

УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ НАГРЕВА СТЕРЖНЯ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ С ОБЪЁМНЫМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

А. С. Сушков

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
tesocyclon@yandex.ru

Предложен численный метод решения задачи управления процессом нагрева стержня в движущейся среде с объёмным тепловыделением. Управляемым параметром является температура на левом конце стержня. При построении функции управления использован подход, изложенный в работах В. И. Ухоботова и И. В. Измestьева. В данной работе особое внимание уделено разработке численного метода решения задачи, а также его программной реализации. Аппроксимация задачи управления произведена с использованием неявной разностной схемы. Разработана программа, позволяющая получать и визуализировать приближённое решение рассмотренной задачи, а также строить функцию управления. Работоспособность программы проверена на конкретном примере.

Ключевые слова: *уравнение теплопроводности, температура, управление, разностная схема, аппроксимация.*

Введение

При исследовании тепловых процессов часто возникают задачи оптимального управления с дифференциальными уравнениями в частных производных [1–3]. На практике нередко встречается задача, описывающая процессы теплопередачи в ограниченном стержне, температуры на концах которого зависят от управления. Эта задача сводится к уравнению теплопроводности [4].

В работе [5] рассмотрена задача управления процессом нагрева стержня, когда скорость изменения температуры на его правом конце определяется ограниченной по величине помехой. В отличие от [6] в данной статье рассматривается случай, когда процесс нагрева стержня производится в движущейся среде с объёмным тепловыделением, пропорциональным температуре. При построении функции управления был использован подход, изложенный в статьях В. И. Ухоботова и И. В. Измestьева [5; 6].

Точное решение рассматриваемой задачи часто невозможно получить в аналитическом виде. В этом случае необходимо перейти к численному методу, позволяющему найти приближённое решение задачи в виде таблицы чисел, на основе которой можно получить количественные характеристики управляемого теплового процесса.

Для того чтобы построить упомянутое приближённое решение, необходимо прежде всего заменить исходную дифференциальную задачу, т. е. основное уравнение и соответствующие начальные и граничные условия, конечномерной задачей, представляющей собой разностную схему [7]. Предпочтительнее использовать

неявную разностную схему, поскольку в этом случае для вычислений требуется значительно меньше машинного времени.

Разработана программа, позволяющая находить и визуализировать приближённое решение исследуемой задачи, а также строить дискретный график функции управления.

1. Постановка задачи

В области $Q = (0, 1) \times (0, T)$ рассмотрим задачу нахождения функции $u(x, t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + c_2 u + f(x, t), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}; \quad (1)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = a_1(t) + a_2(t)\xi, \quad 0 \leq t \leq T, \quad a_2(t) > 0, \quad |\xi| \leq 1; \quad (3)$$

$$b_1(t) \leq u(1, t) \leq b_2(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (4)$$

$$f_1(x, t) \leq f(x, t) \leq f_2(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (5)$$

где параметр ξ — управление. Функции $g \in C[0, 1]$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in C[0, T]$, $f_1, f_2 \in C([0, 1] \times [0, T])$ заданы.

Условия (2)–(5) задаются так же, как в [6], однако в данном случае уравнение (1) описывает одномерный тепловой процесс в движущейся среде с объёмным тепловыделением, пропорциональным температуре [8]. При этом функция $f(x, t)$ отвечает требованиям, использованным в работе [6].

Пусть заданы числа $l \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \geq 0$ и непрерывная функция $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $\sigma(0) = \sigma(1) = 0$. Как и в [6], целью управления $\xi(t)$ в условии (3) является выполнение неравенства

$$I = \left| \int_0^1 u(x, T)\sigma(x)dx - l \right| \leq \varepsilon \quad (6)$$

при любых непрерывных функциях $u(1, t)$ и $f(x, t)$.

2. Переход к однотипной задаче

Пользуясь подходом к построению однотипной задачи [6], в области Q рассмотрим функцию $\theta \in C([0, 1] \times [0, T])$, удовлетворяющую условиям

$$\theta(x, 0) = \sigma(x); \quad \theta(0, \tau) = \theta(1, \tau) = 0. \quad (7)$$

Запишем

$$\int_0^1 f(x, t)\theta(x, T-t)dx = h_1(t) + h_2(t)s(t), \quad |s(t)| \leq 1, \quad (8)$$

где

$$h_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (f_1(x, t) + f_2(x, t))\theta(x, T-t)dx,$$

$$h_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (f_2(x, t) - f_1(x, t))|\theta(x, T-t)|dx \geq 0.$$

