Челябинский физико-математический журнал. 2020. Т. 5, вып. 1. С. 32–43.

УДК 517.977 DOI: 10.24411/2500-0101-2020-15103

СМЕШАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

М. В. Плеханова[1,2,a], **А. Ф. Шуклина**[1,b]

[1] *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
[2] *Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия*
[a] *mariner79@mail.ru*, [b] *isaf@csu.ru*

Рассмотрены задачи со смешанным управлением, стартовым и распределённым одновременно, для эволюционных уравнений дробного порядка по времени. Получены результаты о разрешимости задач смешанного управления для линейных невырожденного и вырожденного уравнений с дробной производной Герасимова — Капуто. Показано, что при некоторых дополнительных условиях решение рассматриваемой задачи единственно. Общие результаты использованы при рассмотрении абстрактных задач с конкретными функционалами качества. Абстрактные результаты работы проиллюстрированы на примере задачи смешанного управления для системы уравнений гравитационно-гироскопических волн дробного порядка по времени.

Ключевые слова: *оптимальное управление, смешанное управление, уравнение дробного порядка, производная Герасимова — Капуто, вырожденное эволюционное уравнение.*

Введение

В банаховых пространствах $\mathcal{U}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ рассмотрим задачу оптимального управления для вырожденного эволюционного уравнения дробного порядка

$$LD_t^\alpha x(t) = Mx(t) + Bu(t),\ t \in (t_0, T), \tag{1}$$

$$(Px)^{(k)}(t_0) = v_k,\ k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2}$$

$$(u, v) \in \mathfrak{U}_\partial, \tag{3}$$

$$J(x, u, v) \to \inf. \tag{4}$$

Здесь $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, D_t^α — дробная производная Герасимова — Капуто, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (т. е. линейный и непрерывный оператор из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$), $\ker L \neq \{0\}$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (линейный замкнутый оператор, плотно определённый в $\mathcal{X}$, действующий в пространство $\mathcal{Y}$), $\mathfrak{U}_\partial$ — непустое выпуклое и замкнутое множество допустимых управлений, J — функционал качества. При $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, $L = I$ уравнение (1) будем называть невырожденным, а соответствующую систему управления — невырожденной.

Задача (1)–(4) содержит управление двух типов: распределённое управление u и стартовое управление $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{m-1})$, такие задачи будем называть задачами смешанного управления. Исследование уравнений в частных производных дробного порядка активно развивается в настоящее время в связи с многочисленными

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ, акт 211, контракт 02.A03.21.0011.

приложениями в физике, биологии, экономике и других областях науки (см., например, [1–4]). Однако теория оптимального управления для эволюционных уравнений дробного порядка до сих пор содержит много нераскрытых аспектов. Основная цель данной работы — вывод условий разрешимости задач смешанного управления для вырожденных и невырожденных линейных систем, описываемых уравнениями дробного порядка по времени.

Ранее авторами рассматривались задачи смешанного управления для вырожденных и невырожденных систем вида (1) первого порядка (случай $\alpha = 1$) [5–8]. Для эволюционных уравнений дробного порядка в работах М. В. Плехановой исследовались задачи с управлением одного типа, стартовым [9] или распределённым [10–15].

Доказательства в данной работе опираются на схему исследования, предложенную в [16], при которой решение находится среди наборов, состоящих из функции состояния и функций стартового и распределённого управления. Основные требования для существования решения задачи управления — условия непустоты множества допустимых наборов и коэрцитивность выпуклого, ограниченного снизу и полунепрерывного снизу на выбранных пространствах функционала качества. Разрешимость начальной задачи в смысле сильного решения, существование и единственность которого для рассматриваемых классов уравнений были доказаны в [11], при некоторых функциях управления из выпуклого непустого множества допустимых управлений гарантирует непустоту множества допустимых наборов и достигается за счёт некоторых естественных предположений на операторы в уравнении, включая условие (L, p)-ограниченности оператора M в вырожденном уравнении. При этом начальное условие (2) естественным образом возникает во многих приложениях и означает, что начальные данные заданы лишь на подпространстве без вырождения.

В данной работе получены теоремы о разрешимости задач смешанного управления для линейного невырожденного уравнения дробного порядка, а также для линейного вырожденного дробного уравнения. Показано, что при некоторых дополнительных условиях решение рассматриваемой задачи единственно. Общие результаты использованы при рассмотрении абстрактных задач с конкретными функционалами качества. Абстрактные результаты работы проиллюстрированы на примере задачи смешанного управления для системы уравнений гравитационно-гироскопических волн дробного порядка по времени.

