МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2020. Т. 5, вып. 1. С. 5–21.

УДК 517.955+517.956 DOI: 10.24411/2500-0101-2020-15101

ВОПРОСЫ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ И ПРИБЛИЖЁННОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ГЁЛЬДЕРОВОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

А. В. Авилович[1,a], **Д. М. Гордиевских**[2,b], **В. Е. Федоров**[1,3,c]

[1] *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
[2] *Шадринский государственный педагогический университет, Шадринск, Курганская обл., Россия*
[3] *Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия*
[a] *avilovich_aas@bk.ru,* [b] *dm_gordiev@mail.ru,* [c] *kar@csu.ru*

Исследуются вопросы однозначной разрешимости и приближённой управляемости линейных эволюционных уравнений дробного порядка, как разрешённых относительно дробной производной Римана — Лиувилля (невырожденных), так и содержащих необратимый оператор при ней (вырожденных). Предполагается, что оператор в правой части невырожденного уравнения или пара операторов в вырожденном уравнении порождает аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов соответствующего однородного уравнения. Получены новые результаты о разрешимости неоднородных уравнений таких классов с непрерывной по Гёльдеру функцией в правой части, которые позволили найти критерии приближённой управляемости вырожденной системы за фиксированное время, за свободное время, а также в случае систем с конечномерным входом. Начальное состояние вырожденной системы управления при этом задаётся условиями типа Шоуолтера — Сидорова. На основе полученных абстрактных результатов найден критерий приближённой управляемости распределённой системы управления, динамика которой описывается линеаризованной системой уравнений Навье — Стокса дробного порядка по времени.

Ключевые слова: *дробная производная Римана — Лиувилля, аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов, вырожденное эволюционное уравнение, условие Гёльдера, приближённая управляемость.*

1. Введение

Рассмотрим эволюционное уравнение дробного порядка

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + f(t), \quad t \in (0, T], \tag{1}$$

где $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $L : D_L \to \mathcal{Y}$, $M : D_M \to \mathcal{Y}$ — линейные замкнутые операторы, плотно определённые в пространстве $\mathcal{X}$, $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, D_t^α —

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, грант 19-41-450001, грант 19-31-90008, поддержке Правительства РФ, акт 211, контракт 02.A03.21.0011.

производная Римана — Лиувилля, $f : [0, T] \to \mathcal{Y}$. Предполагается, что $\ker L \neq \{0\}$ (в таком случае уравнение называется вырожденным), а пара операторов (L, M) порождает аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов однородного уравнения (1). Ранее в работе [1] исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи типа Шоуолтера — Сидорова

$$D_t^{\alpha-m+k} Lx(0) = y_k \in \mathcal{Y}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2}$$

для уравнения (1) и получен вид решения задачи (1), (2). Для этого сначала исследована задача типа Коши $D_t^{\alpha-m+k} z(0) = z_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для соответствующего разрешённого относительно дробной производной уравнения

$$D_t^{\alpha} z(t) = Az(t) + g(t) \tag{3}$$

с линейным замкнутым оператором A, порождающим аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов однородного уравнения $D_t^{\alpha} z(t) = Az(t)$. Важно при этом использовать по возможности наименее обременительные условия на гладкость функции g. В работе [1] было использовано условие непрерывности в норме графика оператора A. В приложениях к уравнениям в частных производных такое условие означает бо́льшую гладкость g по пространственным переменным, чем в случае её непрерывности в обычной норме. Одной из главных целей данной работы является отказ от не очень удобного условия непрерывности в норме графика и тем самым ослабление условия на функцию g в смысле гладкости по пространственным переменным за счёт усиления требований к её гладкости по времени. Такая цель была достигнута путём использования условия гёльдеровости функции g по переменной t. Полученная теорема об однозначной разрешимости задачи типа Коши для уравнения (3) с гёльдеровой функцией g позволила соответствующим образом модифицировать и результаты о существовании единственного решения задачи (1), (2).

Условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) используются при исследовании приближённой управляемости системы управления вида

$$D_t^{\alpha} Lx(t) = Mx(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t \in (0, T], \tag{4}$$

где $B : [0, T] \to \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$, $\mathcal{U}$ — некоторое банахово пространство, $u : [0, T] \to \mathcal{U}$ — функция управления. Начальное состояние вырожденной системы управления при этом задаётся условиями типа Шоуолтера — Сидорова. В [2] авторами были получены критерии приближённой управляемости системы (4) на основе результатов [1], использующие условие непрерывности по норме графика неограниченного оператора функций в правой части уравнения. В данной работе аналогичные результаты получены при условии гёльдеровости функций в правой части уравнения, которое проще проверяется в приложениях. Получены критерии в терминах операторов из уравнения для приближённой управляемости вырожденной системы (4) за фиксированное и за свободное время. Они использованы, в частности, при рассмотрении вырожденных систем управления с конечномерным входом. На основе полученных абстрактных результатов найден критерий приближённой управляемости распределённой системы управления, динамика которой описывается линеаризованной системой уравнений Навье — Стокса дробного порядка по времени.

Вопросы управляемости различных классов вырожденных ($\ker L \neq \{0\}$) систем вида (1) порядка $\alpha = 1$ исследовались в работах [3–9]. Для вырожденных систем дробного порядка $\alpha > 0$ с производной Герасимова — Капуто при условии

(L, p)-ограниченности оператора M, гарантирующем существование аналитического в разрезанной плоскости разрешающего семейства операторов вырожденного уравнения, критерии приближённой управляемости получены в [10–12]. Случай производной Герасимова — Капуто и пары операторов (L, M), порождающей аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов, как в данной работе, исследован в работе [13].

2. Разрешимость невырожденной задачи типа Коши

Введём обозначения $g_\beta(t) := t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$ при $t > 0$, $\beta > 0$,

$$J_t^\beta h(t) := (g_\beta * h)(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^t (t-s)^{\beta-1} h(s) ds.$$

При $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$ обозначим через D_t^α производную Римана — Лиувилля, т. е. $D_t^\alpha h(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha} h(t)$, где D_t^m — обычная производная порядка m.

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — банахово пространство всех линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathcal{Z}$ в $\mathcal{Z}$, $\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ — множество всех линейных замкнутых плотно определённых в $\mathcal{Z}$ операторов, действующих в $\mathcal{Z}$. Через D_A будем обозначать область определения оператора $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, снабжённую нормой его графика.

Будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\alpha > 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, если оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) при всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0\}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$;

(ii) для всех $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K = K(\theta, a) > 0$, что при любом $\lambda \in S_{\theta,a}$

$$\|(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda - a)|}.$$

Замечание 1. При $\alpha \in (0, 2)$ оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ удовлетворяет условиям (i) и (ii), если и только если существует аналитическое в секторе $\Sigma_{\theta_0} := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta_0 - \pi/2,\ t \neq 0\}$ экспоненциально ограниченное разрешающее семейство операторов линейного однородного уравнения $D_t^\alpha z(t) = Az(t)$ (см. теорему 2.14 [14], а также её более общий вариант [15]).

Замечание 2. По теореме Соломяка — Иосиды оператор A принадлежит классу $\mathcal{A}_1(\theta_0, a_0)$ тогда и только тогда, когда порождает аналитическую в секторе Σ_{θ_0} полугруппу операторов [16; 17]. При этом оператор A называется секториальным.

