in (0,t)\}$. В предположении, что $u_0(r) \geq 0$, $u_0 \in W_2^1$, будет видно, что $r(t)$ не убывает (часть II), $r(t) \in W_2^1(0,T)$ и, следовательно, непрерывна по Гёльдеру. Представляя интеграл по Q_t как $\int_1^2\int_0^t d\tau dr + \int_2^{r(t)}\int_{\theta(r)}^t d\tau dr$ и как $\int_0^t\int_1^2 drd\tau + \int_0^t\int_2^{r(t)} drd\tau$ и интегрируя уравнение (6) с условиями (7)–(10), выведем важное для дальнейшего интегральное соотношение

$$L(r(t)-2) = \int_1^2 u_0(r)dr - \int_1^{r(t)} u(r,t)dr + \int_0^t\int_1^{r(\tau)} \left(\frac{2}{r}\varphi(u)u' - u' - \varphi'(u)u'^2\right) drd\tau.$$

Задание к моменту времени $t = T$ объёма растаявшего вещества эквивалентно заданию величины $r(T)$. Поэтому далее считаем, что

$$r(T) = \ell,\ \text{где } \ell > 2 \text{ — заданная постоянная.}$$

2. Построение итерационного процесса для задачи с неизвестной границей

Для решения задачи (6)–(10) предлагается следующий итерационный процесс:

$$L_n(r^{n+1}(t)-2) = \int_1^2 u_0(r)dr - \int_1^{r^n(t)} u^n(r,t)dr +$$

$$+\int_0^t\int_1^{r^n(\tau)} \left(\frac{2}{r}\varphi(u^n)u_r^n - \varphi'(u^n)u_r^{n2}\right) drd\tau, \tag{12}$$

$$r^{n+1}(T) = \ell,\ r^0(t) = \frac{\ell-2}{T}t + 2,\ n = 0,1,2,3,...$$

Функция $u^n(r,t)$ строится по $r^n(t)$ как решение следующей краевой задачи в заданной нецилиндрической области $Q_T^n = \{(r,\tau):\ 1 < r < r^n(\tau),\ \tau \in (0,T)\}$:

$$u_t^n = (\Phi(u^n))''_{rr} - \varphi'(u^n)(u_r^n)^2 + \frac{2}{r}\varphi(u^n)u_r^n,\ 1 < r < r^n(t),\ t \in (0,T), \tag{13}$$

$$u^n(r,0) = u_0(r),\ 1 \leq r \leq 2,\ u_0 \geq 0,$$

$$(\Phi(u^n))'_r = 0 \text{ при } r = 1,\ t \in (0,T),$$

$$u^n = 0 \text{ при } r = r^n(t),\ t \in (0,T),$$

по известной правой границе, такой, что для всех n $r^n(t) \in W_2^1(0,T)$, $\frac{d}{dt}r^n(t) \geq 0$, $r^n(0) = 2$, $r^n(T) = \ell$, а L^n определяется после этого из (12) исходя из требования $r^{n+1}(T) = \ell$ для всех $n = 0,1,2,\ldots$, т. е.

$$L_n(\ell-2) = \int_1^2 u_0(r)dr - \int_1^{\ell} u^n(r,T)dr + \int_0^T\int_1^{r^n(\tau)} \left(\frac{2}{r}\varphi(u^n)u_r^n - \varphi'(u^n)u_r^{n2}\right) drd\tau.$$

Если $L_n = 0$, то полагаем, например, $r^{n+1}(t) = r^0(t)$.

В случае решения обычной задачи Стефана с заданной L, которую мы здесь, однако, не рассматриваем, r^{n+1} находится из (12) при $L_n = L$.