1. Предварительные сведения

Примем следующие обозначения: $g_\delta(t) := \Gamma(\delta)^{-1}t^{\delta-1}$ для $\delta > 0$, $t > 0$, $\tilde{g}_\delta(t) := \Gamma(\delta)^{-1}(t-t_0)^{\delta-1}$, $J_t^\delta h(t) := \int\limits_{t_0}^{t} g_\delta(t-s)h(s)ds$ для $t > t_0$. Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, D_t^m — обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, J_t^0 — тождественный оператор. Производная Герасимова — Капуто функции h определена следующим образом (см. [17, с. 11]):

$$D_t^\alpha h(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha}\left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}(t)\right), \quad t \geq t_0.$$

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{5}$$

рассмотрим задачу Коши

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{6}$$

где $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) := \mathcal{L}(\mathcal{Z}; \mathcal{Z})$, $T > t_0$, задана функция $f : [t_0, T] \to \mathcal{Z}$. Сильным решением задачи (5), (6) назовём функцию $z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, для которой

$$J_t^{m-\alpha}\left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right) \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{Z}), \quad q > 1,$$

выполняются условия (6) и почти всюду на (t_0, T) — уравнение (5).

Теорема 1. [11]. *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $f \in L_q(t_0, T; \mathcal{Z})$. Тогда при любых $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, существует единственное сильное решение задачи* (5), (6).

2. Смешанное управление для линейного невырожденного уравнения дробного порядка

Пусть $\mathcal{Z}$, $\mathcal{U}$ — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z})$. Введём в рассмотрение пространство управлений $\mathfrak{U} = L_q(t_0, T; \mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$ с нормой $\|(u, v)\|_{\mathfrak{U}} = \|u\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \|v\|_{\mathcal{Z}^m}$. Рассмотрим задачу смешанного управления

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + Bu(t), \ t \in (t_0, T), \tag{7}$$

$$z^{(k)}(t_0) = v_k, \ k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{8}$$

$$(u, v) = (u; v_0, v_1, \dots, v_{m-1}) \in \mathfrak{U}_\partial, \tag{9}$$

$$J(z, u, v) \to \inf, \tag{10}$$

где непустое выпуклое замкнутое подмножество $\mathfrak{U}_\partial$ пространства $\mathfrak{U}$ — множество допустимых управлений, набор $(u, v) = (u; v_0, v_1, \dots, v_{m-1}) \in \mathfrak{U}$ задаёт управление, J — функционал качества, $m \in \mathbb{N}$, $m - 1 < \alpha \le m$.

Исходя из вида уравнения (7), решения задачи (7), (8) будем искать в пространстве

$$\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) := \left\{ z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z}) : \ J_t^{m-\alpha}\left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right) \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{Z}) \right\}.$$

Лемма 1. [13]. *$\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})$ является банаховым пространством с нормой*

$$\|z\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})} = \|z\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})} + \|D_t^\alpha z\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})}.$$

Лемма 2. [13]. *При $m - \alpha > 1/q$ пространство $W_q^m(t_0, T; \mathcal{Z})$ непрерывно вложено в $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})$.*

Введём в рассмотрение оператор $\gamma_0 : \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \to \mathcal{Z}$, $\gamma_0 x = x(t_0)$. Очевидно, что $\gamma_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}); \mathcal{Z})$.

Множеством допустимых наборов $\mathfrak{W}$ задачи (7)–(10) называется совокупность таких наборов $(z, u, v) = (z, u, v_0, v_1, \dots, v_{m-1})$, что $z \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})$ — сильное решение задачи (7), (8) с $(u, v) \in \mathfrak{U}_\partial$ и $J(z, u, v) < \infty$. Задача (7)–(10) заключается в нахождении наборов $(\hat{z}, \hat{u}, \hat{v}) = (\hat{z}, \hat{u}, \hat{v}_0, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{m-1}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующих функционал качества: $J(\hat{z}, \hat{u}, \hat{v}) = \inf\limits_{(z,u,v)\in\mathfrak{W}} J(z, u, v)$.

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 0$, $(\alpha - m + 1)^{-1} < q$, $\mathfrak{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{U} = L_q(t_0, T; \mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$, в банахово пространство $\mathfrak{Y} \subset L_q(t_0, T; \mathcal{Z})$ непрерывно вложено $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})$, функционал качества J выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на $\mathfrak{Y} \times L_q(t_0, T; \mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$, коэрцитивный на пространстве $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times L_q(t_0, T; \mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$. Тогда существует решение $(\hat{z}, \hat{u}, \hat{v}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathfrak{U}_\partial$ задачи* (7)–(10). *Если функционал J является строго выпуклым на $\mathfrak{Y} \times \mathfrak{U}$, то решение задачи* (7)–(10) *единственно.*

