*Челябинский физико-математический журнал. 2019. Т. 4, вып. 4. С. 439–444.*

УДК 517.955+517.956 DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14407

# ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЁННОГО ПОРЯДКА

**В. Е. Федоров**[1,a], **Д. М. Гордиевских**[2,b],

[1] *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
[2] *Шадринский государственный педагогический университет, Шадринск, Курганская обл., Россия*
[a] *kar@csu.ru*, [b] *dm_gordiev@mail.ru*

Рассмотрено полулинейное уравнение распределённого порядка (с производной Герасимова — Капуто) в банаховом пространстве с ограниченным оператором при искомой функции. С использованием полученных ранее результатов о разрешимости задачи Коши для соответствующего линейного неоднородного уравнения распределённого порядка, найденного операторного вида её решения и теоремы о сжимающем отображении доказана локальная однозначная разрешимость задачи Коши для рассматриваемого полулинейного уравнения. Приведён пример применения полученных абстрактных результатов.

**Ключевые слова:** *дробная производная Герасимова — Капуто, производная распределённого порядка, полулинейное уравнение, существование и единственность решения, локальное решение.*

В последние два десятилетия уравнения с распределёнными производными (в другой терминологии — с континуальными производными, со средними производными) стали возникать в прикладных задачах, что обусловило возрастающий интерес к ним исследователей [1–5]. В данной работе рассмотрено полулинейное уравнение распределённого порядка (с производной Герасимова — Капуто) в банаховом пространстве с ограниченным оператором при искомой функции. С использованием полученных ранее результатов о разрешимости задачи Коши для соответствующего линейного неоднородного уравнения распределённого порядка, найденного операторного вида решения [6; 7] и теоремы о сжимающем отображении доказана локальная однозначная разрешимость задачи Коши для рассматриваемого полулинейного уравнения. Приведён пример применения полученных абстрактных результатов.

## 1. Линейное уравнение

При $\beta > 0$ обозначим $g_\beta(t) := t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$ для $t > 0$,

$$J_t^\beta h(t) := \int_{t_0}^{t} g_\beta(t-s)h(s)ds = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\beta-1}h(s)ds,\ t > t_0 \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\alpha \in (0, 1]$, $D_t^\alpha$ — дробная производная Герасимова — Капуто, т. е.

$$D_t^\alpha h(t) := \frac{d}{dt}J_t^{1-\alpha}(h(t) - h(0)).$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 19-41-450001, и Министерством науки и высшего образования РФ, задание 1.6462.2017/БЧ.

Пусть $\mathfrak{X}$ — банахово пространство, обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ банахово пространство всех линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$. При $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ рассмотрим задачу Коши

$$x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

для дифференциального уравнения распределённого порядка

$$\int\limits_0^b \omega(\alpha) D_t^\alpha x(t) d\alpha = Ax(t) + g(t), \tag{2}$$

где $D_t^\alpha$ — дробная производная Герасимова — Капуто, $0 < b \leq 1$, $\omega \in L_1(0, b; \mathbb{R})$, $g \in C([t_0, T]; \mathfrak{X})$. Решением задачи (1), (2) будем называть функцию $x \in C([t_0, T]; \mathfrak{X})$, для которой существует $\int\limits_0^b \omega(\alpha) D_t^\alpha x(t) d\alpha \in C([t_0, T]; \mathfrak{X})$ и выполняются равенства (1) и (2) при $t \in [t_0, T]$.

Будем использовать обозначения $W(\lambda) := \int\limits_0^b \omega(\alpha) \lambda^\alpha d\alpha$,

$$\gamma = \bigcup_{k=1}^3 \gamma_k, \quad \gamma_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_0, \arg\lambda \in (-\pi, \pi)\}$$

$\gamma_2 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = \pi, \lambda \in [-r_0, -\infty)\}$, $\gamma_3 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = -\pi, \lambda \in (-\infty, -r_0]\}$,

$$X_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{W(\lambda)}{\lambda} (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda, \ X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda, \ t > t_0.$$

Нетрудно заметить, что при $\omega \in L_1(0, b; \mathbb{R})$ функция $W$ аналитична в разрезанной комплексной плоскости $\widetilde{\mathbb{C}} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda \in (-\pi, \pi)\}$, а если $b \in \operatorname{supp}\omega$, то

$$\exists C > 0 \ \exists \delta \in (0, b) \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad (|\lambda| \geq 1) \Rightarrow (|W(\lambda)| \geq C|\lambda|^\delta). \tag{3}$$

Поэтому выполняются все условия теоремы 3.2 [7] при $b \leq 1$ (условие экспоненциальной ограниченности становится тривиальным при рассмотрении задачи на отрезке) и справедливо её утверждение, которое в данном случае запишем в следующем виде.