Лемма 1. [1]. *Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\Gamma := \partial S_{a,\theta}$ при некоторых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$. Тогда при каждом $\beta \in \mathbb{R}$ семейство операторов*

$$\left\{ Z_\beta(t) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \mu^{\alpha-1+\beta} (\mu^\alpha I - A)^{-1} e^{\mu t} d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) :\ t > 0 \right\}$$

допускает аналитическое продолжение в сектор Σ_{θ_0}. При этом для любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $C_\beta = C_\beta(\theta, a)$, что при всех $t \in \Sigma_\theta$

$$\|Z_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_\beta(\theta, a) e^{a\mathrm{Re} t} (|t|^{-1} + a)^\beta, \quad \beta \geq 0, \tag{5}$$

$$\|Z_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C_\beta(\theta, a)e^{a\mathrm{Re}t}|t|^{-\beta}, \quad \beta < 0. \tag{6}$$

Замечание 3. Можно показать, что если оператор A ограничен в пространстве $\mathcal{Z}$, то $Z_\beta(t) = t^\beta E_{\alpha,\beta+1}(t^\alpha A)$, где $E_{\alpha,\beta+1}$ — функция Миттаг-Лёффлера.

Рассмотрим задачу типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k}z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{7}$$

для неоднородного уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0, T], \tag{8}$$

где $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $T > 0$, $f \in C([0,T]; \mathcal{Z})$. Решением задачи (7), (8) называется такая функция $z \in C((0,T]; D_A)$, для которой $g_{m-\alpha} * z \in C^{m-1}([0,T]; \mathcal{Z}) \cap C^m((0,T]; \mathcal{Z})$ и выполняются равенства (7) и (8) при всех $t \in (0, T]$.

Здесь и далее $D_t^\beta z(0) := \lim\limits_{t\to 0+} D_t^\beta z(t)$ в $\mathcal{Z}$.

Через $C^\gamma([0,T]; \mathcal{Z})$, $\gamma \in (0,1]$, будем обозначать множество таких функций $f : [0,T] \to \mathcal{Z}$, что для некоторого $C > 0$ и для всех $t, s \in [0,T]$ выполняется неравенство $\|f(t) - f(s)\|_{\mathcal{Z}} \le C|t-s|^\gamma$, при этом по определению

$$\|f\|_{C^\gamma([0,T];\mathcal{Z})} = \inf_{t,s\in[0,T]} \frac{\|f(t) - f(s)\|_{\mathcal{Z}}}{|t-s|^\gamma}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $f \in C^\gamma([0,T]; \mathcal{Z})$, $\gamma \in (0,1]$. *Тогда при любых* $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, *существует единственное решение задачи* (7), (8). *При этом оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t)z_k + \int_0^t Z_{1-\alpha}(t-s)f(s)ds. \tag{9}$$

Доказательство. В [1] доказано, что сумма $\sum\limits_{k=0}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t)z_k$ при $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, является решением задачи типа Коши (7) для однородного уравнения $D_t^\alpha z(t) = Az(t)$.

Обозначим $Z_f(t) := \int\limits_0^t Z_{1-\alpha}(t-s)f(s)ds$. Для $\alpha > 1$ в силу (6) $Z_{1-\alpha}^{(k)}(0) = Z_{1-\alpha+k}(0) = 0$ для всех $k = 0, 1, \dots, m-2$, так как $\alpha - k > 1$. Поэтому при $\alpha > 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$

$$Z_f^{(k)}(t) = \int_0^t Z_{1-\alpha}^{(k)}(t-s)f(s)ds.$$

В силу (5) при $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$

$$\|Z_f^{(m-1)}(t)\| \le t \max_{s\in[0,t]} \|Z_{1-\alpha}^{(m-1)}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \max_{s\in[0,T]} \|f(s)\|_{\mathcal{Z}} \le$$

$$\le C_{m-\alpha}(\theta, a)e^{at}t^{\alpha+1-m}(1+at)^{m-\alpha}\|f\|_{C([0,T];\mathcal{Z})} \to 0 \text{ при } t \to 0+.$$

Так как

$$AZ_{1-\alpha}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma A(\mu^\alpha I - A)^{-1}e^{\mu t}d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mu^\alpha(\mu^\alpha I - A)^{-1}e^{\mu t}d\mu = Z_1(t),$$

то $\mathrm{im} Z_{1-\alpha}(t) \subset D_A$ при $t > 0$. Более того, при $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_0^{t-\varepsilon} AZ_{1-\alpha}(t-s)f(s)ds = \int\limits_0^{t-\varepsilon} Z_1(t-s)(f(s)-f(t))ds + \int\limits_0^{t-\varepsilon} Z_0^{(1)}(t-s)f(t)ds =$$

$$= \int\limits_0^{t-\varepsilon} Z_1(t-s)(f(s)-f(t))ds + (Z_0(t)-Z_0(\varepsilon))f(t). \qquad (10)$$

Из условий на f и неравенств (5) следует, что $\|Z_1(t-s)(f(s)-f(t))\|_{\mathcal{Z}} \leq C|t-s|^{\gamma-1}$, поэтому $Z_f(t) \in D_A$ и выражение (10) стремится к

$$\int\limits_0^{t} Z_1(t-s)(f(s)-f(t))ds + (Z_0(t)-I)f(t) = AZ_f(t)$$

при $\varepsilon \to 0+$. Кроме того, $AZ_f(t) \to 0$ при $t \to 0+$. Таким образом, $Z_f \in C([0,T];D_A)$. Здесь использован тот факт, что $\lim\limits_{t\to 0+} Z_0(t) = I$ (см., например, [14; 18]).

Через $\widehat{h}$ обозначим преобразование Лапласа функции h. Определим Z_β и f нулём вне отрезка $[0,T]$, тогда $Z_f = Z_{1-\alpha} * f$ является свёрткой, поэтому $\widehat{Z_f} = \widehat{Z_{1-\alpha}}\widehat{f}$. При $\mathrm{Re}\lambda > a_0$

$$\widehat{Z_{1-\alpha}} = \int\limits_0^{t} \frac{e^{-\lambda t}}{2\pi i}\int\limits_\Gamma (\mu^\alpha I - A)^{-1}e^{\mu t}d\mu dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{1}{\lambda-\mu}(\mu^\alpha I - A)^{-1}d\mu = R_{\lambda^\alpha}(A),$$

следовательно, $\widehat{Z_f} = R_{\lambda^\alpha}(A)\widehat{f}$ на полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda > a_0\}$. Как в [1], легко может быть доказано, что $D_t^{\alpha-m+k}Z_f(0) = 0$, $k = 0,1,\ldots,m-1$. Используя формулу преобразования Лапласа для производной Римана — Лиувилля (см., например, [17]), получим

$$\widehat{D_t^\alpha Z_f} = \lambda^\alpha \widehat{Z_f} - \sum_{l=0}^{m-1}\lambda^l D_t^{\alpha-m+l}Z_f(0) = AR_{\lambda^\alpha}(A)\widehat{f} + \widehat{f} = A\widehat{Z_f} + \widehat{f} = \widehat{AZ_f} + \widehat{f}.$$

Действуя на обе части этого равенства обратным преобразованием Лапласа, получим, что Z_f является решением задачи (7) с $z_k = 0$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, для уравнения (8) и (9) — решение общей задачи (7), (8).