Положим

$$u(1, t) = \frac{b_1(t) + b_2(t)}{2} + \frac{b_2(t) - b_1(t)}{2}\eta(t), \quad |\eta(t)| \leq 1.$$

Отталкиваясь от работы [6], рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \int_0^1 u(x, t)\theta(x, T - t)dx.$$

Далее, найдём выражение для $\frac{\partial\theta(x, \tau)}{\partial t}$. Для этого запишем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \theta(x, T - t)dx &= \int_0^1 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \theta(x, T - t)dx + \\ &+ c_1 \int_0^1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \theta(x, T - t)dx + c_2 \int_0^1 u(x, t)\theta(x, T - t)dx + h_1(t) + h_2(t)s(t). \end{aligned}$$

Интегрируя по частям в правой части равенства, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^1 u(x, t)\theta(x, T - t)dx &= - \int_0^1 u(x, t) \frac{\partial\theta(x, T - t)}{\partial t} dx - \\ &- c_1 \int_0^1 u(x, t) \frac{\partial\theta(x, T - t)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} \theta(1, T - t) - \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} \theta(0, T - t) - \\ &- u(1, t) \frac{\partial\theta(1, T - t)}{\partial x} + u(0, t) \frac{\partial\theta(0, T - t)}{\partial x} + \int_0^1 u(x, t) \frac{\partial^2\theta(x, T - t)}{\partial x^2} dx + \\ &+ c_1 u(1, t)\theta(1, T - t) - c_1 u(0, t)\theta(0, T - t) + c_2 \int_0^1 u(x, t)\theta(x, T - t)dx + h_1(t) + h_2(t)s(t). \end{aligned}$$

Учитывая условия (7), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^1 u(x, t)\theta(x, T - t)dx &= u(0, t) \frac{\partial\theta(0, T - t)}{\partial x} - u(1, t) \frac{\partial\theta(1, T - t)}{\partial x} + \\ &+ \int_0^1 u(x, t) \left(\frac{\partial^2\theta(x, T - t)}{\partial x^2} - \frac{\partial\theta(x, T - t)}{\partial t} - c_1 \frac{\partial\theta(x, T - t)}{\partial x} + c_2\theta(x, T - t) \right) dx + \\ &+ h_1(t) + h_2(t)s(t). \end{aligned}$$

Далее,

$$\frac{\partial\theta(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2\theta(x, \tau)}{\partial x^2} - c_1 \frac{\partial\theta(x, \tau)}{\partial x} + c_2\theta(x, \tau), \quad \tau > 0, \quad 0 < x < 1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Уравнение (9) в совокупности с условиями (7) образует первую краевую задачу, решение которой существует и непрерывно при $0 \leq x \leq 1, \tau \geq 0$ [9].

В итоге, учитывая (8), получим, что

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= \left(\frac{b_1(t) - b_2(t)}{2} \eta(t) - \frac{b_1(t) + b_2(t)}{2} \right) \frac{\partial\theta(1, T - t)}{\partial x} + \\ &+ u(0, t) \frac{\partial\theta(0, T - t)}{\partial x} + h_1(t) + h_2(t)s(t). \end{aligned}$$

Заметим, что выражение для $\dot{\psi}(t)$ получилось тождественно равным аналогичному выражению из [6], а значит, пользуясь результатами этой работы, приведём функции, необходимые для реализации численного метода:

$$z(t) = \psi(t) + u(0, t) \int_t^T \frac{\partial\theta(0, T - r)}{\partial x} dr +$$

$$+ \int_t^T \left(a_1(\tau) \int_\tau^T \frac{\partial \theta(0, T-r)}{\partial x} dr - \frac{b_1(\tau) + b_2(\tau)}{2} \frac{\partial \theta(1, T-\tau)}{\partial x} + h_1(\tau) \right) d\tau - l, \quad (10)$$

$$a(t) = a_2(t) \left| \int_t^T \frac{\partial \theta(0, T-r)}{\partial x} dr \right|, \quad b(t) = \frac{b_2(t) - b_1(t)}{2} \left| \frac{\partial \theta(1, T-t)}{\partial x} \right| + h_2(t), \quad (11)$$

$$F(z) = \max \left(|z| + \int_0^T (b(r) - a(r)) dr; \max_{0 \leq \tau \leq T} \int_\tau^T (b(r) - a(r)) dr \right). \quad (12)$$

Теорема 1. [6]. Пусть функция $u(x, 0) = g(x)$ и число $\varepsilon \geq 0$ таковы, что выполняется условие $F(z(0)) \leq \varepsilon$. Тогда управление, определяемое формулой

$$\xi(t) = \chi(t, u(\cdot, \tau)) = -\text{sign} \left(z(\tau) \int_t^T \frac{\partial \theta(0, T-r)}{\partial x} dr \right), \quad t \in [\tau, T], \quad (13)$$

гарантирует выполнение неравенства (6).