3. Разрешимость задачи (13) при заданной $r^n(t)$ из класса W_2^1

Коэффициенты в уравнении задачи (13) могут не удовлетворять условиям разрешимости для первой (и второй) начально-краевой задачи, рассматриваемой в цилиндрической области (см. [7; 8] и др.). И в задаче (13) смешанный случай предполагает задание на части границы условие Дирихле, на части — условие Неймана, и область нецилиндрическая. А если заменой привести область к цилиндрической (приём «выпрямления фронтов» использовался многими авторами, например, в [9]), то в коэффициентах уравнения возникнет коэффициент с $r'(t) \in L_2$, а в известных теоремах требуется непрерывность и гёльдеровость коэффициентов. В работе на коэффициенты накладываются нестандартные условия (см. (20) далее). Функции $\varphi(u) = u^2 \exp(u^2)+\delta$, $\varphi(u) = \frac{\sin 2u}{2u}+1$ удовлетворяют этим условиям (и условиям (11)). Кроме того, нас интересуют равномерные оценки итерационно получаемых решений уравнения (6), а также функций, описывающих криволинейную границу, которые будут использованы в части II. Поэтому мы приводим (теорема 1) независимое доказательство разрешимости задачи с заданной нецилиндрической границей $r(t) \in W_2^1(0,T)$, часть I. Случай квазилинейного многомерного уравнения с другого типа нелинейностями, но в гладких нецилиндрических границах рассматривался в [10].

3.1. Оценки производных по r у приближённых решений

Опуская в задаче (13) на время индексы n сверху, будем искать приближённое решение задачи (13) в виде

$$u_m = \sum_{k=0}^{m} c_k^m(t)\omega_k(r,t), \text{ где } \omega_k(r,t) = \sqrt{2}\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\frac{r-1}{r(t)-1}\right]$$

исходя из требований

$$\int_1^{r(t)} u_{mt}(r,t)\omega_j(r,t)dr + \int_1^{r(t)} (\Phi(u_m))'\omega_{jr}(r,t)dr+$$

$$+\int_1^{r(t)} \varphi'(u_m)u_{mr}^2\omega_j(r,t)dr = 2\int_1^{r(t)} \frac{1}{r}\varphi(u_m)u_{mr}\omega_j(r,t)dr, \quad j=0,1,2,\dots,m, \tag{14}$$

$$u_m(r,0) = \sum_{k=1}^{m} c_k\omega_k(r,0), \quad c_k = \int_1^2 u_0(r)\omega_k(r,0)dr.$$

Заметим, что для всех $t \in [0,T]$ система функций $\{\omega_k(r,t)\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональна и полна как в пространстве $L_2(1,r(t))$, так и в пространстве функций из $W_2^1(1,r(t))$, равных нулю при $r=r(t)$. При этом $\int_1^{r(t)} \omega_k(r,t)\omega_j(r,t)dr = \delta_k^j(r(t)-1)$. Отсюда, в частности, следует, что для коэффициентов Фурье c_k функции $u_0(r) \in W_2^1(1,2)$, такой, что $u_0(2)=0$, будем иметь $u_m(r,0) = \sum_{k=0}^{m} c_k\omega_k(r,0) \to u_0(r)$ в $L_2(1,2)$ и в $W_2^1(1,2)$.

Важно заметить здесь, что

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{dc_k^m}{dt}\omega_k(r,t) + c_k^m(t)\frac{\partial\omega_k}{\partial t}(r,t)\right), \tag{15}$$

$$\frac{\partial\omega_k}{\partial t} = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\frac{r-1}{(r(t)-1)^2}r'(t)\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\frac{r-1}{r(t)-1}\right]. \tag{16}$$

Это отличает проекционный метод этой работы от классического случая цилиндрических областей.

В силу ортогональности в $L_2(1, r(t))$ системы $\{\omega_k(r,t)\}_{k=0}^{\infty}$ система обыкновенных дифференциальных уравнений (14) эквивалентна нормальной форме

$$\sqrt{2}(r(t)-1)\frac{dc_j^m(t)}{dt} = -\sum_{k=0}^{m} c_k^m(t)\int_1^{r(t)} \omega'_{kt}(r,t)\omega_j(r,t)dr-$$

$$-\int_1^{r(t)} \left[(\Phi(u_m))'_r\,\omega'_{jr}(r,t) + \varphi'(u_m)u_{mr}^2\omega_j(r,t)\right]dr,\ c_j^m(0) = c_j,\ j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

