Челябинский физико-математический журнал. 2020. Т. 5, вып. 1. С. 22–31.

УДК 517.983.23 DOI: 10.24411/2500-0101-2020-15102

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ. I

Л. Н. Ляхов[1,2,a], **Н. И. Трусова**[2,b]

[1] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
[2] *Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семёнова-Тян-Шанского, Липецк, Россия*
[a] *levnlya@mail.ru*, [b] *trusova.nat@gmail.com*

Рассмотрены два вида линейных интегральных операторов с частными интегралами, определёнными на функциях, заданных в конечном прямоугольнике $D = D_1 \times D_2$ евклидова пространства точек $\mathbb{R}_2$. Операторы первого вида построены по типу интегралов Романовского и изучены в нормах пространства $C(D_1; L_p(D_2))$ — непрерывных функций на $\overline{D}_1$ со значениями в лебеговом классе $L_p(D_2)$. Для операторов общего вида доказана их принадлежность классу линейных ограниченных операторов из анизотропного класса функций L_{p,p^2} при $p > 1$ в класс функций со смешанной нормой $C(D_1; L_p(D_2))$.

Ключевые слова: *функции со значением в банаховом пространстве, частный интеграл, линейный оператор с частными интегралами, частный интеграл Романовского, анизотропные классы функций Лебега.*

1. Операторы с частными интегралами

Частными интегралами называются интегральные выражения, в которых интегрирование происходит по части координат области задания функции. Например,

$\int_\Omega k(t_1, t_2, \tau)\, f(\tau)\, d\tau$ — интегральный оператор,

$\int_\Omega k(t_1, t_2, \tau)\, f(t_1, \tau)\, d\tau$ — частный интеграл [1].

Конструкция частного интеграла приводит к необходимости работать с функциями, имеющими различные свойства по разным переменным (анизотропные функции, см. [2] и [3]), т. е. функция f и ядро оператора k должны быть интегрируемы только по части переменных области их определения. Этому свойству удовлетворяют непрерывные функции с носителями в ограниченной области, поэтому наиболее исследуемой оказывается C-теория частных интегралов (см. работу [4] и книги [1; 5; 6]).

В этой работе исследуются частные интегралы K в случае, когда функция $(Kf)(x)$ окажется непрерывной только по части переменных. Причём ядро оператора k и трансформируемая оператором функция f также непрерывны по этой части переменных. По оставшимся переменным требуется принадлежность лебеговым классам $L_{\mathbf{r}}$ с мультииндексом $\mathbf{r}$, состоящим из конечных чисел, превосходящих единицу (разумеется, мультииндекс $\mathbf{r}$ может быть и просто числом). Нами рассмотрен наиболее простой случай: аргументы ядра частного интеграла K и функции f принадлежат евклидову пространству $\mathbb{R}_2$. При этом функция $Kf = (Kf)(x_1, x_2)$, определённая в $D_1 \times D_2$, принадлежит пространству непрерывных функций $C(D_1)$ со значением в банаховом пространстве $L_r(D_2)$. Этот класс функций обозначается $C\left(D_1; L_r(D_2)\right)$ (см. [2, с. 19]). По определению полагаем

$$f \in C\left(D_1; L_r(D_2)\right), \quad \text{если} \quad \|f\|_{C(D_1;L_r(D_2))} = \sup_{x_1 \in \overline{D}_1} \left(\int_{D_2} |f(x)|^r \, dx_2 \right)^{1/r} < \infty \, .$$

Для удобства записи это пространство обозначается символом $CL_{\mathbf{r}}$.