3. Разностная аппроксимация

Перейдём теперь к построению разностной схемы на равномерной сетке в прямоугольной области $Q = (0, 1) \times (0, T)$. Построим разбиение отрезка пространственной переменной $[0, 1]$ на части с шагом $h = 1/M$, определив тем самым точки $x_m = mh$, $m = 0, 1, \dots, M$. Аналогичным образом разобьём временной отрезок $[0, T]$ на части с шагом $\tau > 0$, получив точки разбиения $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N$. Полученные точки разбиения формируют узлы (x_m, t_n) , множество которых представляет собой сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_m, t_n) \in \bar{Q}\}$. На сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ определим сеточную функцию $u(x_m, t_n) = u_m^n$, $(x_m, t_n) \in \bar{\omega}_{h\tau}$.

Записывая задачу (1)–(5) в разностных производных, получаем

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} &= \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + c_1 \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} + \\ &+ c_2 u_m^{n+1} + \frac{(f_1)_m^n + (f_2)_m^n}{2} + \frac{(f_2)_m^n - (f_1)_m^n}{2} \zeta, \end{aligned} \quad (14)$$

где $m = 1, 2, \dots, M-1$, $n = 1, 2, \dots, N-1$, с граничными условиями

$$\frac{u_0^n - u_0^{n-1}}{\tau} = (a_1)^n + (a_2)^n \xi^n, \quad u_M^n = \frac{(b_1)^n + (b_2)^n}{2} + \frac{(b_2)^n - (b_1)^n}{2} \eta, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (15)$$

и начальным условием

$$u_m^0 = g_m, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (16)$$

Здесь $|\zeta| \leq 1$, $|\eta| \leq 1$ — случайные числа.

Заменяя частные производные их разностными аналогами и используя формулу прямоугольников [10] для вычисления определённых интегралов, дискретную функцию управления ξ^n запишем в виде

$$\xi^n = -\text{sign} \left(z^k \sum_{p=n}^{N-1} \left(4\theta_1^{N-p-1} - 3\theta_0^{N-p-1} - \theta_2^{N-p-1} \right) \right), \quad n = k, k+1, \dots, N-1,$$

где

$$z^k = \sum_{m=0}^{M-1} u_m^k \theta_m^{N-k-1} + \frac{u_0^k}{2h} \sum_{p=k}^{N-1} \left(4\theta_1^{N-p-1} - 3\theta_0^{N-p-1} - \theta_2^{N-p-1} \right) +$$

$$+ \sum_{s=k}^{N-1} \left(\frac{(a_1)^s}{2h} \sum_{p=s}^{N-1} \left(4\theta_1^{N-p-1} - 3\theta_0^{N-p-1} - \theta_2^{N-p-1} \right) - \right. \\ \left. - \frac{(b_1)^s + (b_2)^s}{4h} \left(3\theta_{M-1}^{N-s-1} - 4\theta_{M-2}^{N-s-1} + \theta_{M-3}^{N-s-1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \left((f_1)_m^s + (f_2)_m^s \right) \theta_m^{N-s-1} \right) - l.$$

Аппроксимируя вспомогательную краевую задачу (7), (9) для нахождения функции $\theta(x_m, t_n) = \theta_m^n$, получаем

$$\frac{\theta_m^{n+1} - \theta_m^n}{\tau} = \frac{\theta_{m+1}^{n+1} - 2\theta_m^{n+1} + \theta_{m-1}^{n+1}}{h^2} - c_1 \frac{\theta_m^{n+1} - \theta_{m-1}^{n+1}}{h} + c_2 \theta_m^{n+1}, \quad (17)$$

где $m = 1, 2, \dots, M-1$, $n = 1, 2, \dots, N-1$, с граничными условиями

$$\theta_0^n = \theta_M^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (18)$$

и начальным условием

$$\theta_m^0 = \sigma_m, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (19)$$

Неявные разностные схемы (14), (17) абсолютно устойчивы, и их порядок аппроксимации равен $O(\tau + h)$ [11]. На основе теоремы Лакса [7] приходим к выводу, что решение разностной задачи (14)–(16) сходится к решению задачи (1)–(5), а решение разностной задачи (17)–(19) сходится к решению задачи (7), (9).