**Теорема 1.** *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $0 < b \leq 1$, $\omega \in L_1(0, b; \mathbb{R})$, $b \in \operatorname{supp}\omega$, $x_0 \in \mathfrak{X}$, $g \in C([t_0, T]; \mathfrak{X})$, $r_0 = \max\left\{1, \left(2\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}/C\right)^{1/\delta}\right\}$. Тогда функция*

$$x(t) = X_0(t - t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^t X(t - s) g(s) ds$$

*является единственным решением задачи* (1), (2).

Здесь $C$ и $\delta$ в определении $r_0$ взяты из (3).

Докажем одно вспомогательное утверждение, которое понадобится при рассмотрении полулинейного уравнения.

**Лемма 1.** *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $0 < b \leq 1$, $\omega \in L_1(0, b; \mathbb{R})$, $b \in \operatorname{supp}\omega$, $r_0 = \max\left\{1, \left(2\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}/C\right)^{1/\delta}\right\}$. Тогда*

$$\exists C_1 > 0 \quad \forall t > 0 \quad \|X(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \leq C_1 t^{\delta - 1}.$$

*Доказательство.* В силу неравенства (3) и выбора $r_0$ имеем

$$\|(W(\lambda)I-A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \le \frac{2}{|W(\lambda)|} \le \frac{2}{C|\lambda|^{\delta}}.$$

Поэтому

$$\left\| \int_{\gamma_1} (W(\lambda)I-A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \le C_2,$$

$$\left\| \int_{\gamma_k} (W(\lambda)I-A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \le \int_{-\infty}^{-r} \frac{2e^{tx}}{C(-x)^{\delta}} dx \le \frac{2t^{\delta-1}}{C} \int_0^{\infty} y^{-\delta} e^{-y} dy = \frac{2t^{\delta-1}\Gamma(1-\delta)}{C}$$

при $k=2,3$. Из этих неравенств получим требуемое. □

## 2. Полулинейное уравнение

Пусть $U$ — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathfrak{X}$, задан нелинейный оператор $B: U \to \mathfrak{X}$, $0 < b \le 1$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathfrak{X}$. Рассмотрим задачу Коши

$$x(t_0) = x_0 \tag{4}$$

для полулинейного уравнения распределённого порядка

$$\int_0^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha} x(t) d\alpha = Ax(t) + B(t, x(t)). \tag{5}$$

Решением задачи (4), (5) на отрезке $[t_0, t_1]$ называется такая функция $x \in C([t_0, t_1]; \mathfrak{X})$, что выполняется условие (4), существует распределённая производная $\int_0^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha} x(t) d\alpha \in C([t_0, t_1]; \mathfrak{X})$, при $t \in [t_0, t_1]$ $(t, x(t)) \in U$ и выполняется равенство (5).

Обозначим $S_\delta(z) = \{y \in \mathfrak{X} : \|y - z\|_{\mathfrak{X}} \le \delta\}$. Отображение $B: U \to \mathfrak{X}$ называется локально липшицевым по $z \in \mathfrak{X}$, если при любом $(t, z) \in U$ найдутся такие $\delta > 0$, $l > 0$, что $[t-\delta, t+\delta] \times S_\delta(z) \subset U$ и для всех $(s, y), (s, v) \in [t-\delta, t+\delta] \times S_\delta(z)$ выполняется неравенство $\|B(s, y) - B(s, v)\|_{\mathfrak{X}} \le l\|y - v\|_{\mathfrak{X}}$.

**Лемма 2.** *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $0 < b \le 1$, $\omega \in L_1(0, b; \mathbb{R})$, $b \in \operatorname{supp}\omega$, $r_0 = \left(2\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}/C\right)^{1/\delta}$, $U$ — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathfrak{X}$, отображение $B \in C(U; \mathfrak{X})$ локально липшицево по фазовой переменной $z$, $(t_0, x_0) \in U$. Тогда $x$ — решение задачи* (4), (5), *если и только если $x \in C([t_0, t_1]; \mathfrak{X})$ и при всех $t \in [t_0, t_1]$*

$$x(t) = X_0(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t-s) B(s, x(s)) ds. \tag{6}$$

*Доказательство.* Если $x$ — решение задачи (4), (5), то $x \in C([t_0, t_1]; \mathfrak{X})$, отображение $t \to B(t, x(t))$ действует из $[t_0, t_1]$ в пространство $\mathfrak{X}$ непрерывно. Из теоремы 1 следует справедливость равенства (6).