Если существует два решения $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$ задачи (7), (8), то их разность $z = \tilde{z}_1 - \tilde{z}_2$ является решением задачи (7) с $z_k = 0$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, для уравнения $D_t^\alpha z(t) = Az(t)$. Действуя преобразованием Лапласа на обе части этого равенства, получим $\widehat{D_t^\alpha z} = \lambda^\alpha \widehat{z} = A\widehat{z}$, следовательно, $\widehat{z} \equiv 0$ на $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda > a_0\}$, так как $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Таким образом, $z(t) \equiv 0$. □

Замечание 4. Аналогичный результат для задачи Коши для уравнения вида (8) с дробной производной Герасимова — Капуто получен в работе [19]. Для уравнения (8) с функцией $f \in C([0,T];D_A)$ случай с производной Римана — Лиувилля и условиями типа Коши исследован в [1], с производной Герасимова — Капуто и условиями Коши — в [18; 20].

3. Разрешимость задачи типа Шоуолтера — Сидорова

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, $\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — множество всех линейных замкнутых плотно определённых в $\mathcal{X}$ операторов, действующих в пространство $\mathcal{Y}$. В предположении, что $L, M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, множество точек $\mu \in \mathbb{C}$, для которых оператор $\mu L - M : D_L \cap D_M \to \mathcal{Y}$ инъективен и при этом $(\mu L - M)^{-1}L \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $L(\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, называется L-резольвентным множеством $\rho^L(M)$ оператора M. Обозначим $R^L_\mu(M) := (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) := L(\mu L - M)^{-1}$.

При $\alpha > 0$, $L, M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ будем говорить, что пара операторов (L, M) принадлежит классу $\mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, если

(i) существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ и $a_0 \geq 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ выполняется $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$;

(ii) при всех $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такая константа $K = K(\theta, a) > 0$, что для любого $\lambda \in S_{\theta,a}$

$$\max\left\{\|R^L_{\lambda^\alpha}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L^L_{\lambda^\alpha}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\right\} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda - a)|}.$$

Замечание 5. Если существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})$, то $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ в том и только в том случае, когда $L^{-1}M \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ и $ML^{-1} \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Будем использовать обозначения $\ker L = \ker R^L_\mu(M) := \mathcal{X}^0$, $\ker L^L_\mu(M) := \mathcal{Y}^0$. Через $\mathcal{X}^1$ ($\mathcal{Y}^1$) обозначим замыкание образа $\mathrm{im} R^L_\mu(M)$ ($\mathrm{im} L^L_\mu(M)$) в норме пространства $\mathcal{X}$ ($\mathcal{Y}$), а через L_k (M_k) — сужение оператора L (M) на $D_{L_k} := D_L \cap \mathcal{X}^k$ ($D_{M_k} := D_M \cap \mathcal{X}^k$), $k = 0, 1$. Как и прежде, будем использовать контур $\Gamma := \partial S_{a,\theta}$ при некоторых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$.

Теорема 2. [21; 22]. *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Тогда*

(i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;

(ii) *проектор P (Q) на подпространство $\mathcal{X}^1$ ($\mathcal{Y}^1$) вдоль $\mathcal{X}^0$ ($\mathcal{Y}^0$) имеет вид* $P = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} nR^L_n(M)$ $(Q = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} nL^L_n(M))$;

(iii) $L_0 = 0$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$, $L_1, M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$;

(iv) *существуют операторы* $L_1^{-1} \in \mathcal{C}l(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$;

(v) $\forall x \in D_L$ $Px \in D_L$ *и* $LPx = QLx$;

(vi) $\forall x \in D_M$ $Px \in D_M$ *и* $MPx = QMx$;

(vii) *если* $S := L_1^{-1}M_1 : D_S \to \mathcal{X}^1$, *то* $D_S := \{x \in D_{M_1} : M_1x \in \mathrm{im}L_1\}$ *плотно в пространстве* $\mathcal{X}$;

(viii) *если* $V := M_1L_1^{-1} : D_V \to \mathcal{Y}^1$, *то* $D_V := \{y \in \mathrm{im}L_1 : L_1^{-1}y \in D_{M_1}\}$ *плотно в пространстве* $\mathcal{Y}$;

(ix) *если* $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ *или* $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, *то* $S \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$;

(x) *если* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ *или* $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, *то* $V \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$;

(xi) *семейства операторов*

$$\left\{X_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{\alpha-1+\beta} R^L_{\mu^\alpha}(M)e^{\mu t}d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : t > 0\right\},\ \beta \in \mathbb{R},$$

$$\left\{Y_\beta(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{\alpha-1+\beta}L^L_{\mu^\alpha}(M)e^{\mu t}d\mu\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}):\ t>0\right\},\ \beta\in\mathbb{R},$$

аналитически продолжимы в сектор Σ_{θ_0}. *При любых* $\theta\in(\pi/2,\theta_0)$, $a>a_0$ *существует такое* $C_\beta=C_\beta(\theta,a)$, *что для каждого* $t\in\Sigma_\theta$

$$\max\{\|X_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})},\|Y_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\}\leq C_\beta(\theta,a)e^{a\mathrm{Re}t}(|t|^{-1}+a)^\beta,\quad \beta\geq 0, \tag{11}$$

$$\max\{\|X_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})},\|Y_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\}\leq C_\beta(\theta,a)e^{a\mathrm{Re}t}|t|^{-\beta},\quad \beta<0. \tag{12}$$

Решением вырожденного ($\ker L\neq\{0\}$) уравнения

$$D^\alpha_t Lx(t)=Mx(t)+f(t),\quad t\in(0,T], \tag{13}$$

с заданным $f\in C([0,T];\mathcal{Y})$ называется $x\in C((0,T];D_M)$, для которого $g_{m-\alpha}*Lx\in C^m((0,T];\mathcal{Y})$ и при всех $t\in(0,T]$ выполняется равенство (13). Решением задачи типа Шоуолтера — Сидорова

$$D^{\alpha-m+k}_t Lx(0)=y_k,\quad k=0,1,\ldots,m-1, \tag{14}$$

для уравнения (13) называется такое решение x этого уравнения, что $g_{m-\alpha}*Lx\in C^{m-1}([0,T];\mathcal{X})$ и выполняются начальные условия (14).

Замечание 6. Условия (14) являются естественными для слабо вырожденных уравнений, когда подпространство вырождения $\mathcal{X}^0$ совпадает с ядром $\ker L$ оператора L при производной.