Формулы (11), (12) для приближённого вычисления оценки $F(z^0)$ имеют вид

$$a^n = \frac{(a_2)^n}{2h} \left| \sum_{p=n}^{N-1} \left(4\theta_1^{N-p-1} - 3\theta_0^{N-p-1} - \theta_2^{N-p-1} \right) \right|, \\ b^n = \frac{(b_2)^n - (b_1)^n}{4h} \left(3\theta_{M-1}^{N-n-1} - 4\theta_{M-2}^{N-n-1} + \theta_{M-3}^{N-n-1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \left((f_1)_m^n - (f_2)_m^n \right) |\theta_m^{N-n-1}|, \\ F(z^0) = \max \left(|z^0| + \sum_{p=0}^{N-1} (b^p - a^p); \max_{0 \leq k \leq N-1} \sum_{p=k}^{N-1} (b^p - a^p) \right).$$

4. Программная реализация и численный эксперимент

Данный программный продукт разработан в среде Microsoft Visual Studio на платформе .NET Framework 4.6.1 с использованием языка CSharp. Эта среда предоставляет широкие возможности для разработки приложений под операционную систему Windows и на данный момент наиболее стабильна, к тому же разработка на данном языке позволяет больше сконцентрироваться на результате, а не на совершенствовании кода. Подробнее о преимуществах языка можно почитать, например, в [12].

Интерфейс написанной программы (рис. 1), реализующей метод (14)–(16) для исследуемой задачи, позволяет выполнять следующие действия:

- задавать отрезки изменения пространственной и временной переменной, а также значения c_1, c_2 в уравнении (1);
- вводить с клавиатуры функции $g(x)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, $f_1(x, t)$, и $f_2(x, t)$ для задачи (1)–(5). Также доступен ввод функции $\sigma(x)$ для задачи (7), (9) в настройках программы. Вычисление значений функций производится с помощью парсера математических выражений;

- визуализировать решение задачи (1)–(5), строить график приближённого управления $\xi(t)$;
- сохранять решение в файл в виде таблицы чисел.

При нажатии на кнопку *Визуализация* в интерфейсе программы производится построение линий уровня функции решения при помощи программного компонента InteractiveDataDisplay v.1.0.0 [13], при повторном её нажатии — построение дискретной функции управления.

При нажатии на кнопку *3D* производится построение функции решения в трёхмерном пространстве с помощью средств OpenGL [14].

При перемещении ползунка с помощью мыши можно посмотреть состояние теплового процесса в определённый момент времени.

Заметим, что задача (14)–(16) представляет собой систему большого числа линейных алгебраических уравнений, которая в программе решается методом прогонки [15].

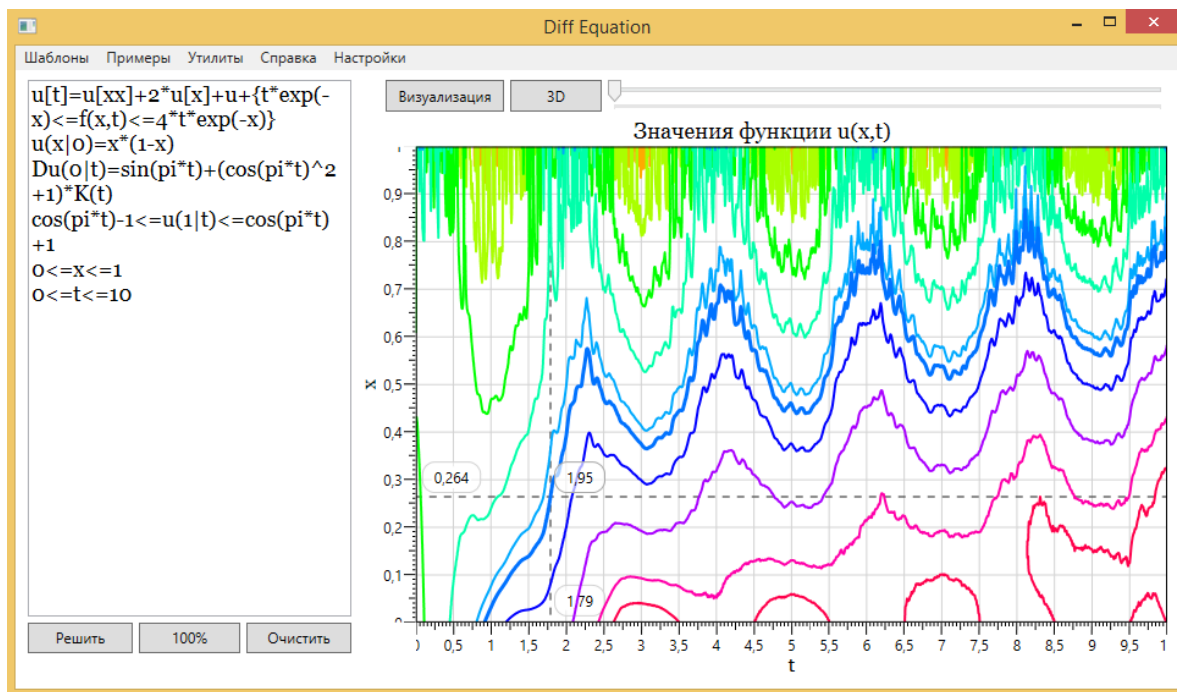


Рис. 1. Интерфейс программы

Работоспособность программы проверим на следующем примере.