Пусть $x \in C([t_0, t_1]; \mathfrak{X})$ удовлетворяет равенству (6), тогда отображение $t \to B(t, x(t))$ непрерывно действует из $[t_0, t_1]$ в $\mathfrak{X}$. В таком случае непосредственно может быть доказано, как при доказательстве теоремы 1 [7], что функция (6) является решением задачи (4), (5). □

**Теорема 2.** *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $0 < b \leq 1$, $\omega \in L_1(0, b; \mathbb{R})$, $b \in \operatorname{supp} \omega$, $r_0 = \big(2\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}/C\big)^{1/\delta}$, $U$ *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}$, *отображение* $B \in C(U; \mathfrak{X})$ *локально липшицево по фазовой переменной* $z$, $(t_0, x_0) \in U$. *Тогда существует такое* $t_1 > t_0$, *что задача* (4), (5) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0, t_1]$.

*Доказательство.* В силу леммы 2 достаточно доказать, что уравнение (6) имеет единственное решение $x \in C([t_0, t_1]; \mathfrak{X})$ при некотором $t_1 > t_0$.

Выберем такие $\tau > 0$ и $\varepsilon > 0$, что $V = [t_0, t_0 + \tau] \times S_\varepsilon(x_0) \subset U$. Это можно сделать в силу открытости множества $U$. Обозначим символом $\mathcal{S}$ множество таких функций $y \in C([t_0, t_0 + \tau]; \mathfrak{X})$, что $\|y(t) - x_0\|_{\mathfrak{X}} \leq \varepsilon$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$. Определим на $\mathcal{S}$ метрику

$$d(y, z) := \sup_{t \in [t_0, t_0 + \tau]} \|y(t) - z(t)\|_{\mathfrak{X}},$$

тогда $S$ — полное метрическое пространство. Определим для $y \in \mathcal{S}$

$$G(y)(t) := X_0(t - t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(t - s)B(s, y(s))\, ds,\ t \in [t_0, t_0 + \tau],$$

и докажем, что оператор $G$ отображает метрическое пространство $\mathcal{S}$ в себя и является сжимающим при достаточно малом $\tau > 0$.

Обозначим $K = \max\limits_{t \in [t_0, t_0 + \tau]} \|B(t, x_0)\|_{\mathfrak{X}}$. Тогда при $t \in [t_0, t_0 + \tau]$

$$\|G(y)(t) - x_0\|_{\mathfrak{X}} \leq \|X_0(t - t_0)x_0 - x_0\|_{\mathfrak{X}} + C_1 \int\limits_{t_0}^{t} (t - s)^{\delta - 1} \left(l\|y(s) - x_0\|_{\mathfrak{X}} + K\right) ds \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + C_1(l\varepsilon + K)\frac{\tau^\delta}{\delta} \leq \varepsilon$$

при достаточно малом $\tau$. Таким образом, $G : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

Кроме того, при малом $\tau$ и для всех $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, $y, z \in \mathcal{S}$

$$\|G(y)(t) - G(z)(t)\|_{\mathfrak{X}} \leq C_1 l \frac{\tau^\delta}{\delta} \sup_{t \in [t_0, t_0 + \tau]} \|y(t) - z(t)\| \leq \frac{d(y, z)}{2}.$$

Следовательно, $d(G(y), G(z)) \leq d(y, z)/2$ и оператор $G$ имеет единственную неподвижную точку в $\mathcal{S}$. Она и является единственным решением задачи (4), (5) на отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$. □

## 3. Пример

Рассмотрим задачу

$$v(x, t_0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{7}$$

$$\int\limits_0^b \omega(\alpha) D_t^\alpha v(x, t) d\alpha = \int\limits_\Omega K(x, \xi) v(\xi, t) d\xi + F(t, v(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega \times [t_0, t_1]. \tag{8}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $0 < b \leq 1$, $\omega \in L_1(0, b; \mathbb{R})$, матричная функция $K \in L_2(\Omega \times \Omega; \mathbb{R}^{m \times m})$ заданы, $b \in \operatorname{supp} \omega$, вектор-функция $v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t), \ldots, v_m(x, t))$ неизвестна.