Теорема 3. *Пусть банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(a_0,\theta_0)$, $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ *или* $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $Qf(t)\in\mathrm{im}L$ *при* $t\in[0,T]$, $L_1^{-1}Qf\in C^\gamma\big([0,T];\mathcal{X}^1\big)$, $\gamma\in(0,1]$, $(I-Q)f\in C((0,T];\mathcal{Y})$, $y_k\in L_1[D_{L_1^{-1}M_1}]$, $k=0,1,\ldots,m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (13), (14), *при этом оно имеет вид*

$$x(t)=\sum_{k=0}^{m-1}X_{m-\alpha-k}(t)L_1^{-1}y_k+\int\limits_0^t X_{1-\alpha}(t-s)L_1^{-1}Qf(s)ds-M_0^{-1}(I-Q)f(t). \tag{15}$$

Доказательство. Обозначим $x^0(t):=(I-P)x(t)$, $x^1(t):=Px(t)$. Согласно теореме 2 уравнение (13) редуцируется к системе двух уравнений

$$0=x^0(t)+M_0^{-1}(I-Q)f(t),$$

$$D^\alpha_t x^1(t)=Sx^1(t)+L_1^{-1}Qf(t). \tag{16}$$

При $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ или $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ по теореме 2 (ix) $S\in\mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$, поэтому в силу теоремы 1 существует единственное решение задачи типа Коши $D^{\alpha-m+k}_t x^1(0)=L_1^{-1}y_k$, $k=0,1,\ldots,m-1$, для уравнения (16), при этом

$$x^1(t)=\sum_{k=0}^{m-1}Z_{m-\alpha-k}(t)L_1^{-1}y_k+\int\limits_0^t Z_{1-\alpha}(t-s)L_1^{-1}Qf(s)ds,$$

а в силу очевидного равенства $R_{\mu^\alpha}(S)=R^{L_1}_{\mu^\alpha}(M_1)$

$$Z_{m-\alpha-k}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{m-1-k}R_{\mu^\alpha}(S)e^{\mu t}d\mu=X_{m-\alpha-k}(t)|_{\mathcal{X}^1},$$

$$Z_{1-\alpha}(t-s)L_1^{-1}Qf(s) = X_{1-\alpha}(t-s)L_1^{-1}Qf(s).$$

Таким образом, $x(t) = x^1(t) - M_0^{-1}(I-Q)f(t)$ имеет вид (15). □

Теорема 4. *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны,* $(L,M) \in \mathcal{H}_\alpha(a_0,\theta_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ *или* $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, $Qf \in C^\gamma\big([0,T);\mathcal{Y}^1\big)$, $\gamma \in (0,1]$, $(I-Q)f \in C((0,T];\mathcal{Y})$, $y_k \in D_{M_1L_1^{-1}}$, $k = 0,1,\ldots,m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (13), (14), *при этом оно имеет вид* (15).

Доказательство. Вместо уравнения (16) запишем уравнение

$$D_t^\alpha y(t) = Vy(t) + Qf(t), \tag{17}$$

где $y(t) = L_1x^1(t)$. Согласно теореме 2 (x) в случае $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ имеем $V \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$, следовательно, существует единственное решение задачи типа Коши $D_t^{\alpha-m+k}y(0) = y_k \in D_V$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, для уравнения (17). Её решение имеет вид

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t)y_k + \int_0^t Z_{1-\alpha}(t-s)Qf(s)ds =$$

$$= L_1\sum_{k=0}^{m-1} X_{m-\alpha-k}(t)L_1^{-1}y_k + L_1\int_0^t X_{1-\alpha}(t-s)L_1^{-1}Qf(s)ds,$$

где

$$Z_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mu^{\alpha-1+\beta}R_{\mu^\alpha}(T)e^{\mu t}d\mu = Y_\beta(t)|_{\mathcal{Y}^1} = L_1X_\beta(t)L_1^{-1}$$

в силу равенств $R_{\mu^\alpha}(T) = L_{\mu^\alpha}^{L_1}(M_1) = L_1R_{\mu^\alpha}^{L_1}(M_1)L_1^{-1}$ и замкнутости L_1. □

Замечание 7. Теоремы об однозначной разрешимости задачи типа Коши $D_t^{\alpha-m+k}x(0) = x_k$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, для уравнения (13) могут быть получены дословным повторением рассуждений из доказательств теорем 3, 4, но при этом возникнут дополнительные условия согласования $D_t^{\alpha-m+k}|_{t=0}(I-P)M_0^{-1}(I-Q)f(t) = -(I-P)x_k$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, необходимые для разрешимости такой задачи.

Замечание 8. Аналогичные теоремы об однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения вида (13) с дробной производной Герасимова — Капуто доказаны в работе [13]. Для уравнения (13) результаты с использованием непрерывности правой части по норме графика оператора $L_1^{-1}M_1$ или $M_1L_1^{-1}$ случай с производной Римана — Лиувилля и условиями типа Шоуолтера — Сидорова исследован в [1], а задача Шоуолтера — Сидорова для уравнения (13) с производной Герасимова — Капуто — в работе [20]. В [13] и [20] исследована также задача Коши, а в [1] — задача типа Коши для (13).

4. Критерии приближённой управляемости вырожденной системы

Известно, что задача Коши (или типа Коши в случае производной Римана — Лиувилля) для вырожденного уравнения (4) является переопределённой и требует согласования правой части уравнения с начальными данными. Поэтому в работах [3–12] при исследовании вопросов приближённой управляемости много усилий было приложено для того, чтобы доказать существование нужной функции управления, удовлетворяющей дополнительным условиям согласования с выбранными начальными данными Коши (типа Коши). В работах [2; 13] было замечено, что такие проблемы не возникают, если в качестве условий, определяющих исходное состояние управляемой системы, использовать условия Шуолтера — Сидорова (типа Шоуолтера — Сидорова) в случае производной Герасимова — Капуто (Римана — Лиувилля). Исследование вопросов приближённой управляемости вырожденной системы в таком случае существенно упрощается, поэтому в данной работе также будут использованы условия типа Шоуолтера — Сидорова для определения начального состояния вырожденной системы управления.

Часто удобнее при исследовании приближённой управляемости использовать теорему 4, поскольку в целом её условия несколько менее обременительны, чем условия теоремы 3 (см. аналогичную ситуацию в [2; 13]). Однако для этого необходимо выполнение условия $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ (условие $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ не даёт результата при доказательстве теоремы 5, см. далее). Если это условие не выполняется, как в рассматриваемом в завершении этой работы приложении, необходимо пользоваться условиями теоремы 3, что и будет здесь сделано.

Далее $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{U}$ — банахово пространство, $(L,M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$. Обозначим через $C^\gamma_{L_1^{-1}Q}([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$ при $\gamma \in (0,1]$ линейное пространство всех оператор-функций $B \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, для которых $\mathrm{im}QB(t) \subset \mathrm{im}L$ при $t \in [0,T]$, $L_1^{-1}QB \in C^\gamma\big([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})\big)$. Аналогично $C^\gamma_{L_1^{-1}Q}([0,T];\mathcal{Y})$ при $\gamma \in (0,1]$ — множество всех $g \in C([0,T];\mathcal{Y})$, для которых $Qg(t) \in \mathrm{im}L$ при $t \in [0,T]$, $L_1^{-1}Qg \in C^\gamma\big([0,T];\mathcal{Y}\big)$.

Далее всегда предполагается, что $B \in C^\gamma_{L_1^{-1}Q}([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, $g \in C^\gamma_{L_1^{-1}Q}([0,T];\mathcal{Y})$ при некотором $\gamma \in (0,1]$. Функции управления $u(\cdot)$ для системы, описываемой задачей типа Шоуолтера — Сидорова

$$D_t^{\alpha-m+k}Lx(0) = y_k, \quad k = 0,1,\dots,m-1, \tag{18}$$

$$D_t^{\alpha}Lx(t) = Mx(t) + B(t)u(t) + g(t), \tag{19}$$

будут выбираться из пространства $C^\gamma([0,T];\mathcal{U})$, поэтому $Bu \in C^\gamma_{L_1^{-1}Q}\big([0,T];\mathcal{Y}\big)$.