Доказательство. По теореме 1 существует единственное сильное решение задачи (7), (8) при любых $(u, v) = (u, v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}) \in \mathfrak{U}_\partial$. Поэтому множество допустимых наборов $\mathfrak{W}$ непусто. Положим $\mathfrak{Y}_1 = \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})$, $\mathfrak{U} = L_q(t_0, T; \mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$ с нормой $\|u\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \|(v_0, v_1, \ldots, v_{m-1})\|_{\mathcal{Z}^m} = \|u\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \sum\limits_{k=0}^{m-1} \|v_k\|_{\mathcal{Z}}$, $\mathfrak{V} = L_q(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathcal{Z}^m$, $\mathfrak{F} = -(f, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathfrak{V}$, линейный оператор $\mathfrak{L}(z, u, v) = (D_t^\alpha z - Az - Bu, \gamma_0 z - v_0, \gamma_0 z^{(1)} - v_1, \ldots, \gamma_0 z^{(m-1)} - v_{m-1})$. Непрерывность оператора $\mathfrak{L} : \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ следует из неравенств

$$\|(D_t^\alpha z - Az - Bu, \gamma_0 z - v_0, \gamma_0 z^{(1)} - v_1, \ldots, \gamma_0 z^{(m-1)} - v_{m-1})\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z}) \times \mathcal{Z}^m} \leq$$
$$\leq C_1 \left(\|z\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})} + \|u\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \|v\|_{\mathcal{Z}^m}\right) \leq C_1 \|(z, u, v)\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z}) \times \mathfrak{U}}.$$

Ввиду нетривиальности множества $\mathfrak{W}$, выпуклости и коэрцитивности функционала J получим требуемое по теореме 2.3 для абстрактной задачи управления [16, с. 17]. □

Замечание 1. Выбор пространства $\mathfrak{Y}$ при применении теоремы 2 определяется видом функционала J. Проиллюстрируем это на примере.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(z, u, v) = \|z - z_d\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})} + \delta \|u - u_d\|^q_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \delta_1 \sum_{k=0}^{m-1} \|v_k - v_{dk}\|^2_{\mathcal{Z}} \to \inf \quad (11)$$

при заданных $z_d \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $u_d \in L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, $v_{dk} \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \ldots, m - 1$, $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$.

Следствие 1. *Пусть $\alpha > 0$, $(\alpha - m + 1)^{-1} < q$, $\mathfrak{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_q(t_0, T; \mathfrak{U}) \times \mathcal{Z}^m$. Тогда существует решение $(\hat{z}, \hat{u}, \hat{v}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathcal{U}_\partial$ задачи* (7)–(9), (11). *Если пространства $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{U}$ гильбертовы и $q = 2$, то решение задачи единственно.*

Доказательство. Достаточно взять $\mathfrak{Y} = C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $\mathfrak{Y}_1 = \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})$, $\mathfrak{U} = L_q(t_0, T; \mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$, чтобы все условия теоремы 2 выполнялись. Действительно, выпуклость, ограниченность снизу и непрерывность на $C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z}) \times \mathfrak{U}$ функционала J очевидны, при этом

$$\|z\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})} + \|D_t^\alpha z\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + \|u\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \|v\|_{\mathcal{Z}^m} \leq$$
$$\leq (1 + (T - t_0)^{1/2} \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}) \|z\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})} +$$
$$+((T - t_0)^{1/2} \|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Z})} + 1) \|u\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \|v\|_{\mathcal{Z}^m} \leq C_1 J(z, u, v) + C_2 \leq C_1 R + C_2,$$

если $J(z, u, v) \leq R$ при $R > 1$, что и означает коэрцитивность функционала на $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathfrak{U}$.

Если пространства $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{U}$ гильбертовы и $q = 2$, то часть функционала J, соответствующая управлению, является квадратом нормы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{U} = L_2(t_0, T; \mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$ и поэтому строго выпукла. Следовательно, строго выпуклым является и функционал J в целом. □

3. Сильное решение задачи Коши для вырожденного линейного уравнения

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, D_M — область определения оператора M, снабжённого нормой графика $\|\cdot\|_{D_M} := \|\cdot\|_{\mathcal{X}} + \|M\cdot\|_{\mathcal{Y}}$. Определим L-резольвентное множество $\rho^L(M) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\}$ оператора M и обозначим $R^L_\mu(M) := (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu := L(\mu L - M)^{-1}$.

Оператор M называется (L,σ)-*ограниченным*, если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

В случае (L,σ)-ограниченности оператора M можно определить проекторы

$$P := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}),\ \ Q := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}),$$

на пространствах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно, здесь $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ (см. [18, с. 89, 90]). Положим $\mathcal{X}^0 := \ker P$, $\mathcal{X}^1 := \mathrm{im} P$, $\mathcal{Y}^0 := \ker Q$, $\mathcal{Y}^1 := \mathrm{im} Q$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathcal{X}^k$ ($D_{M_k} := D_M \cap \mathcal{X}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 3. [18, с. 90, 91]. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда*
(i) $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$, $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$;
(ii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$.

Здесь и далее $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$, $G := M_0^{-1}L_0$. Для $p \in \mathbb{N}_0$ оператор M называется (L,p)-ограниченным, если он (L,σ)-ограничен, $G^p \neq 0$, $G^{p+1} = 0$.

Число $p \in \mathbb{N}_0$ характеризует наибольшую высоту цепочки M-присоединённых векторов (см. [18]).