В силу непрерывности $\varphi'(\xi)$ и леммы из [11], обобщающей лемму Вишика — Дубинского (прямая ссылка на которую невозможна в силу появления в первом слагаемом правой части системы дифференциальных уравнений множителя $r'(t) \in L_2(0,T)$, не являющегося непрерывной функцией), задача Коши для этой системы имеет решение из класса $W_2^1(0,T)$. Выполнение условия (0) этой леммы из [11], гарантирующего глобальную разрешимость, следует из полученной ниже оценки. Последняя будет получена из равенства, следующего из (14), которое имеет вид

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_1^{r(t)} u_m^2 dr + \int_1^{r(t)} \left[\varphi(u_m) + \varphi'(u_m)u_m\right]u_{mr}^2 dr = 2\int_1^{r(t)} \frac{1}{r}\varphi(u_m)u_m u_{mr}dr. \qquad (17)$$

(Некоторые задачи для уравнений с сингулярностями рассматривались также в работе [12]). Преобразуем правую часть, вводя функцию $\varphi_1(\xi) = \int_0^{\xi}\varphi(\eta)\eta d\eta \geq \frac{\delta}{2}\xi^2$:

$$2\int_1^{r(t)} \frac{1}{r}\varphi(u_m)u_m u_{mr}dr = 2\int_1^{r(t)} \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1(u_m))\frac{1}{r}dr = 2\int_1^{r(t)} \frac{\varphi_1(u_m)}{r^2}dr - 2\varphi_1(u_m(1,t)).$$

Определив функцию $\psi(u) = \int_0^u \sqrt{\varphi(\eta) + \eta\varphi'(\eta)}d\eta$, тождество (17) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_1^{r(t)} u_m^2 dr + \int_1^{r(t)} \left|\frac{\partial\psi(u_m)}{\partial r}\right|^2 dr + 2\varphi_1(u_m(1,t)) = 2\int_1^{r(t)} \frac{\varphi_1(u_m)}{r^2}dr. \qquad (18)$$

Кроме условия (11) на функцию φ предполагается выполненным условие

$$\forall u \in R \quad \varphi_1(u) \leq c_1\psi^2(u) + c_2u^2 + c_3,\ \text{где}\ 2c_1(\ell - 1 - \ln\ell) < 1. \qquad (19)$$

Также отметим, что для функций $u(r,t)$, равных нулю при $r = r(t)$, выполнено неравенство

$$|\psi(u)|^2 \leq (r(t) - r)\int_1^{r(t)} \left|\frac{\partial}{\partial r}\psi(u)\right|^2 dr. \qquad (20)$$

Из (19), (20) вытекает, что

$$2\int_1^{r(t)} \frac{\varphi_1(u_m)}{r^2}dr \leq 2c_1\int_1^{r(t)} \frac{r(t)-r}{r^2}dr\int_1^{r(t)} \left|\frac{\partial}{\partial r}\psi(u_m)\right|^2 dr + 2c_2\int_1^{r(t)} u_m^2 dr + 2c_3(\ell - 1) \leq$$

$$2c_1(\ell - 1 - \ln\ell)\int_1^{r(t)} \left|\frac{\partial}{\partial r}\psi(u_m)\right|^2 dr + 2c_2\int_1^{r(t)} u_m^2 dr + 2c_3(\ell - 1).$$

Здесь мы использовали тот факт, что на каждом шагу $r(t) \le \ell$, и возрастание функции $r - 1 - \ln r$ при $r > 1$. Из последней оценки, оценок (19), (20) и леммы Гронуолла получаем равномерную по m оценку

$$\int_1^{r(t)} u_m^2 dr + \int_0^t \int_1^{r(\tau)} \left| \frac{\partial}{\partial r} \psi(u_m) \right|^2 dr d\tau + \int_0^t \varphi_1(u_m(1,\tau)) d\tau \le c, \tag{21}$$

из (21) и (20) следует, что интеграл $\int_0^t |\psi(u_m)| d\tau$ также равномерно ограничен.