По теореме 2 задача (18), (19) при $y_k \in \mathrm{im}L$, $k = 0,1,\dots,m-1$, может быть редуцирована к начальной задаче

$$D_t^{\alpha-m+k}x^1(0) = L_1^{-1}y_k, \quad k = 0,1,\dots,m-1, \tag{20}$$

для системы уравнений

$$D_t^{\alpha}x^1(t) = Sx^1(t) + L_1^{-1}QB(t)u(t) + L_1^{-1}Qg(t), \tag{21}$$

$$x^0(t) = -M_0^{-1}(I-Q)(B(t)u(t) + g(t)) \tag{22}$$

на подпространствах $\mathcal{X}^1$ и $\mathcal{X}^0$ соответственно. Здесь $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1)$, $x^1(t) = Px(t)$, $x^0(t) = (I-P)x(t)$.

Обозначим через $x(T;\overline{y};u)$ значение в момент времени T решения задачи (18), (19) с начальными данными $\overline{y} = (y_0,y_1,\dots,y_{m-1})$ в (18) и с функцией управления u в правой части уравнения (19). Через $x^1(T;\overline{y};u)$ будем обозначать значение в момент T решения подсистемы, описываемой соотношениями (20), (21). Наконец, через $x^0(T;u)$ обозначим значение при $t = T$ функции (22).

Система (19) называется приближённо управляемой за время $T > 0$, если для всех $\varepsilon > 0$, $\overline{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}) \in (L[D_S])^m$ в (18), $\hat{x} \in \mathcal{X}$ найдётся такое $u \in C^\gamma([0,T];\mathcal{U})$, что $\|x(T;\overline{y};u) - \hat{x}\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon$.

Система (21) называется приближённо управляемой за время $T > 0$, если при любых $\varepsilon > 0$, $\hat{x}^1 \in \mathcal{X}^1$, $\overline{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}) \in (L[D_S])^m$ в (20) существует такое $u \in C^\gamma([0,T];\mathcal{U})$, что $\|x^1(T;\overline{y};u) - \hat{x}^1\|_{\mathcal{X}^1} \leq \varepsilon$.

Система (22) называется приближённо управляемой за время $T > 0$, если при любых $\varepsilon > 0$, $\hat{x}^0 \in \mathcal{X}^0$ существует такое $u \in C^\gamma([0,T];\mathcal{U})$, что выполняется неравенство $\|x^0(T;u) - \hat{x}^0\|_{\mathcal{X}^0} \leq \varepsilon$.

Аналогично определяется приближённая управляемость за свободное время. Система (19) называется приближённо управляемой за свободное время, если для любых $\varepsilon > 0$, $\hat{x} \in \mathcal{X}$, $\overline{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}) \in (L[D_S])^m$ в (18) существуют $T > 0$ и функция управления $u \in C^\gamma([0,T];\mathcal{U})$, такие, что $\|x(T;\overline{y};u) - \hat{x}\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon$.

Теорема 5. *Пусть* $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ *или* $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $B \in C^\gamma_{L_1^{-1}Q}([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, $g \in C^\gamma_{L_1^{-1}Q}([0,T];\mathcal{Y})$. *Тогда система* (19) *приближённо управляема за время* T *(за свободное время), если и только если подсистемы* (21) *и* (22) *приближённо управляемы за время* T *(за свободное время).*

Доказательство. Нетривиальным является только утверждение о приближённой управляемости всей системы при условии приближённой управляемости её подсистем. Рассмотрим сначала понятие приближённой управляемости за время T. Пусть

$$\forall \hat{x}^0 \in \mathcal{X}^0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists u^0 \in C^\gamma([0,T];\mathcal{U})$$
$$\left\| -M_0^{-1}(I-Q)(B(T)u^0(T) + g(T)) - \hat{x}^0 \right\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon/3,$$

$$\forall \overline{y} \in (L[D_S])^m \ \forall \hat{x}^1 \in \mathcal{X}^1 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists u^1 \in C^\gamma([0,T];\mathcal{U}) \ \ \|x^1(T;\overline{y};u^1) - \hat{x}^1\|_{\mathcal{Y}} \leq \varepsilon/3.$$

Выберем новую функцию управления u, для которой $u(t) = u^1(t)$ для $t \in [0, \delta]$ при некотором $\delta \in (T/2, T)$ и $u(t) = u^1(\delta) + \nu(t-\delta)^\gamma$ при $t \in (\delta, T]$,

$$\nu = \frac{u^0(T) - u^1(\delta)}{(T-\delta)^\gamma}.$$

Тогда $u \in C^\gamma([0,T];\mathcal{U})$, $u(T) = u^0(T)$,

$$u(t) = u^1(\delta) + \frac{(t-\delta)^\gamma}{(T-\delta)^\gamma}\left(u^0(T) - u^1(\delta)\right), \quad t \in (\delta, T],$$

$$\|u(t)\|_{\mathcal{U}} \leq C := 2\max_{t\in[0,T]}\|u^1(t)\|_{\mathcal{U}} + \|u^0(T)\|_{\mathcal{U}}, \quad t \in [0,T],$$

где C не зависит от δ. Возьмём достаточно малое $T - \delta > 0$, $\hat{x} \in \mathcal{X}$, тогда при $\hat{x}^0 = (I-P)\hat{x}$, $\hat{x}^1 = P\hat{x}$ в силу (15)

$$\|x(T;\overline{y};u) - \hat{x}\|_{\mathcal{X}} \leq \|x^0(T;u^0) - \hat{x}^0\|_{\mathcal{X}} + \|x^1(T;\overline{y};u^1) - \hat{x}^1\|_{\mathcal{X}} +$$

$$+\|x^1(T;\overline{y};u) - x^1(T;\overline{y};u^1)\|_{\mathcal{X}} \leq 2\varepsilon/3 + C\int\limits_\delta^T \|X_{1-\alpha}(T-s)L_1^{-1}QB(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{X})}ds \leq \varepsilon.$$

В силу неравенства (11) при $\alpha \in (0,1]$ и неравенства (12) при $\alpha > 1$ последний интеграл можно сделать сколько угодно малым по норме при достаточно малом $T - \delta$.

Утверждение о приближённой управляемости за свободное время доказывается так же, как предыдущаее утверждение. При построении новой функции управления надо взять время T управления невырожденной подсистемой (21) (в данном случае это время для подсистем разное). $\square$

Рассуждая, как в работе [2], в которой использовался другой класс функций управления, нетрудно получить критерии приближённой управляемости за фиксированное и за свободное время вырожденной системы управления.