Перейдём к рассмотрению вырожденного уравнения

$$LD^\alpha_t x(t) = Mx(t) + f(t), \quad t \in (t_0, T). \tag{12}$$

Сильным решением уравнения (12) называется функция $x \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Y}) \cap L_q(t_0,T;D_M)$, $q > 1$, для которой $J^{m-\alpha}_t\left(x - \sum\limits_{k=0}^{m-1} x^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right) \in W^m_q(t_0,T;\mathcal{Y})$, при этом для почти всех $t \in (t_0,T)$ выполняется равенство (12). Для уравнения (12) рассмотрим обобщённую задачу Шоуолтера — Сидорова

$$(Px)^{(k)}(t_0) = x_k,\ k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{13}$$

Её решением назовём такое решение уравнения (12), для которого выполняются условия (13).

Теорема 4. [10]. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $(\alpha - m + 1)^{-1} < q$, $f \in L_q(t_0,T;\mathcal{Y})$, при $k = 0, 1, \ldots, p$ $(GD^\alpha_t)^k M_0^{-1}(I-Q)f \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})$, $D^\alpha_t(GD^\alpha_t)^k M_0^{-1}(I-Q)f \in L_q(t_0,T;\mathcal{X})$. Тогда существует единственное сильное решение задачи* (12), (13).

4. Смешанное управление для линейного вырожденного дробного уравнения

Теперь пусть $\mathcal{U}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (L,p)-ограниченный оператор, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$, $f : (t_0,T) \to \mathcal{Y}$. Пространство управлений $\mathfrak{U} = L_q(t_0,T;\mathcal{U}) \times (\mathcal{X}^1)^m$ с нормой $\|(u,v)\|^2_{\mathfrak{U}} = \|u\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \|v\|_{(\mathcal{X}^1)^m}$. Рассмотрим задачу

$$LD_t^\alpha x(t) = Mx(t) + Bu(t),\ t \in (t_0,T), \tag{14}$$

$$(Px)^{(k)}(t_0) = v_k,\ k = 0,1,\dots,m-1, \tag{15}$$

$$(u,v) \in \mathfrak{U}_\partial, \tag{16}$$

$$J(x,u,v) \to \inf, \tag{17}$$

где непустое выпуклое замкнутое подмножество $\mathfrak{U}_\partial$ пространства $\mathfrak{U}$ — множество допустимых управлений, набор $(u,v) = (u;v_0,v_1,\dots,v_{m-1}) \in \mathfrak{U}$ задаёт управление, J — функционал качества, $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$.

Решения уравнения (14) будем искать в пространстве

$$\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) = \{x \in L_2(t_0,T;D_M) \cap C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X}) :$$
$$J_t^{m-\alpha}\left(x - \sum_{k=0}^{m-1} x^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right) \in W_q^m(t_0,T;\mathcal{X})\}, \quad q > 1.$$

Лемма 3. [15]. *$\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$ является банаховым пространством с нормой*

$$\|x\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})} = \|x\|_{L_q(t_0,T;D_M)} + \|x\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})} + \|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})}.$$

Совокупность всех наборов $(x,u,v) = (x,u,v_0,v_1,\dots,v_{m-1})$, в которых $x \in \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$ — сильное решение задачи (14), (15) с управлением $(u,v) = (u,v_0,v_1,\dots,v_{m-1}) \in \mathfrak{U}_\partial$ и $J(x,u,v) < \infty$, будем называть множеством допустимых наборов $\mathfrak{W}$ задачи (14)–(17). Задача оптимального управления (14)–(17) состоит в нахождении наборов $(\hat{x},\hat{u},\hat{v}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующих функционал качества: $J(\hat{x},\hat{u},\hat{v}) = \inf\limits_{(x,u,v)\in\mathfrak{W}} J(x,u,v)$.

Теорема 5. *Пусть $\alpha > 0$, $(\alpha - m + 1)^{-1} < q$, $p \in \mathbb{N}_0$, оператор M (L,p)-ограничен, непустое выпуклое замкнутое подмножество $\mathfrak{U}_\partial$ в $\mathfrak{U} = L_q(t_0,T;\mathcal{U}) \times (\mathcal{X}^1)^m$ содержит $(\tilde{u},\tilde{v})$, для которого $(GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I-Q)B\tilde{u} \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})$, $D_t^\alpha(GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I-Q)B\tilde{u} \in L_q(t_0,T;\mathcal{X})$ при $k = 0,1,\dots,p$; в банахово пространство $\mathfrak{Y} \subset L_q(t_0,T;\mathcal{Z})$ непрерывно вложено $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$, функционал качества J выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на $\mathfrak{Y} \times L_q(t_0,T;\mathcal{U}) \times (\mathcal{X}^1)^m$, коэрцитивный на $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) \times L_2(t_0,T;\mathcal{U}) \times (\mathcal{X}^1)^m$. Тогда существует решение $(\hat{x},\hat{u},\hat{v}) \in \mathcal{Z}_{\alpha,2}(t_0,T;\mathcal{X}) \times \mathcal{U}_\partial$ задачи (14)–(17). Если функционал J строго выпуклый на $\mathfrak{Y} \times L_2(t_0,T;\mathcal{U}) \times (\mathcal{X}^1)^m$, то решение задачи (14)–(17) единственно.*