Класс функций $CL_{\mathbf{r}}$ с введённой выше нормой является банаховым пространством (см. [2, с. 19]). Отметим, что природа частных интегралов привела к необходимости использовать анизотропные лебеговы пространства функций (см. [3, с. 9, формула (1)]), определяемых нормой, например, при $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$

$$\|u\|_{L_{\mathbf{r}}(D)} = \left(\int\limits_{D_2} \left[\int\limits_{D_1} |\, u(x_1, x_2)|^{r_1} \, dx_1 \right]^{r_2/r_1} dx_2 \right)^{1/r_2} < \infty \, .$$

Пусть $D = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ — конечный прямоугольник в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_2$. Для областей интегрирования евклидовой размерности $m = 1$ или $m = 2$ введём следующие обозначения: $D_1^{(1)} = (a_1, b_1)$, $D_2^{(1)} = (a_2, b_2)$, $D_{1,2}^{(2)} = D = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$. Аргументы $x = (x_1, x_2)$ и $t = (t_1, t_2)$ принадлежат евклидову пространству точек $\mathbb{R}^2$.

Через $C(D)$ обозначим функциональный класс непрерывных в ограниченном прямоугольнике $D = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ функций с нормой $\|u\|_{C(D)} = \sup\limits_{x \in \overline{D}} |u(x)|$. Как известно, это банахово пространство.

Следуя [1], линейный интегральный оператор с частными интегралами (далее примем сокращение ЛЧИ-оператор) рассмотрим в виде суммы операторов

$$K = K_0^0 + K_1^{(1)} + K_2^{(1)} + K_{1,2}^{(2)}, \tag{1}$$

где

$$(K_0^0 u)(x) = k_0(x) u(x);$$

$$(K_1^{(1)} u)(x) = \int\limits_{D_1^{(1)}} k_1(x; t_1) u(t_1, x_2) dt_1; \tag{2}$$

$$(K_2^{(1)} u)(x) = \int\limits_{D_2^{(1)}} k_2(x; t_2) u(x_1, t_2) dt_2; \tag{3}$$

$$(K_{1,2}^{(2)} u)(x) = \int\limits_{D_{1,2}^{(2)}} k_{1,2}(x; t) u(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \, . \tag{4}$$

В определении (1) слагаемое K_0 — оператор умножения на функцию, слагаемые $K_1^{(1)}$ и $K_2^{(1)}$ — частные интегралы, слагаемое $K_{1,2}^{(2)}$ — интегральный оператор. Таким образом, оператор (1) содержит интегралы, в которых функция $u = u(x)$ зависит и от переменной интегрирования и от «свободной» (от интегрирования) переменной. Свойства операторов K_0^0 и $K_{1,2}^{(2)}$ хорошо известны (в отличие от свойств частных интегралов), и далее, в большей мере, изучаются свойства частных интегралов, из которых формируются свойства ЛЧИ-оператора K (1).

Для удобства записи оператора K в общей для его слагаемых форме введём обозначение: $x = (x_1, x_2) = (x^\alpha, t_\alpha)$, полагая, что t_α — переменная (переменные) интегрирования, а x^α — переменная (переменные), свободная от интегрирования. Мультииндекс α принимает три значения $\{1; 2; 1,2\}$, при этом

если $\alpha = 1$, то $(x^\alpha, t_\alpha) = (t_1, x_2)$;

если $\alpha = 2$, то $(x^\alpha, t_\alpha) = (x_1, t_2)$;

если $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (1, 2)$, то $(x^\alpha, t_\alpha) = (x; t) = (x_1, x_2; t_1, t_2)$.

Эти обозначения дают возможность записать все составляющие оператора K с частными интегралами (1) в одном и том же виде:

$$(Ku)(x) = \sum_\alpha \int\limits_{D_\alpha^{(m)}} k_\alpha^{(m)}(x; t_\alpha) u(x^\alpha, t_\alpha) dt_\alpha,$$