Теорема 6. *Пусть* $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ *или* $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $B\in C^\gamma_{L_1^{-1}Q}([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, $g\in C^\gamma_{L_1^{-1}Q}([0,T];\mathcal{Y})$, $\gamma\in(0,1]$. *Тогда*

(i) *система* (19) *приближённо управляема за время* T, *если и только если*

$$\overline{\mathrm{im}}M_0^{-1}(I-Q)B(T)=\mathcal{X}^0,\ \overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{im}X_{1-\alpha}(T-s)L_1^{-1}QB(s):0<s<T\}=\mathcal{X}^1;$$

(ii) *система* (19) *приближённо управляема за свободное время, если и только если*

$$\overline{\bigcup_{T>0}}\mathrm{im}M_0^{-1}(I-Q)B(T)=\mathcal{X}^0,$$
$$\overline{\bigcup_{T>0}}\mathrm{span}\{\mathrm{im}X_{1-\alpha}(T-s)L_1^{-1}QB(s):0<s<T\}=\mathcal{X}^1.$$

Пусть заданы $b_i:[0,T]\to\mathcal{Y}$, $i=1,2,\dots,n$. Рассмотрим систему управления

$$D_t^\alpha Lx(t)=Mx(t)+\sum_{i=1}^n b_i(t)u_i(t)+g(t), \tag{23}$$

где $u_i:[0,T]\to\mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,n$, являющуюся частным случаем системы (19) при $\mathcal{U}=\mathbb{R}^n$, $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$, $B(t)u(t)=\sum\limits_{i=1}^n b_i(t)u_i(t)$. Такие системы управления называются системами с конечномерным входом. Функции управления $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ будут выбираться из $C^\gamma([0,T];\mathbb{R}^n)$, $\gamma\in(0,1]$. Из теоремы 6 сразу получим следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть* $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ *или* $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $b_i\in C^\gamma_{L_1^{-1}Q}([0,T];\mathcal{Y})$, $i=1,2,\dots,n$, $g\in C^\gamma_{L_1^{-1}Q}([0,T];\mathcal{Y})$, $\gamma\in(0,1]$. *Тогда*

(i) *система с конечномерным входом* (23) *приближённо управляема за время* T, *если и только если справедливы равенства*

$$\mathrm{span}\,\{(I-Q)b_i(T):\ i=1,2,\dots,n\}=\mathcal{Y}^0,$$

$$\overline{\mathrm{span}}\{X_{1-\alpha}(T-s)L_1^{-1}Qb_i(s):\ 0<s<T,\,i=1,2,\dots,n\}=\mathcal{X}^1;$$

(ii) *система с конечномерным входом* (23) *приближённо управляема за свободное время, если и только если*

$$\overline{\bigcup_{T>0}}\mathrm{span}\left\{M_0^{-1}(I-Q)b_i(T):\ i=1,2,\dots,n\right\}=\mathcal{X}^0,$$

$$\overline{\bigcup_{T>0}}\mathrm{span}\{X_{1-\alpha}(T-s)L_1^{-1}Qb_i(s):0<s<T,\,i=1,2,\dots,n\}=\mathcal{X}^1.$$

Замечание 9. Из следствия 1 видно, что если система (23) приближённо управляема за время $T>0$, то размерность подпространств $\mathcal{X}^0$ и $\mathcal{Y}^0$ не больше n. В таком случае $M_0\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$.

5. О приближённой управляемости линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса дробного порядка по времени

Рассмотрим систему управления, описываемую соотношениями

$$D_t^{\alpha-m+k}w(x,0) = w_k(x), \quad x \in \Omega, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{24}$$

$$w(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{25}$$

$$D_t^{\alpha}w(x,t) = \nu\Delta w(x,t) - r(x,t) + b(x,t)u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T], \tag{26}$$

$$\nabla \cdot w(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T]. \tag{27}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\nu > 0$. Неизвестны вектор-функции скорости $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ и градиента давления $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) = \nabla p$.

Замечание 10. При $\alpha = 1$ система уравнений (26), (27) является линеаризованной системой уравнений Навье — Стокса.

Введём обозначения $\mathbb{L}_2 := (L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1 := (W_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2 := (W_2^2(\Omega))^n$. Замыкание линеала $\mathcal{L} := \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot v = 0\}$ в норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а в норме $\mathbb{H}^1$ — символом $\mathbb{H}_\sigma^1$. Также будем использовать следующие обозначения: $\mathbb{H}_\sigma^2 := \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi = I - \Sigma$ — соответствующие ортопроекторы.

Оператор $A := \Sigma\Delta$, продолженный до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$, имеет действительный отрицательный дискретный конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$ [23]. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ собственные значения этого оператора, занумерованные по невозрастанию с учётом их кратности. Ортонормированная система соответствующих собственных функций $\{\varphi_k\}$ образует базис в $\mathbb{H}_\sigma$ [23].

Положим

$$\mathcal{X} := \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi, \quad \mathcal{Y} := \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi, \tag{28}$$

$$L := \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \quad M := \begin{pmatrix} \nu A & \mathbb{O} \\ \nu\Pi\Delta & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}). \tag{29}$$

Тогда $x(t) := (w(\cdot,t), r(\cdot,t)) \in \mathcal{X}$. Заданная функция $b \in C^\gamma([0,T]; \mathbb{L}_2)$, $\gamma \in (0,1]$, определяет оператор, действующий на функции управления $u \in C^\gamma([0,T]; L_2(\Omega))$. При этом $\mathcal{U} := L_2(\Omega)$. Если же рассматривать функции управления u не зависящими от x, т. е. вместо уравнения (26) рассматривать уравнение

$$D_t^{\alpha}w(x,t) = \nu\Delta w(x,t) - r(x,t) + b(x,t)u(t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{30}$$

с $u \in C^\gamma([0,T]; \mathbb{R})$, то (25), (27), (30) — система управления с одномерным входом, $\mathcal{U} := \mathbb{R}$.

Лемма 2. [1]. *Пусть $\nu > 0$, пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ имеют вид* (28), *а операторы L и M определены формулами* (29). *Тогда $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, при этом проекторы P и Q имеют вид*

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \nu\Pi\Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Замечание 11. Из вида проекторов P, Q следует, что $\mathcal{X}^0 = \ker P = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{X}^1 = \mathrm{im}P = \{(z, \nu\Pi\Delta z) : z \in \mathbb{H}_\sigma^2\}$, $\mathcal{Y}^0 = \ker Q = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{Y}^1 = \mathrm{im}Q = \mathbb{H}_\sigma \times \{0\}$. Отсюда в частности следует, что (24) — условия Шоуолтера — Сидорова.

Замечание 12. Очевидно, что в данном случае $L_1, M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$. Можно показать также, что $M^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})$. Оператор L_1^{-1} не является непрерывным из $\mathcal{Y}^1$ в $\mathcal{X}^1$ как обратный оператор для оператора вложения из $\mathbb{H}_\sigma^2$ в $\mathbb{H}_\sigma$.

Отсюда сразу видно, что система (25), (27), (30) не является приближённо управляемой за заданное время в силу замечания 9. Аналогичные соображения в данном случае справедливы и для системы (25)–(27), которая, таким образом, также не является приближённо управляемой за заданное время.

Теорема 7. *Пусть* $\nu > 0$, $b \in C^\gamma\big([0,T]; \mathbb{L}_2\big)$, $\Sigma b \in C^\gamma\big([0,T]; \mathbb{H}_\sigma^2\big)$, $\gamma \in (0,1]$. *Тогда система с одномерным входом* (25), (27), (30) *является приближённо управляемой за свободное время в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия*:

(i) *множество* $\{\Pi b(\cdot, T) : T > 0\}$ *плотно в* $\mathbb{H}_\pi$;

(ii) $\overline{\bigcup\limits_{T>0}} \operatorname{span} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\nu\lambda_k (T-s)^\alpha) \langle b(\cdot, s), \varphi_k\rangle \varphi_k$ *плотно в* $\mathbb{H}_\sigma^2$.