Доказательство. По теореме 4 существует сильное решение задачи (14), (15) при $(\tilde{u},\tilde{v}) = (\tilde{u},\tilde{v}_0,\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_{m-1}) \in \mathfrak{U}_\partial$, поэтому множество $\mathfrak{W}$ непусто. Положим $\mathfrak{Y}_1 = \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$, $\mathfrak{V} = L_q(t_0,T;\mathcal{Y}) \times \mathcal{X}^m$, $\mathfrak{F} = -(f,0,0,\dots,0)$, $\mathfrak{L}(x,u,v) = (LD_t^\alpha x - Mx - Bu, \gamma_0 Px - v_0, \gamma_0(Px)^{(1)} - v_1 \dots, \gamma_0(Px)^{(m-1)} - v_{m-1})$. Непрерывность линейного оператора $\mathfrak{L} : \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ следует из неравенств

$$\|(LD_t^\alpha x - Mx - Bu, \gamma_0 Px - v_0, \gamma_0(Px)^{(1)} - v_1 \dots, \gamma_0 Px^{(m-1)} - v_{m-1})\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Y})\times\mathcal{X}^m} \le$$
$$\le C_1\left(\|x\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})} + \|u\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \|v\|_{(\mathcal{X}^1)^m}\right) \le C_2\|(x,u,v)\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})\times\mathfrak{U}}.$$

По теореме 2.3 [16, с. 17] получим требуемое утверждение. □

Из теоремы 5 для задачи с функционалом

$$J(x,u,v) = \|x - x_d\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})} + \|D_t^\alpha x - D_t^\alpha x_d\|^q_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} + \\ +\delta\|u-u_d\|^q_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \delta_1 \sum_{k=0}^{m-1} \|v_k - v_{dk}\|^2_{\mathcal{Z}} \to \inf, \tag{18}$$

с заданными $x_d \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$, $u_d \in L_q(t_0,T;\mathcal{U})$, $v_{dk} \in \mathcal{X}^1$, $k = 0,1,\dots,m-1$, $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ получим следующий результат.

Следствие 2. *Пусть $\alpha > 0$, $(\alpha - m + 1)^{-1} < q$, $p \in \mathbb{N}_0$, оператор M (L,p)-ограничен, непустое выпуклое замкнутое подмножество $\mathfrak{U}_\partial$ в $\mathfrak{U} = L_q(t_0,T;\mathcal{U}) \times (\mathcal{X}^1)^m$ содержит $(\tilde u, \tilde v)$, для которого $(GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I-Q)B\tilde u \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})$, $D_t^\alpha (GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I-Q)B\tilde u \in L_q(t_0,T;\mathcal{X})$ при $k = 0,1,\dots,p$. Тогда существует решение $(\hat x, \hat u, \hat v) \in \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) \times \mathfrak{U}_\partial$ задачи* (14)–(16), (18). *Если пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{X}$ гильбертовы и $q = 2$, то решение единственно.*

Доказательство. Достаточно взять $\mathfrak{Y} = \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$, $\mathfrak{Y}_1 = \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$, $\mathfrak{U} = L_q(t_0,T;\mathcal{U}) \times (\mathcal{X}^1)^m$, чтобы все условия теоремы 5 выполнялись. Коэрцитивность функционала на $\mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U}$ следует из цепочки неравенств:

$$\|x\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})} + \|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + \|x\|_{L_q(t_0,T;D_M)} + \|u\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \|v\|_{\mathcal{Z}^m} \le \\ \le \|x\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})} + (1 + \|L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})})\|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} + \\ +(\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Z})} + 1)\|u\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \|v\|_{\mathcal{Z}^m} \le C_1 J(z,u,v) + C_2 \le C_1 R + C_2,$$

если $J(z,u,v) \le R$. Единственность доказывается, как в следствии 1. □

5. Задача смешанного управления для системы гравитационно-гироскопических волн

В трёхмерном пространстве рассмотрим систему уравнений

$$D_t^\alpha w - [v, \overline{\omega}] + \rho_0^{-1} r + g\rho_0^{-1} e_3 \rho_1 - u = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{19}$$

$$D_t^\alpha \rho_1 - 2\beta\rho_0 w_3 + q = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{20}$$

$$\nabla \cdot w = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{21}$$

снабжённую начальными условиями

$$\frac{\partial^k w}{\partial t^k}(x,0) = \varphi_k(x), \quad k = 0,1,\dots,m-1, \quad x \in \Omega, \tag{22}$$

$$\frac{\partial^k \rho_1}{\partial t^k}(x,0) = \psi_k(x), \quad k = 0,1,\dots,m-1, \quad x \in \Omega, \tag{23}$$