где мы полагаем, что слагаемое с индексом $\alpha = 0$ (при этом $m = 0$) не содержит переменных интегрирования (т. е. это оператор умножения на функцию k_0); слагаемые с индексом $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ — частные интегралы с переменной интегрирования, принадлежащей интервалу $D_\alpha^{(1)} = (a_i, b_i) \subset \mathbb{R}^1$ $(i = 1, 2)$; слагаемое с двойным индексом $\alpha = (1, 2)$ — интегральный оператор $K_{1,2}^{(2)}$ с прямоугольной областью интегрирования $D_{1,2}^{(2)} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$. Для оператора (1) будем также использовать единую (и короткую) запись:

$$(Ku)(x) = \sum_\alpha (K_\alpha^{(m)} u)(x).$$

2. Непрерывность операторов с частными интегралами в $C(D)$

В данной работе оператор K применяется к функциям $u = u(x, t_\alpha)$, принадлежащим классу непрерывных функций со значениями в лебеговом классе функций, т. е. таких функций, что

$$g(x) = \left(\int\limits_{D_\alpha^{(m)}} |u(x, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right)^{1/p} = \|u(x)\|_{L_p(D_\alpha^{(m)})} \in C(D)\,.$$

Здесь справа по переменной t_α стоит норма лебегова пространства, от которой требуется непрерывность по аргументу x в ограниченном замкнутом множестве из $\mathbb{R}_1$ или $\mathbb{R}_2$. Следуя [2, с. 19], это множество обозначим $C\,(a_i, b_i;\, L_p(D_\alpha))$. Сокращая запись — $C(L_p(D_\alpha^{(m)}))$, где m — размерность области интегрирования, а α указывает номера переменных интегрирования. Если параметры m и α ясны из контекста, то используем более короткое обозначение CL_p. В функциональном классе CL_p введём норму

$$\|u\|_{C(L_p)} = \sup_{x \in \overline{D}} \|u(x)\|_{L_p(D_\alpha^{(m)})} = \sup_{x \in \overline{D}} \left(\int\limits_{D_\alpha^{(m)}} |u(x, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right)^{1/p}.$$

Ядра $k_\alpha(x; t_\alpha)$ операторов, входящих в ЛЧИ-оператор K, назовём $L_p(D_\alpha^{(m)})$-непрерывными в $\overline{D} \in \mathbb{R}_2$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, $x_0 \in \overline{D}$ и $|x - x^0| < \delta$ следует $\|k_\alpha(x) - k_\alpha(x^0)\|_{L_p(D_\alpha^{(m)})} < \varepsilon$ (здесь

$|x-x^0| = \sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2}$). Множество таких ядер обозначим $C(L_p(D_\alpha^{(m)}))$. Как уже говорилось, этот класс ядер образует банахово пространство.

В связи с анизотропностью рассматриваемых функций введём методику В. И. Романовского исследования частных интегралов в $\mathbb{R}^2$ (см. работу [4] или книгу [5, с. 265]). Для этого необходимо положить, что область D — это конечный квадрат $(a,b)\times(a,b)$ в $\mathbb{R}^2$, и ввести оператор перестановки координат аргумента функции: $\Pi u(x_1,x_2) = u(x_2,x_1)$. Характерной особенностью операторов Романовского является то, что сначала производится перестановка переменных в аргументе функции, стоящей под знаком интеграла, и лишь затем интегрирование по переменной t_2, по которой наша функция обладает L_p нормой.

Отметим свойства этого оператора:

1) оператор Π непрерывен из $C(L_p)$ в $C(L_p)$;

2) $\|\Pi\| = 1$;

3) $\Pi\cdot\Pi = I$, где I — единичный оператор.

Методика Романовского применяется при исследовании ЛЧИ-оператора K следующего вида:

$$K = K_1^{(1)} + K_2^{(1)}\Pi + K_{1,2}^{(2)}. \tag{5}$$

Составляющие данного оператора имеют вид (2), (3) и (4) соответственно, но частный интеграл $K_2^{(1)}$ «подправлен» оператором перестановки Π:

$$(K_2^{(1)}\Pi u)(x) = \int\limits_{D_2^{(1)}} k_2(x;t_2)u(t_2,x_1)dt_2.$$

Имеем

$$\|Ku\|_C = \sup_{x\in\overline{D}}\left|K_1^{(1)}u(x) + K_2^{(1)}\Pi u(x) + K_{1,2}^{(2)}u(x)\right| \le$$

$$\le \sup_{x\in\overline{D}}\left|K_1^{(1)}u(x)\right| + \sup_{x\in\overline{D}}\left|K_2^{(1)}\Pi u(x)\right| + \sup_{x\in\overline{D}}\left|K_{1,2}^{(2)}u(x)\right|. \tag{6}$$