Возьмём $\mathfrak{X} = L_2(\Omega)^m$, $(Aw)(x) = \int\limits_{\Omega} K(x,\xi)w(\xi)d\xi$ для $w = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \in L_2(\Omega)^m$. Тогда $A \in \mathcal{L}(L_2(\Omega)^m)$. Пусть $U$ — открытое множество в $\mathbb{R} \times L_2(\Omega)^m$, отображение $F : U \to L_2(\Omega)^m$ вида $(t, w) \to F(t, w)$ непрерывно и локально липшицево по переменной $w \in L_2(\Omega)^m$. Если $(t_0, v_0) \in U$, в силу теоремы 2 задача (7), (8) имеет единственное локальное решение.

## Список литературы


1. **Нахушев, А. М.** О континуальных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах / А. М. Нахушев // Докл. Акад. наук СССР. — 1988. — Т. 300, № 4. — С. 796–799.
2. **Псху, А. В.** Уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху. — М. : Наука, 2005. — 199 с.
3. **Caputo, M.** Mean fractional order derivatives. Differential equations and filters / M. Caputo // Annali dell'Universita di Ferrara. Sezione VII. Scienze Matematiche. — 1995. — Vol. XLI. — P. 73–84.
4. **Kochubei, A. N.** Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion / A. N. Kochubei // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 340. — P. 252–280.
5. **Umarov, S.** Cauchy and nonlocal multi-point problems for distributed order pseudo-differential equations / S. Umarov, R. Gorenflo // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. — 2005. — Vol. 24. — P. 449–466.
6. **Стрелецкая, Е. М.** Задача Коши для уравнения распределенного порядка в банаховом пространстве / Е. М. Стрелецкая, В. Е. Федоров, А. Дебуш // Мат. заметки СВФУ. — 2018. — Т. 25, № 1. — С. 63–72.
7. **Fedorov, V. E.** Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces / V. E. Fedorov, E. M. Streletskaya // Electronic Journal of Differential Equations. — 2018. — Vol. 2018, no. 176. — P. 1–17.


*Поступила в редакцию 05.10.2019*
*После переработки 05.11.2019*

### Сведения об авторах

**Федоров Владимир Евгеньевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: kar@csu.ru.

**Гордиевских Дмитрий Михайлович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физико-математического и информационно-технологического образования, Шадринский государственный педагогический университет, Шадринск, Курганская обл., Россия; e-mail: dm_gordiev@mail.ru.

*Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2019. Vol. 4, iss. 4. P. 439–444.*

DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14407

## THE CAUCHY PROBLEM FOR A SEMILINEAR EQUATION OF THE DISTRIBUTED ORDER

**V.E. Fedorov**[1,a], **D.M. Gordievskikh**[2,b],

[1] *Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*
[2] *Shadrinsk State Pedagogical University, Shadrinsk, Kurgan region, Russia*
[a] *kar@csu.ru,* [b] *dm_gordiev@mail.ru*

A semilinear equation of distributed order (with the Gerasimov —Caputo derivative) in a Banach space with a bounded operator at the unknown function is considered. Using previously obtained results on the solvability of the Cauchy problem for the corresponding linear inhomogeneous equation of distributed order, the found operator form of its solution, and the contraction mapping theorem, the local unique solvability of the Cauchy problem for the considered semilinear equation is proved. An example of applying the obtained abstract results is given.

**Keywords:** *the Gerasimov — Caputo fractional derivative, distributed order derivative, semilinear equation, the existence and the uniquenes of a solution, local solution.*

## References

1. **Nakhushev A.M.** On continual differential equations and their difference analogues. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 1988, vol. 300, no. 4, pp. 796–799. (In Russ.).
2. **Pskhu A.V.** *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Partial differential equations of fractional order]. Moscow, Nauka Publ., 2005. 199 p.
3. **Caputo M.** Mean fractional order derivatives. Differential equations and filters. *Annali dell'Universita di Ferrara. Sezione VII. Scienze Matematiche*, 1995, vol. XLI, pp. 73–84.
4. **Kochubei A.N.** Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, vol. 340, pp. 252–280.
5. **Umarov S., Gorenflo R.** Cauchy and nonlocal multi-point problems for distributed order pseudo-differential equations. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 2005, vol. 24, pp. 449–466.
6. **Streletskaya E.M., Fedorov B.E., Debbouche A.** The Cauchy problem for distributed order equations in Banach spaces. *Mathematical Notes of NEFU*, 2018, vol. 25, no. 1, pp. 63–72.
7. **Fedorov V.E., Streletskaya E.M.** Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, vol. 2018, no. 176, pp. 1–17.

*Accepted article received 05.10.2019*
*Corrections received 05.11.2019*

The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research, project number 19-41-450001; and by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, task number 1.6462.2017/BCh.