Оценку (21) можно получить (при других предположениях) без условия связи φ и параметра ℓ. Действительно, предположим, что вместо (19) выполнено неравенство

$$\varphi_1(u) \le \bar{c_1} |\psi(u)|^{p_1} + \bar{c_2} u^2 + \bar{c_3}, \ \ 1 \le p_1 < 2. \tag{22}$$

Тогда, используя неравенство Коши с ε, оценивая первое слагаемое справа в (22) через $\varepsilon \psi^2(u) + c(\varepsilon)$, аналогично получим оценку (21). Условие (22) интересно тем, что оно выполнено, например, для важного случая степенной зависимости φ от u. Так, функция $\varphi(u) = \frac{1}{2s+1} \left(u^s + \frac{2s+1}{s+1} \right)^2 + \left(\frac{s}{s+1} \right)^2$, для которой $\varphi_1(u) = (u^s + 1)^2$, s — чётное, удовлетворяет (22) с $p_1 = \frac{2s}{s+1}$ (и условию (11)).

Для получения второй группы оценок умножим левые и правые части равенств на $-\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi j}{r(t) - 1} \right)^2 c_j^m(t)$ и просуммируем по j от 0 до m. После некоторых преобразований, используя равенства $u_m(r(t), t) = 0$, $u_{mr}(1, t) = 0$, $u_{mt}(r(t), t) = -u_{mr}(r(t), t) r'(t)$, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_1^{r(t)} u_{mr}^2 dr + \frac{1}{2} u_{mr}^2 (r(t), t) r'(t) + \int_1^{r(t)} \varphi(u_m) u_{mrr}^2 dr = 2 \int_1^{r(t)} \frac{\varphi(u_m) u_{mr} u_{mrr}}{r} dr \le$$

$$\le \varepsilon \int_1^{r(t)} \varphi(u_m) u_{mrr}^2 dr + c(\varepsilon) \int_1^{r(t)} \varphi(u_m) u_{mr}^2 dr, \quad \varepsilon < 1. \tag{23}$$

Используя неотрицательность $r'(t)$ и выполнение условия (11), интегрируя по t (23), из (21) получим вторую равномерную оценку ($\varepsilon = 1/2$)

$$\int_1^{r(t)} u_{mr}^2 dr + \int_0^t u_{mr}^2 (r(\tau), \tau) r'(\tau) d\tau + 2\delta(1 - \varepsilon) \int_0^t \int_1^{r(\tau)} u_{mrr}^2 dr d\tau \le c(\varepsilon) + \tilde{c}, \tag{24}$$

где $\tilde{c}$ равномерно ограничивают $\int_1^2 u_{mr}^2 (r, 0) dr$ в силу $u_0(r) \in W_2^1(1, 2)$ и $u_0(2) = 0$. Из этой оценки, в частности, следует, что $|u_m(r, t)| \le c$.

3.2. Оценки производных по t приближённых решений

Напомним, что имеют место равенства (15) и (16), поэтому

$$\sum_{k=0}^m \frac{\partial c_k^m}{\partial t} \omega_k(r, t) = \frac{\partial u_m}{\partial t} + \frac{\partial u_m}{\partial r} \frac{r - 1}{r(t) - 1} r'(t). \tag{25}$$

Умножим каждое уравнение в (14) на $\frac{d}{dt} c_j^m(t)$ и просуммируем по j от 0 до m. В результате из (25) получим равенство (индекс m опущен)

$$\int_1^{r(t)} u_t \left(u_t + u_r \frac{r - 1}{r(t) - 1} r'(t) \right) dr = \int_1^{r(t)} u_t^2 dr + \frac{r'(t)}{r(t) - 1} \int_1^{r(t)} u_t u_r (r - 1) dr =$$

$$= \int_1^{r(t)} \left(\varphi(u) u_{rr} + \frac{2}{r} \varphi(u) u_r \right) \left(u_t + u_r \frac{r - 1}{r(t) - 1} r'(t) \right) dr.$$