Докажем ограниченность каждого слагаемого в этой сумме. Вначале применим неравенство Гёльдера для соответствующего интеграла по ограниченной области $D_\alpha^{(m)}$ (которая является интервалом при $m=1$ и прямоугольником при $m=2$; разумеется, мы учитываем, что при $m=2$ функция $u(x^\alpha,t_\alpha) = u(t)$, $t=(t_1,t_2)$).

Имеем для ЛЧИ-оператора $K_\alpha^{(m)}$ в общем виде

$$|K_\alpha^{(m)}u(x)| = \left|\int\limits_{D_\alpha^{(m)}} k_\alpha(x;t_\alpha)u(x^\alpha,t_\alpha)dt_\alpha\right| \le$$

$$\le \left(\int\limits_{D_\alpha^{(m)}} |k_\alpha(x;t_\alpha)|^q dt_\alpha\right)^{1/q}\left(\int\limits_{D_\alpha^{(m)}} |u(x^\alpha,t_\alpha)|^p dt_\alpha\right)^{1/p},$$

где $1/q+1/p=1$.

Пусть $m=1$ и $\alpha=1$, тогда

$$\|K_1^{(1)}u\|_{C(D)} = \sup_{x\in\overline{D}}\left|\int\limits_{D_1^{(1)}} k_1(x;t_1)\,u(t_1,x_2)\,dt_1\right| \le$$

$$
\leq \sup_{x\in\overline{D}} \left(\int\limits_{D_1^{(1)}} |k_1(x;t_1)|^q dt_1 \right)^{1/q} \sup_{x_2\in[a_2,b_2]} \left(\int\limits_{D_1^{(1)}} |u(t_1,x_2)|^p dt_1 \right)^{1/p} .
$$

Следовательно,

$$
\|K_1^{(1)}u\|_{C(D)} \leq C_1 \, \|u\|_{C(L_p)} \, , \quad C_1 = \sup_{x\in\overline{D}} \left(\int\limits_{D_1^{(1)}} |k_1(x;t_1)|^q dt_1 \right)^{1/q} = \|k\|_{C(L_q)}. \qquad (7)
$$

Для частного интеграла Романовского $K_2^{(1)}\Pi$ с учётом действия оператора перестановки справедлива аналогичная оценка:

$$
|K_2^{(1)}\Pi u(t)| = \left| \int\limits_{D_2^{(1)}} k_2(x;t_2)u(t_2,x_1)dt_2 \right| \leq
$$

$$
\leq \left(\int\limits_a^b |k_2(x;t_2)|^q dt_2 \right)^{1/q} \left(\int\limits_a^b |u(t_2,x_1)|^p dt_2 \right)^{1/p} .
$$

Откуда

$$
\|K_2^{(1)}\Pi u\|_{C(D)} \leq C_2 \, \|u\|_{C(L_p)} \, , \quad C_2 = \sup_{x\in\overline{D}} \left(\int\limits_a^b |k_2(x;t_2)|^q dt_2 \right)^{1/q} = \|k\|_{C(L_q)}. \qquad (8)
$$

Отметим, что нормы функции u в правых частях неравенств (7) и (8) совпадают.