и краевым условием

$$\langle w, n\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{24}$$

где $\langle \cdot,\cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. При $\alpha = 1$ она описывает малые колебания идеальной несжимаемой, равномерно вращающейся относительно вертикальной оси Ox_3 жидкости, которая экспоненциально стратифицирована [19], т. е. её плотность в невозмущённом состоянии $\rho_0(x_3) = Ae^{-2\beta x_3}$, $A, \beta > 0$. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей. Вектор-функции скорости жидкости $w = (w_1, w_2, w_3)$, градиента динамического давления $r = (r_1, r_2, r_3) = (p_{x_1}, p_{x_2}, p_{x_3})$

и вызванного движением жидкости изменения плотности ρ_1 неизвестны. Заданы векторы $e_3 = (0,0,1)$, $\overline{\omega} = \omega e_3 = (0,0,\omega)$, где ω — удвоенная угловая скорость вращения, g — ускорение свободного падения, а также единичный вектор внешней нормали $n = (n_1, n_2, n_3)$ к границе $\partial\Omega$ области Ω. Как и прежде, m — наименьшее натуральное число, не превосходимое числом $\alpha > 0$.

Пусть $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^3$, $\mathbb{H}_\sigma$ — замыкание линеала $\mathfrak{L} = \{w \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla \cdot w = 0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$, $\mathbb{H}_\pi$ — его ортогональное дополнение в $\mathbb{L}_2$, $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi = I - \Sigma$ — соответствующие ортопроекторы.

Определим оператор $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma; \mathbb{L}_2)$ по правилу $Bz = [z, \overline{\omega}]$, где $[\cdot,\cdot]$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$; $P_3 \in \mathcal{L}(\mathbb{L}_2; L_2(\Omega))$ — проектор на ось Ox_3: $P_3(z_1, z_2, z_3) = z_3$; $E_3 \in \mathcal{L}(L_2(\Omega); \mathbb{L}_2)$ — оператор умножения функции на e_3: $E_3 z = (0,0,z)$. Будут использоваться также операторы из $\mathbb{L}_2$ в $\mathbb{L}_2$ умножения вектор-функции на заданную функцию ρ_0 или ρ_0^{-1}, которые будут обозначаться символами самих функций.

Уравнение несжимаемости (21) и краевое условие (24) заменим уравнением

$$\Pi w(\cdot, t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{25}$$

(см. [20; 21] по этому поводу). Оно равносильно тому, что скорость w в каждый момент времени лежит в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$. Поскольку $r(\cdot,t) \in \mathbb{H}_\pi$ в каждый момент времени $t \in (0,T)$, возьмём

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{L}_2 \times L_2(\Omega) = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times L_2(\Omega), \quad \mathcal{U} = \mathbb{L}_2 \times L_2(\Omega), \tag{26}$$

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} \Sigma B & \mathbb{O} & -g\Sigma\rho_0^{-1}E_3 \\ \Pi B & -\rho_0^{-1} I & -g\Pi\rho_0^{-1}E_3 \\ 2\beta\rho_0 P_3 & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}). \tag{27}$$

Лемма 4. [22]. *Пусть пространства и операторы заданы формулами* (26), (27). *Тогда оператор M $(L,0)$-ограничен, проекторы имеют вид*

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \rho_0 \Pi B & \mathbb{O} & -\frac{g}{\mu}\rho_0 \Pi E_3 \rho_0^{-1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Рассмотрим задачу смешанного управления

$$\|u\|_{L_2(0,T;\mathbb{L}_2)} + \|q\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \|\varphi\|_{\mathbb{L}_2} + \|\psi\|_{L_2(\Omega)} \leq R, \tag{29}$$

$$\begin{gathered} J_q(w, r, \rho_1, u, q, \varphi, \psi) = \|w - w_d\|^2_{\mathcal{Q}_{\alpha,2}(0,T;\mathbb{H}_\sigma)} + \|r - r_d\|^2_{\mathcal{Q}_{\alpha,2}(0,T;\mathbb{H}_\pi)} + \\ + \|\rho_1 - \rho_{1d}\|^2_{\mathcal{Q}_{\alpha,2}(0,T;L_2(\Omega))} + \delta\|u - u_d\|^2_{L_2(0,T;\mathbb{L}_2)} + \delta\|q - q_d\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \\ + \delta_1 \sum_{k=0}^{m-1} \|\varphi_k - \varphi_{dk}\|^2_{\mathbb{L}_2} + \delta_1 \sum_{k=0}^{m-1} \|\psi_k - \psi_{dk}\|^2_{L_2(\Omega)} \to \inf. \end{gathered} \tag{30}$$

Получим результат о разрешимости задачи управления.

Теорема 6. *Пусть $\alpha, \delta, \delta_1 > 0$, $(\alpha - m + 1)^{-1} < 2$. Тогда существует единственное решение $(\hat{w}, \hat{r}, \hat{\rho}_1; \hat{u}, \hat{q}; \hat{\varphi}; \hat{\psi}) \in \mathcal{Z}_{\alpha,2}(0,T; \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times L_2(\Omega)) \times \mathfrak{U}_\partial$ задачи* (19), (20), (22), (23), (25), (29), (30).