Для приближённой управляемости за свободное время системы (25)–(27) *условия* (i), (ii) *являются достаточными.*

Доказательство. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{L}_2$. В работе [1] получены равенства

$$R_{\mu^\alpha}^L(M) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k}{\mu^\alpha - \nu\lambda_k} & \mathbb{O} \\ \nu\Pi\Delta \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k}{\mu^\alpha - \nu\lambda_k} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{\mu t} d\mu}{\mu^\alpha - \nu\lambda_k} = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\nu\lambda_k t^\alpha),$$

из которых следует, что

$$X_{1-\alpha}(T-s) L_1^{-1} Q B(s) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\nu\lambda_k (T-s)^\alpha) \langle b(\cdot, s), \varphi_k\rangle \varphi_k & \mathbb{O} \\ \nu\Pi\Delta \sum\limits_{k=1}^{\infty} (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\nu\lambda_k (T-s)^\alpha) \langle b(\cdot, s), \varphi_k\rangle \varphi_k & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Осталось сослаться на замечание 11 о виде подпространств $\mathcal{X}^0$ и $\mathcal{X}^1$. □

Замечание 13. Если в (26) взять $b \in C^\gamma([0,T]; L_2(\Omega))$, $\gamma \in (0,1]$, $\mathcal{U} := \mathbb{L}_2$, $u \in C^\gamma([0,T]; \mathbb{L}_2)$, то система (25)–(27) будет приближённо управляемой при менее ограничительных условиях. В частности её вырожденная подсистема приближённо управляема за фиксированное время T, если $b^{-1} \in L_2(\Omega)$.

Список литературы

1. **Федоров, В. Е.** Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае / В. Е. Федоров, А. С. Авилович // Сиб. мат. журн. — 2019. — Т. 60, № 2. — С. 461–477.
2. **Федоров, В. Е.** Критерий приближенной управляемости одного класса вырожденных распределенных систем с производной Римана — Лиувилля / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских, Д. Балеану, К. Таш // Мат. заметки Сев.-Вост. федер. ун-та. — 2019. — Т. 26, № 2. — С. 41–59.
3. **Федоров, В. Е.** Управляемость линейных уравнений соболевского типа с относительно p-радиальными операторами / В. Е. Федоров, О. А. Рузакова // Изв. вузов. Математика. — 2002. — № 7. — С. 54–57.

4. **Федоров, В. Е.** Одномерная управляемость в гильбертовых пространствах линейных уравнений соболевского типа / В. Е. Федоров, О. А. Рузакова // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 8. — С. 1137–1139.
5. **Федоров, В. Е.** Одномерная и двумерная управляемость уравнений соболевского типа в банаховых пространствах / В. Е. Федоров, О. А. Рузакова // Мат. заметки. — 2003. — Т. 74, вып. 4. — С. 618–628.
6. **Рузакова, О. А.** Об ε-управляемости линейных уравнений, не разрешенных относительно производной в банаховых пространствах / О. А. Рузакова, В. Е. Федоров // Вычислит. технологии. — 2005. — Т. 10, № 5. — С. 90–102.
7. **Федоров, В. Е.** Полная нуль-управляемость вырожденных эволюционных уравнений скалярным управлением / В. Е. Федоров, Б. Шкляр // Мат. сб. — 2012. — Т. 203, № 12. — С. 137–156.
8. **Плеханова, М. В.** Оптимальное управление вырожденными распределёнными системами / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров. — Челябинск : Издат. центр Юж.-Урал. гос. ун-та, 2013. — 174 с.
9. **Плеханова, М. В.** Об управляемости вырожденных распределенных систем / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров // Уфим. мат. журн. — 2014. — Т. 6, № 2. — С. 78–98.
10. **Fedorov, V. E.** Controllability of a class of weakly degenerate fractional order evolution equations / V. E. Fedorov, D. M. Gordievskikh, G. D. Baybulatova // AIP Conference Proceedings. — 2017. — Vol. 1907. — P. 020009-1–020009-14.
11. **Федоров, В. Е.** Бесконечномерная и конечномерная ε-управляемость одного класса вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских, М. М. Туров // Челяб. физ.-мат. журн. — 2018. — Т. 3, № 1. — С. 5–26.
12. **Fedorov, V. E.** Approximate controllability of strongly degenerate fractional order system of distributed control / V. E. Fedorov, D. M. Gordievskikh // IFAC-PapersOnLine (17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization CAO 2018, Yekaterinburg, Russia, 15–19 October 2018). — 2018. — Vol. 51, no. 32. — P. 675–680.
13. **Baleanu, D.** Approximate controllability of infinite-dimensional degenerate fractional order systems in the sectorial case / D. Baleanu, V. E. Fedorov, D. M. Gordievskikh, K. Tas // Mathematics. — 2019. — Vol. 7, no. 735. — 15 p.
14. **Bajlekova, E. G.** Fractional Evolution Equations in Banach Spaces / E. G. Bajlekova. — PhD thesis. — Eindhoven : Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001. — 107 p.
15. **Prüss, J.** Evolutionary Integral Equations and Applications / J. Prüss. — Basel : Springer, 1993. — 366 p.
16. **Solomyak, M. Z.** Applications of the theory of semigroups to the study of differential equations in Banach spaces / M. Z. Solomyak // Doklady Mathematics. — 1958. — Vol. 122, no. 5. — P. 766–769.
17. **Иосида, К.** Функциональный анализ : пер. с англ. / К. Иосида. — 2-е изд. — М. : Изд-во ЛКИ, 2007. — 624 с.
18. **Федоров, В. Е.** Неоднородное эволюционное уравнение дробного порядка в секториальном случае / В. Е. Федоров, Е. А. Романова // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее приложения. Темат. обзоры. — 2018. — Т. 149. — С. 103–112.
19. **Fedorov, V. E.** A class of fractional order semilinear evolutions in Banach spaces / V. E. Fedorov // Integral Equations and Their Applications. Proceeding of University Network Seminar on the occasion of The Third Mongolia — Russia — Vietnam Workshop on NSIDE 2018, Hanoi Mathematical Society. — Hung Yen : Hung Yen University of Technology and Education, 2018. — P. 11–20.
20. **Fedorov, V. E.** Initial problems for semilinear degenerate evolution equations of fractional order in the sectorial case / V. E. Fedorov, A. S. Avilovich, L. V. Borel // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2019. — Vol. 292. — P.41–62.

21. **Федоров, В. Е.** Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка / В. Е. Федоров, Е. А. Романова, А. Дебуш // Сиб. журн. чистой и приклад. математики. — 2016. — Т. 16, № 2. — С. 93–107.
22. **Романова, Е. А.** Разрешающие операторы линейного вырожденного эволюционного уравнения с производной Капуто. Секториальный случай / Е. А. Романова, В. Е. Федоров // Мат. заметки Сев.-Вост. федер. ун-та. — 2016. — Т. 23, № 4. — С. 58–72.
23. **Ладыженская, О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. — М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. — 204 с.

Поступила в редакцию 02.02.2020
После переработки 02.03.2020

Сведения об авторах

Авилович Анна Сергеевна, аспирант, кафедра математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: avilovich_aas@bk.ru.