Для интегрального оператора $K_{1,2}^{(2)}$ известно, что

$$
\|K_{1,2}^{(2)}u\|_{C(D)} \leq C_3 \, \|u\|_{L_p} \, , \quad C_3 = \sup_{x\in\overline{D}} \left(\iint\limits_D |k_{1,2}(x;t)|^q dt_1 \, dt_2 \right)^{1/q} = \|k\|_{C(L_q)}. \qquad (9)
$$

Введём в рассмотрение функциональный класс

$$
\mathcal{K}(D) = \left\{ C\left(D_1^{(2)}; L_p(D_2^{(1)})\right) \cap L_p(D) \right\} ,
$$

полагая, что

$$
u \in \mathcal{K}(D), \quad \text{если} \quad \|u\|_{\mathcal{K}(D)} = \max\left\{ \|u\|_{C\left(D_1^{(2)}; L_p(D_2^{(1)})\right)}; \, \|u\|_{L_p(D)} \right\} < \infty \, . \qquad (10)
$$

Тогда из (6), учитывая неравенства (7), (8) и (9) и определение (10), получим $\|K\|_{C(D)} \leq C \, \|u\|_{\mathcal{K}(D)}$, где $C = C_1 + C_2 + C_3$.

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функциональный класс* $\mathcal{K}(D)$ *определён соотношением* (10). *Тогда линейный интегральный оператор с частными интегралами* (5) *непрерывен из* $\mathcal{K}(D)$ *в* $C\left(D_1^{(2)}; L_p(D_2^{(1)})\right)$.

Из доказанной теоремы вытекает следующее утверждение, которое получено в [1, с. 268] (см. также [6, с. 38]) на основе теоремы Банаха о замкнутом графике.

Следствие 1. *Если ядра частных интегралов $K_\alpha^{(m)}$, входящих в оператор K, непрерывны, то K — непрерывный оператор в $C(D)$.*

Доказательство с очевидностью вытекает из того факта, что все ядра k_α, непрерывные в замкнутой области, принадлежат одновременно и пространствам $L_p(D_\alpha^{(m)})$ для всех возможных в рамках данной работы α и любого конечного числа $p > 1$.

3. Непрерывность оператора с частными интегралами в анизотропных классах Лебега

Анизотропные лебеговские классы функций введены С. М. Никольским. По определению (см. [3, с. 9]) полагаем

$$u = u(x_1, x_2) \in L_{\mathbf{r}}(D), \ \ D = D_1 \times D_2, \ \ \mathbf{r} = (r_1, r_2),$$

если

$$\|u\|_{L_{\mathbf{r}}(D)} = \left(\int\limits_{D_2} \left[\int\limits_{D_1} |\, u(x_1, x_2)|^{r_1} \, dx_1 \right]^{r_2/r_1} dx_2 \right)^{1/r_2} < \infty \, .$$

Рассмотрим оператор K вида (1). В данном случае будем предполагать, что к частным интегралам K применяется смешанная норма следующего вида:

$$\|Kf\|_{C(D;L_{\mathbf{r}})} = \sup_{x^\alpha \in \overline{D}_\alpha} \|Kf(x^\alpha)\|_{L_{\mathbf{r}}(D_{\overline{\alpha}}^{(m)})} \, ,$$

где $\overline{\alpha}$ — номер переменной интегрирования, а через x^α обозначены свободные от интегрирования переменные в этом выражении. Так же, как раньше, соответствующий класс функций будем обозначать $C\left(D_\alpha; L_{(r_1,r_2)}(D_{\overline{\alpha}}^{(m)})\right)$, где m — размерность области интегрирования, а индекс $\overline{\alpha}$ содержит номера переменных интегрирования. Для удобства записи будем обозначать этот класс функций $CL_{\mathbf{r}}$. Данный класс функций является банаховым пространством (см. [2, с. 19]). Мы используем подобный анизотропный класс функций при доказательстве ограниченности оператора с частными интегралами (1).

Пусть p, q — взаимно сопряжённые числа, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$.