Доказательство. Здесь $\mathfrak{U}_\partial$ — множество наборов функций $(u, q; \varphi; \psi) = (u, q; \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}; \psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}) \in \mathbb{L}_2 \times L_2(\Omega) \times (\mathbb{H}_\sigma)^m \times (L_2(\Omega))^m$, удовлетворяющих условию (29). В силу леммы 4 и следствия 2 сразу получим требуемое. При этом учитывается гильбертовость пространств (26), а в условиях следствия 2 взят допустимый набор с функцией $\tilde{u} \equiv 0$. □

Список литературы

1. **Mainardi, F.** The time fractional diffusion-wave equations / F. Mainardi // Radiophysics and Quantum Electronics. — 1995. — Vol. 38. — P. 13–24.
2. **Mainardi, F.** The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation / F. Mainardi, Y. F. Luchko, G. Pagnini // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2001. — Vol. 4, no. 2. — P. 153–192.
3. **Учайкин, В. В.** Метод дробных производных / В. В. Учайкин. — Ульяновск : Артишок, 2008. — 510 с.
4. **Tarasov, V. E.** Fractional dynamics / V. E. Tarasov. — Beijing : Higher Education Press, 2010. — 504 с.
5. **Плеханова, М. В.** О разрешимости задач смешанного оптимального управления линейными распределенными системами / М. В. Плеханова, А. Ф. Исламова // Изв. вузов. Математика. — 2011. — № 7. — С. 37–47.
6. **Плеханова, М. В.** Задачи с жестким смешанным управлением для линеаризованного уравнения Буссинеска / М. В. Плеханова, А. Ф. Исламова // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 4. — С. 565–576.
7. **Шуклина, А. Ф.** Задачи смешанного управления для системы Соболева / А. Ф. Шуклина, М. В. Плеханова // Челяб. физ.-мат. журн. — 2016. — Т. 1, вып. 2. — С. 78–84.
8. **Plekhanova, M. V.** Mixed control problem for the linearized quasi-stationary phase field system of equations / M. V. Plekhanova // Materials Science Forum. — 2016. — Vol. 845. — P. 170–173.
9. **Плеханова, М. В.** Задачи стартового управления для эволюционных уравнений дробного порядка / М. В. Плеханова // Челяб. физ.-мат. журн. — 2016. — Т. 1, вып. 3. — С. 16–37.
10. **Плеханова, М. В.** Сильные решения нелинейного вырожденного эволюционного уравнения дробного порядка / М. В. Плеханова // Сиб. журн. чистой и приклад. математики. — 2016. — Т. 16, № 3. — С. 61–74.
11. **Plekhanova, M. V.** Degenerate distributed control systems with fractional time derivative / M. V. Plekhanova // Ural Mathematical Journal. — 2016. — Vol. 2, no. 2. — P. 58–71.
12. **Plekhanova, M. V.** Optimal control for quasilinear degenerate systems of higher order / M. V. Plekhanova // Journal of Mathematical Sciences. — 2016. — Vol. 219. — P. 236–244.
13. **Плеханова, М. В.** Разрешимость задач управления для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка / М. В. Плеханова // Челяб. физ.-мат. журн. — 2017. — Т. 2, вып. 1. — С. 53–65.
14. **Plekhanova, M. V.** Distributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations / M. V. Plekhanova // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2017. — Vol. 312. — P. 39–46.
15. **Plekhanova, M. V.** Problems of hard control for a class of degenerate fractional order evolution equations / M. V. Plekhanova, G. D. Baybulatova // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). — 2019. — Vol. 11548 LNCS. — P. 501–512.
16. **Фурсиков, А. В.** Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков. — Новосибирск : Науч. кн., 1999. — 350 с.
17. **Bajlekova, E. G.** Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. PhD thesis / E. G. Bajlekova. — Eindhoven : University Press Facilities, Eindhoven University of Technology, 2001. — 107 p.
18. **Sviridyuk, G. A.** Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. — Utrecht, Boston : VSP, 2003.

19. **Демиденко, Г. В.** Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. — Новосибирск : Науч. кн., 1998. — 438 с.
20. **Соболев, С. Л.** Об одной новой задаче для систем уравнений в частных производных / С. Л. Соболев // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 81, № 6. — С. 1007–1009.
21. **Соболев, С. Л.** Об одной новой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — Т. 18. — С. 3–50.
22. **Плеханова, М. В.** Задачи оптимального управления для одного класса вырожденных эволюционных уравнений с запаздыванием / М. В. Плеханова, Г. Д. Байбулатова // Челяб. физ.-мат. журн. — 2018. — Т. 3, вып. 3. — С. 319–331.

Поступила в редакцию 01.02.2020
После переработки 02.03.2020

Сведения об авторах

Плеханова Марина Васильевна, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; профессор кафедры вычислительной механики, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия; e-mail: mariner79@mail.ru.

Шуклина Анна Фаридовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: isaf@csu.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2020. Vol. 5, iss. 1. P. 32–43.