Из (24) получим с новым ε

$$\frac{r'(t)}{r(t)-1}\int_1^{r(t)} u_{mt}u_{mr}(r-1)dr \le r'(t)\left(\int_1^{r(t)} u_{mr}^2dr\right)^{1/2}\left(\int_1^{r(t)} u_{mt}^2dr\right)^{1/2} \le$$

$$\le \varepsilon\int_1^{r(t)} u_{mt}^2dr + c(\varepsilon)r'^2(t).$$

Из непрерывности φ, равномерной ограниченности u_m и (24) получим, что

$$\int_1^{r(t)}\left(\varphi(u_m)u_{mrr}+\frac{2}{r}\varphi(u_m)u_{mr}\right)\left(u_{mt}+u_{mr}\frac{r-1}{r(t)-1}r'(t)\right)dr \le$$

$$\le c\left(\int_1^{r(t)}\varphi(u_m)u_{mrr}^2dr\right)^{1/2}\left(\int_1^{r(t)} u_{mt}^2dr\right)^{1/2} + \varepsilon\int_1^{r(t)} u_{mt}^2dr +$$

$$+c(\varepsilon)+cr'(t)\left(\int_1^{r(t)}\varphi(u_m)u_{mrr}^2dr\right)^{1/2}+cr'(t)\le$$

$$\le 2\varepsilon\int_1^{r(t)} u_{mt}^2dr + c(\varepsilon)\int_1^{r(t)}\varphi(u_m)u_{mrr}^2dr + cr'^2(t) + c\int_1^{r(t)}\varphi(u_m)u_{mrr}^2dr + c(\varepsilon).$$

Выбирая $\varepsilon=\varepsilon_0<1/3$ и интегрируя неравенство, получим равномерную по m оценку

$$\int_0^t\int_1^{r(\tau)} u_{mt}^2drd\tau \le c\left(\int_0^T r'^2(\tau)d\tau+1\right). \qquad (26)$$

В наших обозначениях лемма 1 из [13] имеет вид:

Лемма 1. *Пусть функция $r(t)$ такая, что $r(t)\in W_2^1(0,T)$, $r(0)=2$, $r(t)\ge 2$, $t\in[0,T)$, а отрезок $[0,T]$ можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых $r'(t)\ge 0$ почти всюду либо $r'(t)\le 0$ почти всюду (случай $r(T)=1$ допустим). Тогда имеет место вложение*

$$W_2^1(Q_T)\cap L_\infty(0,T;W_2^1(0,r(t)))\subset C_{t,x}^{\frac14,\frac12}(\overline{Q}_T).$$

Из этой леммы, полученных равномерных оценок следует, что все функции непрерывны по Гёльдеру, их норма в пространстве $C_{t,x}^{\frac14,\frac12}(\overline{Q}_T)$ равномерно ограничена. Используя компактность вложения пространства Гёльдера в пространство $C(\overline{Q}_T)$, из последовательности u_m можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно. Здесь и в дальнейшем будем считать, после каждого выделения, что сама последовательность u_m сходится.

3.3. Об одном результате о компактности. Теорема существования

Нам понадобится обоснование возможности применения одного результата о компактности. Возьмём в [14] в качестве семейства пространств B_1^t (t пробегает все значения от 0 до T) пространства $L_2(1,r(t))$, а в качестве B^t — пространства $W_p^1(1,r(t))$, $1<p<2$, а норму зададим формулой

$$\|v\|_{B^t}=\left(\int_1^{r(t)}(|v(r)|^p+|v_r(r)|^p)dr\right)^{1/p}.$$

Неубывание $r(t)$, $t \in (0,T)$, даёт вложения $B^{t_1} \subset B^{t_2}$, $B_1^{t_1} \subset B_1^{t_2}$ при $t_1 > t_2$.

Далее определим S^t как подмножество пространства B^t, состоящее из функций класса $C^2[1, r(t)]$. Кроме того, важную роль играет величина $M_t(\cdot) : S^t \to R^+$, которую для рассматриваемой задачи можно определить формулой

$$M_t(v) = \int_1^{r(t)} \left(v^2(r) + v_r^2(r) + v_{rr}^2(r)\right) dr,\ t \in (0,T).$$

В силу неубывания $r(t)$ выполняется $M_{t_2}(v) \le M_{t_1}(v)$ при $t_1 > t_2$ для всех v из S^{t_1}.