Рассмотрим K_0, предполагая, что

$$u(x_1, x_2) \in C\left(a_1, b_1\, ;\, L_{p^2}(a_2, b_2)\right) = CL_{p^2}.$$

Имеем

$$\|K_0 u\|_{CL_p} = \sup_{x_1 \in [a_1, b_1]} \left[\int\limits_{D_2^{(1)}} |\, k_0(x_1, x_2) \ u(x_1, x_2)\, |^p \, dx_2 \right]^{1/p} .$$

Применив неравенство Гёльдера с показателями p и q, получим

$$\|K_0 u\|_{CL_p} \le \sup_{x_1 \in [a_1, b_1]} \left[\int\limits_{D_2^{(1)}} |\, k_0(x_1, x_2)|^{pq} \, dx_2 \right]^{1/pq} \left[\int\limits_{D_2^{(1)}} |\, u(x_1, x_2)\, |^{p^2} \, dx_2 \right]^{1/p^2} \le$$

$$\leq \sup_{x_1\in[a_1,b_1]} \left(\|k_0(x_1)\|_{L_{pq}(a_2,b_2)} \, \|u(x_1)\|_{L_{p^2}(a_2,b_2)} \right).$$

Предположив, что $k_0 \in C\,(a_1,b_1; L_{pq}(a_2,b_2)) = CL_{pq}$, получим

$$\|K_0 u\|_{CL_p} \leq C_0 \, \|u\|_{CL_{p^2}}, \quad C_0 = \|k_0\|_{CL_{pq}}. \tag{11}$$

Теперь рассмотрим функцию $(K_1^{(1)}u)(x)$. Имеем

$$\|K_1^{(1)}u\|_{CL_p} = \sup_{x_1\in[a_1,b_1]} \left(\int\limits_{D_2^{(1)}} \left[\int\limits_{D_1^{(1)}} |\, k_1(x;t_1)\; u(t_1,x_2)\,|\, dt_1 \right]^p dx_2 \right)^{1/p}.$$

К внутреннему интегралу применим неравенство Гёльдера с показателями p и q. В результате запишем

$$\|K_1^{(1)}u\|_{CL_p} \leq \sup_{x_1\in[a_1,b_1]} \left(\int\limits_{D_2^{(1)}} \left[\int\limits_{D_1^{(1)}} |\, k_1(x;t_1)|^q \, dt_1 \right]^{p/q} \left[\int\limits_{D_1^{(1)}} |u(t_1,x_2)\,|^p \, dt_1 \right] dx_2 \right)^{1/p}.$$

Применяя повторно к внешнему интегралу неравенство Гёльдера с теми же показателями (сопряжёнными) p и q, имеем

$$\|K_1^{(1)}u\|_{CL_p} \leq \sup_{x_1\in[a_1,b_1]} \left(\int\limits_{D_2^{(1)}} \left[\int\limits_{D_1^{(1)}} |\, k_1(x;t_1)|^q \, dt_1 \right]^{pq/q} dx_2 \right)^{1/pq} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{D_2^{(1)}} \left[\int\limits_{D_1^{(1)}} |\, u(t_1,x_2)|^p \, dt_1 \right]^{p^2/p} dx_2 \right)^{1/p^2}.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\|K_1^{(1)}u\|_{CL_p} \leq C_1 \|u\|_{L_{p,p^2}}, \quad C_1 = \|k_1\|_{CL_{q,pq}}, \tag{12}$$

где L_{r,r^2} — анизотропное функциональное пространство Лебега.

Рассмотрим функцию

$$(K_2^{(1)}u)(t) = \int\limits_{D_2^{(1)}} k_2(x;t_2)\, u(x_1,t_2) dt_2 \,.$$

Имеем

$$\|K_2^{(1)}u\|_{CL_p} = \sup_{x_1\in[a_1,b_1]} \left(\int\limits_{D_2^{(1)}} \left[\int\limits_{D_2^{(1)}} |\, k_2(x;t_2)\; u(x_1,t_2)\,|\, dt_2 \right]^p dx_2 \right)^{1/p}.$$

К внутреннему интегралу применим неравенство Гёльдера с показателями p и q, затем уже к внешнему интегралу применим неравенство Гёльдера с теми же показателями степени. В результате получим

$$\|K_2^{(1)}u\|_{CL_p} \leq \sup_{x_1\in[a_1,b_1]} \left(\int\limits_{D_2^{(1)}} \left[\int\limits_{D_2^{(1)}} |\, k_2(x;t_2)|^q \, dt_2 \right]^{pq/q} dx_2 \right)^{1/pq} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{D_2^{(1)}} \left[\int\limits_{D_2^{(1)}} |u(x_1,t_2)\,|^p\, dt_2 \right]^{p^2/p} dx_2 \right)^{1/p^2}.$$