DOI: 10.24411/2500-0101-2020-15103

MIXED CONTROL FOR LINEAR INFINITE-DIMENSIONAL SYSTEMS OF FRACTIONAL ORDER

M.V. Plekhanova[1,2,a], **A.F. Shuklina**[1,b]

[1] *Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*
[2] *South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia*
[a] *mariner79@mail.ru*, [b] *isaf@csu.ru*

Problem with a mixed control, start and distributed simultaneously, are considered for time-fractional order evolution equations. The results on the solvability of the mixed control problems for linear non-degenerate and degenerate equations with the Gerasimov — Caputo fractional derivative are obtained. It is shown that at some additional conditions a solution of the considered problem is unique. General results are used for consideration of abstract problems with specific quality functionals. Abstract results of the work are illustrated by the example of a mixed control problem for the time-fractional order system of gravitational-gyroscopic waves.

Keywords: *optimal control, mixed control, fractional order equation, Gerasimov — Caputo derivative, degenerate evolution equation.*

References

1. **Mainardi F.** The time fractional diffusion-wave equations. *Radiophysics and Quantum Electronics,* 1995, vol. 38, pp. 13–24.
2. **Mainardi F., Luchko Y.F., Pagnini G.** The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2001, vol. 4, no. 2, pp. 153–192.
3. **Uchaikin V.V.** *Metod drobnykh proizvodnykh* [Fractional derivatives method]. Ulyanovsk: Artishok, 2008. 510 p. (In Russ.).
4. **Tarasov V.E.** *Fractional dynamics.* Beijing: Higher education press, 2010. 504 p.
5. **Plekhanova M.V., Islamova A.F.** Solvability of mixed-type optimal control problems for distributed systems. *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, no. 7, pp. 30–39.
6. **Plekhanova M.V., Islamova A.F.** Problems with a robust mixed control for the linearized Boussinesq equation. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 4, pp. 574–585.
7. **Shuklina A.F., Plekhanova M.V.** *Zadachi smeshannogo upravleniya dlya sistemy Soboleva* [Mixed control problems for the Sobolev system]. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2016, vol. 1, no. 2, pp. 78–84. (In Russ.).
8. **Plekhanova M.V.** Mixed control problem for the linearized quasi-stationary phase field system of equations. *Materials Science Forum*, 2016, vol. 845, pp. 170–173.
9. **Plekhanova M.V.** *Zadachi startovogo upravleniya dlya evolutionnykh uravneniy drobnogo poryadka* [Start control problems for evolution equations of fractional order] *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2016, vol. 1, no. 3, pp. 16–37. (In Russ.).
10. **Plekhanova M.V.** Strong solutions to nonlinear degenerate fractional order evolution equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, no. 1, pp. 146–158.
11. **Plekhanova M.V.** Degenerate distributed control systems with fractional time derivative. *Ural Mathematical Journal*, 2016, vol. 2, no. 2, pp. 58–71.

The work is supported by Act 211 of Government of the Russian Federation, contract 02.A03.21.0011.

12. **Plekhanova M.V.** Optimal control for quasilinear degenerate systems of higher order. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 219, pp. 236–244.
13. **Plekhanova M.V.** *Razreshimost' zadach upravleniya dlya vyrozhdennykh evolutsionnykh uravneniy drobnogo poryadka* [Solvability of control problems for degenerate evolution equations of fractional order]. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2017, vol. 2, no. 1, pp. 53–65. (In Russ.).
14. **Plekhanova M.V.** Distributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017, vol. 312, pp. 39–46.
15. **Plekhanova M.V., Baybulatova G.D.** Problems of hard control for a class of degenerate fractional order evolution equations. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 2019, vol. 11548 LNCS, pp. 501–512.
16. **Fursikov A.V.** *Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications.* American Mathematical Society, 2000. 305 p.
17. **Bajlekova E.G.** *Fractional Evolution Equations in Banach Spaces.* PhD thesis. Eindhoven, University Press Facilities, Eindhoven University of Technology, 2001. 107 p.
18. **Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.** *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht, Boston, VSP, 2003.
19. **Demidenko G.V.** *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative.* New York, Basel, Marcel Dekker, Inc., 2003. 481 p.
20. **Sobolev S.L.** Ob odnoy novoy zadache dlya sistem uravneniy v chastnykh proizvodnykh [On a new problem for systems of partial differential equations]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1951, vol. 81, no. 6, pp. 1007–1009. (In Russ.).
21. **Sobolev S.L.** *Ob odnoy novoy zadache matematicheskoy fiziki* [On a new problem of mathematical physics]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR* [News of the USSR Academy of Sciences], 1954, vol. 18, pp. 3–50. (In Russ.).
22. **Plekhanova M.V., Baybulatova G.D.** *Zadachi optimal'nogo upravleniya dlya odnogo klassa vyrozhdennykh evolyutsionnykh uravneniy s zapazdyvaniyem* [Optimal control problems for a class of degenerate evolution equations with delay]. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2018, vol. 3, no. 3, pp. 319-331. (In Russ.).

Accepted article received 01.02.2020
Corrections received 02.03.2020