Через F_1 обозначается подмножество абстрактных функций $v(t)$, таких, что при $t \in [0,T]$ и $v(t) \in B^t$ выполнены неравенства

$$\operatorname{vrai}\max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{B^t} \le c_1, \quad \int_0^T M_t(v(t))dt \le c_2, \tag{27}$$

где c_1 и c_2 — общие постоянные для всех $v(t) \in F_1$.

Для использования указанной теоремы необходимо доказать существование такой функции $\eta(t_1, t_2)$, что для всех пар элементов $u, v \in F_1$ и всех $t_1 \ge t_2$

$$|\|u(t_1) - v(t_1)\|_{B^{t_2}} - \|u(t_1) - v(t_1)\|_{B^{t_1}}| \le \eta(t_1, t_2) \to 0$$

при $t_1 - t_2 \to 0$. Здесь η не зависит от u, v из F_1. Для построенной нами последовательности это означает, что $|\| u_{m_1}(r,t_1) - u_{m_2}(r,t_1) \|_{B^{t_2}} - \| u_{m_1}(r,t_1) - u_{m_2}(r,t_1) \|_{B^{t_1}}| \le \eta(t_1,t_2) \to 0$ и доказывается из свойства гёльдеровости $r(t)$ и полученных оценок аналогично тому, как это сделано в [12].

Из полученных оценок для u_m следует выполнение неравенств (27) для семейства $\{u_m\}$. При фиксированных t и a введём в рассмотрение множества $S_a^t = \{\theta(r) \in S^t : M_t(\theta) \le a\}$. Чтобы применить результат [14], осталось заметить, что при любых заданных числах $a > 0$, $t \in [0,T]$ множества S_a^t относительно компактны в $B^t = W_p^1(1, r(t))$.

Теорема компактности из указанной работы позволяет выделить подпоследовательность $\{u_{m_s}\}$, которая сходится в нормах $\left(\int_0^T \|u\|_{B^t}^{p_1}\right)^{1/p_1}$, $p_1 \in [1,\infty)$, и можно считать, что $\{u_{m_s r}\}$ сходится почти всюду. Тогда из оценки

$$u_{mr}^4(r,t) = \left(\int_1^r \frac{\partial u_{mr}^2(s,t)}{\partial s} ds\right)^2 \le 4\int_1^r u_{mr}^2 ds \int_1^r u_{mrr}^2 ds \le 4c \int_1^r u_{mrr}^2 ds$$

следует, что семейство $\{u_{mr}^2\}$ равномерно ограничено в норме $L_2(Q_T)$. И лемма 3.2 [15, с. 80] позволяет заключить, что u_{mr}^2 сходится в $L_q(Q_T)$, $q < 2$. Вместе с равномерной сходимостью $\{u_m\}$ это позволяет перейти к пределу в нелинейных членах $\varphi(u_m)u_{mr}$, $\varphi'(u_m)u_{mr}^2$ соответствующего интегрального тождества, получающегося из (14) стандартным образом.

Таким образом, установлена разрешимость краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения в области с нецилиндрической границей класса W_2^1.

Теорема 1. *Пусть выполнено* (20) *и одно из условий* (19) *или* (22), $u_0(r) \ge 0$, $u_0 \in W_2^1$, *а заданная функция* $r(t) \in W_2^1$ *не убывает. Тогда задача* (13), *а следовательно, и задача* (1)–(4), (5′) *с центрально-симметричной начальной функцией, имеет непрерывное решение из класса, определяемого неравенствами* (21), (24), (26).

Одновременно с этим завершается построение на n-м шаге итерационного процесса функции $u_n(r,t)$ по заданной $r^n(t)$.