Тем самым имеем следующую оценку:

$$\|K_2^{(1)}u\|_{CL_p} \le C_2 \|u\|_{CL_{p,p^2}}, \quad C_2 = \|k_2\|_{CL_{q,pq}}, \tag{13}$$

где L_{r_1,r_2} — анизотропное функциональное пространство Лебега.

Наконец, рассмотрим функцию

$$(K_{1,2}^{(2)}u)(t) = \int\limits_{D_{1,2}^{(2)}} k_{1,2}(x;t)\, u(t_1,t_2) dt_1 dt_2\,.$$

Имеем

$$\|K_{1,2}^{(2)}u\|_{CL_p} = \sup_x \left\| \int\limits_{D_{1,2}^{(2)}} |\, k_{1,2}(x;t)\;\; u(t_1,t_2)\,|\, dt_1 dt_2 \right\|_{L_p}.$$

Применяем к интегральному оператору $K_{1,2}^{(2)}$ обобщённое неравенство Минковского:

$$\|K_{1,2}^{(2)}u\|_{CL_p} \le \int\limits_{D_{1,2}^{(2)}} \|\, k_{1,2}(t)\|_{L_p} |u(t_1,t_2)|\, dt_1 dt_2.$$

К внешнему интегралу применяем неравенство Гёльдера с показателями p и q, тогда

$$\|K_{1,2}^{(2)}u\|_{CL_p} \le \left(\int\limits_{D_{1,2}^{(2)}} \left\| k_{1,2}(t) \right\|_{L_p}^q dt_1 dt_2 \right)^{1/q} \left(\int\limits_{D_{1,2}^{(2)}} |u(t_1,t_2)|^p\, dt_1 dt_2 \right)^{1/p}.$$

В результате получаем

$$\|K_{1,2}^{(2)}u\|_{CL_p} \le C_3 \|u\|_{L_p}, \quad C_3 = \|k_{1,2}\|_{L_{p,q}}. \tag{14}$$

Теорема 2. *Пусть* $u \in CL_{p,p^2}$ *и ядра операторов* $K_0^0, K_1^{(1)}, K_2^{(1)}, K_{1,2}^{(2)}$ *имеют конечные нормы* (11)—(14) *соответственно. Тогда оператор* K *непрерывен в* $C(D)$.

Доказательство. Имеем

$$\|Ku\|_{CL_p} = \sup_{x\in D} \left| K_0^0 u(x) + K_1^{(1)}u(x) + K_2^{(1)}u(x) + K_{1,2}^{(2)}u(x) \right| \le$$

$$\le \sup_{x\in D} \left| K_0^0 u(x) \right| + \sup_{x\in D} \left| K_1^{(1)}u(x) \right| + \sup_{x\in D} \left| K_2^{(1)}u(x) \right| + \sup_{x\in D} \left| K_{1,2}^{(2)}u(x) \right|. \tag{15}$$

Учитывая оценки (11)—(14), получим следующее представление правой части (15):

$$\|Ku\|_C \le C_0 \|u\|_{CL_{p^2}} + C_1 \|u\|_{CL_{p,p^2}} + C_2 \|u\|_{CL_{p,p^2}} + C_3 \|u\|_{L_p}.$$

Если $p > 1$, то $p^2 > p$, поэтому функция, интегрируемая по конечной области в степени p^2, всегда интегрируема в степени p.