Гордиевских Дмитрий Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физико-математического и информационно-технологического образования, Шадринский государственный педагогический университет, Шадринск, Курганская обл., Россия; e-mail: dm_gordiev@mail.ru.

Федоров Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; научный сотрудник, лаборатория функциональных материалов, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия; e-mail: kar@csu.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2020. Vol. 5, iss. 1. P. 5–21.

DOI: 10.24411/2500-0101-2020-15101

ISSUES OF UNIQUE SOLVABILITY AND APPROXIMATE CONTROLLABILITY FOR LINEAR FRACTIONAL ORDER EQUATIONS WITH A HÖLDERIAN RIGHT-HAND SIDE

A.S. Avilovich[1,a], **D.M. Gordievskikh**[2,b], **V.E. Fedorov**[1,3,c]

[1] *Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*
[2] *Shadrinsk State Pedagogical University, Shadrinsk, Kurgan region, Russia*
[3] *South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia*
[a] *avilovich_aas@bk.ru,* [b] *dm_gordiev@mail.ru,* [c] *kar@csu.ru*

Issues of unique solvability and approximate controllability of linear fractional order evolution equations, both resolved with respect to the Riemann — Liouville fractional derivative (nondegenerate) and containing an irreversible operator at it (degenerate), are investigated. It is assumed that an operator on the right side of a non-degenerate equation or a pair of operators in a degenerate equation generates an analytic in a sector resolving family of operators of the corresponding homogeneous equation. New results on the solvability of inhomogeneous equations of such classes with a Hölder continuous function on the right side are obtained. These results allow us to find criteria for the approximate controllability of a degenerate system in fixed time, in free time, and in the case of systems with finite-dimensional input. The initial state of the degenerate control system is set by the Showalter — Sidorov type conditions. Based on the obtained abstract results, we found a criterion for the approximate controllability of a distributed control system, the dynamics of which is described by the linearized system of Navier — Stokes equations of fractional order in time.

Keywords: *fractional Riemann — Liouville derivative, analytic in a sector resolving family of operators, degenerate evolution equation, Hölder condition, approximate controllability.*

References

1. **Fedorov V.E., Avilovich A.S.** A Cauchy type problem for a degenerate equation with the Riemann — Liouville derivative in the sectorial case. *Siberian Mathematical Journal*, 2019, vol. 60, no. 2, pp. 359–372.
2. **Fedorov V.E., Gordievskikh D.M., Baleanu D., Taş K.** Criterion of the approximate controllability of a class of degenerate distributed systems with the Riemann — Liouville derivative. *Mathematical Notes of NEFU*, 2019, vol. 26, no. 2, pp. 41–59.
3. **Fedorov V.E., Ruzakova O.A.** Controllability of linear Sobolev type equations with relatively p-radial operators. *Russian Mathematics*, 2002, vol. 46, no. 7, pp. 52–55.
4. **Fedorov V.E., Ruzakova O.A.** One-dimensional controllability in Hilbert spaces of linear Sobolev type equations. *Differential Equations*, 2002, vol. 38, iss. 8, pp. 1216–1218.
5. **Fedorov V.E., Ruzakova O.A.** Controllability in dimensions of one and two of Sobolev-type equations in Banach spaces. *Mathematical Notes*, 2003, vol. 74, no. 4, pp. 583–592.
6. **Ruzakova O.A., Fedorov V.E.** On ε-controllability of linear equations, not solved with respect to the derivative, in Banach spaces. *Computational Technologies*, 2005, vol. 10, no. 5, pp. 90–102. (In Russ.).

The reported study was funded by RFBR, project 19-41-450001, project 19-31-90008, by Act 211 of Government of the Russian Federation, contract 02.A03.21.0011.

7. **Fedorov V.E., Shklyar B.** Exact null controllability of degenerate evolution equations with scalar control. *Sbornik: Mathematics*, 2012, vol. 203, no. 12, pp. 1817–1836.
8. **Plekhanova M.V., Fedorov V.E.** *Optimal Control for Degenerate Distributed Systems*. Chelyabinsk, Publishing Center of South Ural State University, 2013. 174 p. (In Russ.).
9. **Plekhanova M.V., Fedorov V.E.** On controllability of degenerate distributed systems. *Ufa Mathematical Journal*, 2014, vol. 6, no. 2, pp. 77–96.
10. **Fedorov V.E., Gordievskikh D.M., Baybulatova G.D.** Controllability of a class of weakly degenerate fractional order evolution equations. *AIP Conference Proceedings*, 2017, vol. 1907, pp. 020009-1–020009-14.
11. **Fedorov V.E., Gordievskikh D.M., Turov M.M.** Infinite-dimensional and finite-dimensional ε-controllability for a class of fractional order degenerate evolution equations. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2018, vol. 3, no. 1, pp. 5–26. (In Russ.).
12. **Fedorov V.E., Gordievskikh D.M.** Approximate controllability of strongly degenerate fractional order system of distributed control. *IFAC-PapersOnLine* (17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization CAO 2018, Yekaterinburg, Russia, 15–19 October 2018), 2018, vol. 51, no. 32, pp. 675–680.
13. **Baleanu D., Fedorov V.E., Gordievskikh D.M., Taş K.** Approximate controllability of infinite-dimensional degenerate fractional order systems in the sectorial case. *Mathematics*, 2019, vol. 7, no. 735. 15 p.
14. **Bajlekova E.G.** *Fractional Evolution Equations in Banach Spaces*. PhD thesis. Eindhoven, Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001. 107 p.
15. **Prüss J.** *Evolutionary Integral Equations and Applications*. Basel, Springer, 1993. 366 p.
16. **Solomyak M.Z.** Applications of the theory of semigroups to the study of differential equations in Banach spaces. *Doklady Mathematics*, 1958, vol. 122, no. 5, pp. 766–769.
17. **Yosida K.** *Functional Analysis*. Berlin, Springer-Verl., 1965. 458 p.
18. **Fedorov V.E., Romanova E.A.** Inhomogeneous evolution equations of fractional order in the sectorial case. *Itogi Nauki i Tekhniki. Contemporary Mathematics and Its Applications. Thematical Surveys*, 2018, vol. 149, pp. 103–112. (In Russ.).
19. **Fedorov V.E.** A class of fractional order semilinear evolutions in Banach spaces. *Integral Equations and Their Applications*, Proceeding of University Network Seminar on the occasion of The Third Mongolia — Russia — Vietnam Workshop on NSIDE 2018, Hanoi Mathematical Society. Hung Yen, Hung Yen University of Technology and Education, 2018. Pp. 11–20.
20. **Fedorov V.E., Avilovich A.S., Borel L.V.** Initial problems for semilinear degenerate evolution equations of fractional order in the sectorial case. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2019, vol. 292, pp. 41–62.
21. **Fedorov V.E., Romanova E.A., Debbouche A.** Analytic in a sector resolving families of operators for degenerate evolution fractional equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 228, no. 4, pp. 380–394.
22. **Romanova E.A., Fedorov V.E.** Resolving operators of linear degenerate evolution equation with the Caputo derivative. The sectorial case. *Mathematical Notes of NEFU*, 2016, vol. 23, no. 4, pp. 58–72. (In Russ.).
23. **Ladyzhenskaya O.A.** *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. New York, London, Paris, Gordon and Breach, Science Publ., 1969. 198 p.

Accepted article received 02.02.2020
Corrections received 02.03.2020