Список литературы

1. **Данилюк, И. И.** О задаче Стефана / И. И. Данилюк // Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 40, вып. 5 (245). — С. 133–185.
2. **Мейрманов, А. М.** Задача Стефана / А. М. Мейрманов. — Новосибирск : Наука, 1986. — 320 с.
3. **Самарский, А. А.** Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
4. **Гольдман, Н. Л.** Однофазные обратные задачи Стефана с неизвестными нелинейными источниками / Н. Л. Гольдман // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 6. — С. 707–714.
5. **Мейрманов, А. М.** О существовании обобщенного решения в целом по времени одной задачи со свободной границей / А. М. Мейрманов, О. А. Гальцева, В. Е. Сельдемиров // Мат. заметки. — 2020. — Т. 107, вып. 2. — С. 229–240.
6. **Попов, С. В.** Контактные параболические краевые задачи для уравнений второго порядка / С. В. Попов, А. И. Шадрина // Мат. заметки Якут. гос. ун-та. — 2009. — Т. 16, вып. 2. — С. 66–77.
7. **Ладыженская, О. А.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, В. А. Солонников. — М.: Наука, 1967. — 736 с.
8. **Чжоу Юй-линь.** Краевые задачи для нелинейных параболических уравнений / Чжоу Юй-линь // Мат. сб. — 1959. — Т. 47 (89), вып. 4. — С. 431–484.
9. **Успенский, А. Б.** О методе выпрямления фронтов для многофронтовой задачи Стефана / А. Б. Успенский // Докл. Акад. наук СССР. — 1967. — Т. 172, № 1. — С. 61–64.
10. **Подгаев, А. Г.** О методе Фаэдо — Галеркина для вырождающегося квазилинейного уравнения в нецилиндрической области / А. Г. Подгаев, Н. Е. Истомина // Дальневост. мат. журн. — 2014. — Вып. 1. — С. 73–89.
11. **Подгаев, А. Г.** Об одном обобщении леммы Вишика — Дубинского и неравенства Гронуолла / А. Г. Подгаев, А. З. Син // Учёные заметки Тихоокеан. гос. ун-та. — 2013. — Т. 4, № 4. — С. 2113–2118.
12. **Егоров, И. Е.** Об общей краевой задаче для сингулярного обыкновенного дифференциального уравнения / И. Е. Егоров // Мат. заметки Якут. гос. ун-та. — 2008. — Т. 15, вып. 1. — С. 45–51.
13. **Подгаев, А. Г.** Разрешимость квазилинейного параболического уравнения в области с кусочно-монотонной границей / А. Г. Подгаев, К. В. Лисенков // Дальневост. мат. журн. — 2013. — Т. 13, № 2. — С. 250–272.
14. **Подгаев, А. Г.** Об относительной компактности множества абстрактных функций из шкалы банаховых пространств / А. Г. Подгаев // Сиб. мат. журн. — 1993. — Т. 34, № 2. — С. 135–137.
15. **Ладыженская, О. А.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. — М. : Наука, 1973. — 576 с.

Поступила в редакцию 31.01.2020
После переработки 02.03.2020

Сведения об авторе

Подгаев Александр Григорьевич, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики, Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия; e-mail: pvu1707@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2020. Vol. 5, iss. 1. P. 44–55.

DOI: 10.24411/2500-0101-2020-15104

SOLVABILITY OF AN AXISYMMETRIC PROBLEM FOR NONLINEAR PARABOLIC EQUATION IN DOMAINS WITH A NON-CYLINDRICAL OR UNKNOWN BOUNDARY. I

A.G. Podgaev

Pacific National University, Khabarovsk, Russia
pvu1707@mail.ru

We prove the regular solvability for problems to quasilinear three-dimensional parabolic equation with the axial symmetry in a non-cylindrical region with a given boundary from the class W_2^1 (part I) or an unknown one in general by time (part II). In the second case, the equation describes the processes of phase transitions of a substance from one state to another. The boundary of the transition phase is unknown and is determined together with the solution. Unlike the well-known Stefan's problem, when the latent heat of fusion of a substance is known, here we consider the problem when it is necessary to determine this characteristic, if the volume of the melted substance for a given period is known..