Поскольку ЛЧИ-оператор K применяется к одной и той же функции $u = u(x)$, то её норму представим в виде максимального значения одной из её норм

$$\|u\| = \max\left\{ \|u\|_{CL_{p^2}},\ \|u\|_{CL_{p,p^2}},\ \|u\|_{CL_{p,p^2}},\ \|u\|_{L_p} \right\}.$$

Таким образом, имеем $\|Ku\|_{CL_p} \le (C_0 + C_1 + C_2 + C_3)\|u\|$. $\square$

Список литературы

1. **Appell, J. M.** Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J. M. Appell, A. S. Kalitvin, P. P. Zabrejko. — New York : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.
2. **Лионс, Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. — М. : Мир, 1972. — 587 с.
3. **Бесов, О. В.** Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. — М. : Наука, 1975. — 478 с.
4. **Romanovsky, V.** Sur une class d'équations intégrales linéaires / V. Romanovsky // Acta Mathematica. — 1932. — Vol. 59. — P. 99—208.
5. **Романовский, В. И.** Избранные труды. Т. 2 : Теория вероятностей, статистика и анализ / В. И. Романовский. — Ташкент : Наука, 1964. — 390 с.
6. **Калитвин, А. С.** Линейные уравнения с частными интегралами. C-теория / А. С. Калитвин, Е. В. Фролова. — Липецк : ЛГПУ, 2004. — 195 с.

Поступила в редакцию 07.02.2020
После переработки 02.03.2020

Сведения об авторах

Ляхов Лев Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; профессор кафедры математики и физики, Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия; e-mail: levnlya@mail.ru.

Трусова Наталья Ивановна, старший преподаватель кафедры математики и физики, Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия; e-mail: trusova.nat@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2020. Vol. 5, iss. 1. P. 22–31.

DOI: 10.24411/2500-0101-2020-15102

BOUNDEDNESS OF OPERATORS WITH PARTIAL INTEGRALS WITH THE MIXED NORM. I

L.N. Lyakhov[1,2,a], **N.I. Trusova**[2,b],

[1] *Voronezh State University, Voronezh, Russia*
[2] *Lipetsk State Pedagogical University named after P.P. Semenov-Tyan-Shanskiy, Lipetsk, Russia*
[a] *levnlya@mail.ru*, [b] *trusova.nat@gmail.com*

Two types of linear integral operators with partial integrals are considered, which are defined on functions given in a finite rectangle $D = D_1 \times D_2$ of the Euclidean point space $\mathbb{R}_2$. Operators of the first type are constructed according to the type of Romanovsky integrals and are studied in the space $C(D_1; L_p(D_2))$ norms, space of continuous functions on $\overline{D_1}$ with values in the Lebesgue class $L_p(D_2)$. For general operators, the authors prove that they belong to the class of linear bounded operators from the anisotropic class of functions L_{p,p^2} for $p > 1$ to the class of functions with a mixed norm $C(D_1; L_p(D_2))$.

Keywords: *function with values in a Banach space, partial integral, linear operator with partial integrals, Romanovsky partial integral, anisotropic classes of Lebesgue functions.*

References

1. **Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P.** *Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations.* New York, Marcel Dekker, 2000. 560 p.
2. **Lions J.L.** *Quelques Methodes de Resolution des Problemes aux Limites Non Lineares.* Paris, Dunod, 1969.
3. **Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skii S.M.** *Integral'nye predstavleniya functsiy i teoremy vlozheniya* [Integral representations of functions and embedding theorems]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 478 p. (In Russ.).
4. **Romanovsky V.** Sur une class d'équations intégrales linéaires. *Acta Mathematica*, 1932, vol. 59, pp. 99–208.
5. **Romanovsky V.I.** *Izbrannye trudy. Tom 2. Teoriya veroyatnostey, statistika i analiz* [Selected works. Vol. 2: Theory of probabilities, statistics and analysis]. Tashkent, Nauka Publ., 1964. 390 p. (In Russ.).
6. **Kalitvin A.S., Frolova E.V.** *Lineynye uravneniya s chastnymi integralami. C-teoriya* [Linear equations with partial integrals. C-theory]. Lipetsk, Lipetsk State Pedagogical University, 2004. 195 p. (In Russ.).

Accepted article received 07.02.2020
Corrections received 02.03.2020