Keywords: *Stefan's condition, nonlinear parabolic equation, non-cylindrical domain, compactness theorem.*

References

1. **Danilyuk I.I.** On the Stefan problem. *Russian Mathematical Surveys*, 1985, vol. 40, no. 5, pp. 157—223.
2. **Meirmanov A.M.** *The Stefan Problem.* Berlin, Walter de Gruyter and Co., 1992.
3. **Samarsky A.A., Vabishchevich P.N.** Vychislitel'naya teploperedacha [Computational heat transfer]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2003. 784 p. (In Russ.).
4. **Gol'dman N.L.** One-phase inverse Stefan problems with unknown nonlinear sources. *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 6, pp. 680–687.
5. **Meirmanov A.M., Gal'tseva O.A., Sel'demirov V.E.** O sushchestvovanii obobshchennogo resheniya v zelom po vremeni odnoy zadachi so svobodnoy granitsey [The existence of a generalized solution in general by time of a problem with a free boundary]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2020, vol. 107, no. 2, pp. 229–240. (In Russ.).
6. **Popov S.V., Shadrina A.I.** Kontaktnye parabolicheskiye kraevye zadachi dlya uravneniy vtorogo poryadka [Contact parabolic boundary value problems for second-order equations]. *Matematicheskie zametki Yakutskogo gosudarstvennogo universiteta* [Mathematical notes of Yakut State University], 2009, vol. 16, iss. 2, pp. 66–77. (In Russ.).
7. **Ladyzenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N.** *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type.* American Mathematical Society, 1968. 648 p.
8. **Chzhou Yuy-lin'.** Krayevye zadachi dlya nelineynykh parabolicheskikh uravneniy [Boundary problems for non-linear parabolic equations]. *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical collection], 1959, vol. 47 (89), no. 4, pp. 431–484. (In Russ.).
9. **Uspenskiy A.B.** O metode vypryamleniya frontov dlya mnogofrontovoy zadachi Stefana [On the front straightening method for the multi-front Stefan problem]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1967, vol. 172, no. 1, pp. 61–64. (In Russ.).

10. **Podgaev A.G., Istomina N.E.** O metode Faedo — Galerkina dlya vyrozhdayushchegosya kvazilineynogo uravneniya v netsilindricheskoy oblasti [On the Faedo — Galerkin method for a degenerate quasilinear equation in a non-cylindrical region]. *Dal'nevostochniy matematicheskiy zhurnal* [Far Eastern Mathematical Journal], 2014, iss. 1, pp. 73–89. (In Russ.).
11. **Podgaev A.G., Sin A.Z.** Ob odnom obobshchenii lemmy Vishika — Dubinskogo i neravenstva Gronuolla [On a generalization of the Vishik — Dubinskiy lemma and the Gronwall inequality]. *Uchyonye zametki Tikhookeanskogo gosudarstvennogo universiteta* [Scientific notes of the Pacific National University], 2013, vol. 4, no. 4, pp. 2113–2118. (In Russ.).
12. **Egorov I.E.** Ob obshchey krayevoy zadache dlya singulyarnogo obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya [On a general boundary value problem for a singular ordinary differential equation]. *Matematicheskie zametki Yakutsogo gosudarstvennogo universiteta* [Mathematical notes of Yakut State University], 2008, vol. 15, iss. 1, pp. 45–51. (In Russ.).
13. **Podgaev A.G., Lisenkov K.V.** Razreshimost' kvazilineynogo parabolicheskogo uravneniya v oblasti s kusochno-monotonnoy granitsey [Solvability of a quasilinear parabolic equation in a region with a piecewise-monotonic boundary]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal* [Far Eastern Mathematical Journal], 2013, vol. 13, no. 2, pp. 250–272. (In Russ.).
14. **Podgaev A.G.** On relative compactness of a set of abstract functions in a scale of Banach spaces. *Siberian Mathematical Journal*, 1993, vol. 34, iss.2, pp 320–329.
15. **Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N.** *Linear and Quasi-Linear Elliptic Equations.* Academic Press, New York, 1968. 514 p.

Accepted article received 31.01.2020
Corrections received 02.03.2020