Пример 1. Зададим $l = 4$ и рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + u + f(x, t), \quad 0 < t < 10, \quad 0 < x < 1;$$

$$u(x, 0) = x(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$\frac{du(0, t)}{dt} = \sin(\pi t) + (\cos^2(\pi t) + 1) \xi, \quad 0 \leq t \leq 10, \quad |\xi| \leq 1;$$

$$\cos(\pi t) - 1 \leq u(1, t) \leq \cos(\pi t) + 1, \quad 0 \leq t \leq 10;$$

$$\frac{t}{e^x} \leq f(x, t) \leq \frac{4t}{e^x}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу (7), (9) с заданной функцией $\sigma(x) = e^x \sin(\pi x)$:

$$\frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(x, \tau)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial x} + \theta(x, \tau), \quad \tau > 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$\theta(x, 0) = e^x \sin(\pi x), \quad \theta(0, \tau) = \theta(1, \tau) = 0.$$

Решением данной задачи является функция

$$\theta(x, \tau) = e^{x - \pi^2 \tau} \sin(\pi x), \quad \tau > 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Далее находим

$$h_1(t) = \frac{5t}{2} e^{-\pi^2(10-t)} \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{5t}{\pi} e^{-\pi^2(10-t)}.$$

Из формулы (10) следует, что

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-\pi^2(10-t)} \int_0^1 u(x, t) e^x \sin(\pi x) dx + \frac{u(0, t)}{\pi} \left(1 - e^{-\pi^2(10-t)}\right) + \\ &+ \int_t^{10} \left(\frac{\sin(\pi \tau)}{\pi} + \frac{\pi^2 \cos(\pi \tau) - \sin(\pi \tau)}{\pi} e^{1 - \pi^2(10-\tau)} + h_1(\tau) \right) d\tau - 4. \end{aligned}$$

Посчитаем оценку $F(z(0))$, используя формулу (12). Для этого вычислим

$$\begin{aligned} z(0) &= e^{-10\pi^2} \int_0^1 x(1-x) e^x \sin(\pi x) dx + \\ &+ \int_0^{10} \left(\frac{\sin(\pi \tau)}{\pi} + \frac{\pi^2 \cos(\pi \tau) - \sin(\pi \tau)}{\pi} e^{1 - \pi^2(10-\tau)} + \frac{5\tau}{\pi} e^{-\pi^2(10-\tau)} \right) d\tau - 4 = \\ &= \frac{4\pi(e(\pi^2 - 1) - 2)}{e^{10\pi^2}(1 + \pi^2)^3} + \frac{\pi e(1 - e^{-10\pi^2})}{1 + \pi^2} + \frac{5(10\pi^2 + e^{-10\pi^2} - 1)}{\pi^5} + \frac{e - e^{1-10\pi^2}}{\pi^2(1 + \pi^2)} - 4. \end{aligned}$$

Вычисляя приближённо выражение для $z(0)$, получим $z(0) \approx -1.5928$.

Далее вычислим

$$\begin{aligned} &\int_0^{10} \left(\pi e^{1 - \pi^2(10-r)} + \frac{3r}{\pi} e^{-\pi^2(10-r)} - (\cos^2(\pi r) + 1) \frac{1 - e^{-\pi^2(10-r)}}{\pi} \right) dr = \\ &= \frac{3(4 - \pi^2) + e^{10\pi^2} ((e - 15)\pi^6 + 4(e - 7)\pi^4 + 123\pi^2 - 12) - (2 + e(4 + \pi^2))\pi^4}{\pi^5(4 + \pi^2)e^{10\pi^2}}. \end{aligned}$$

Этот интеграл приближённо равен -2.8918 . Таким образом, получаем в формуле (12), что

$$|z(0)| + \int_0^{10} (b(r) - a(r)) dr = |-1.5928| - 2.8918 = -1.2990.$$

Осталось найти

$$\max_{0 \leq \tau \leq 10} \int_{\tau}^{10} (b(r) - a(r)) dr. \quad (20)$$

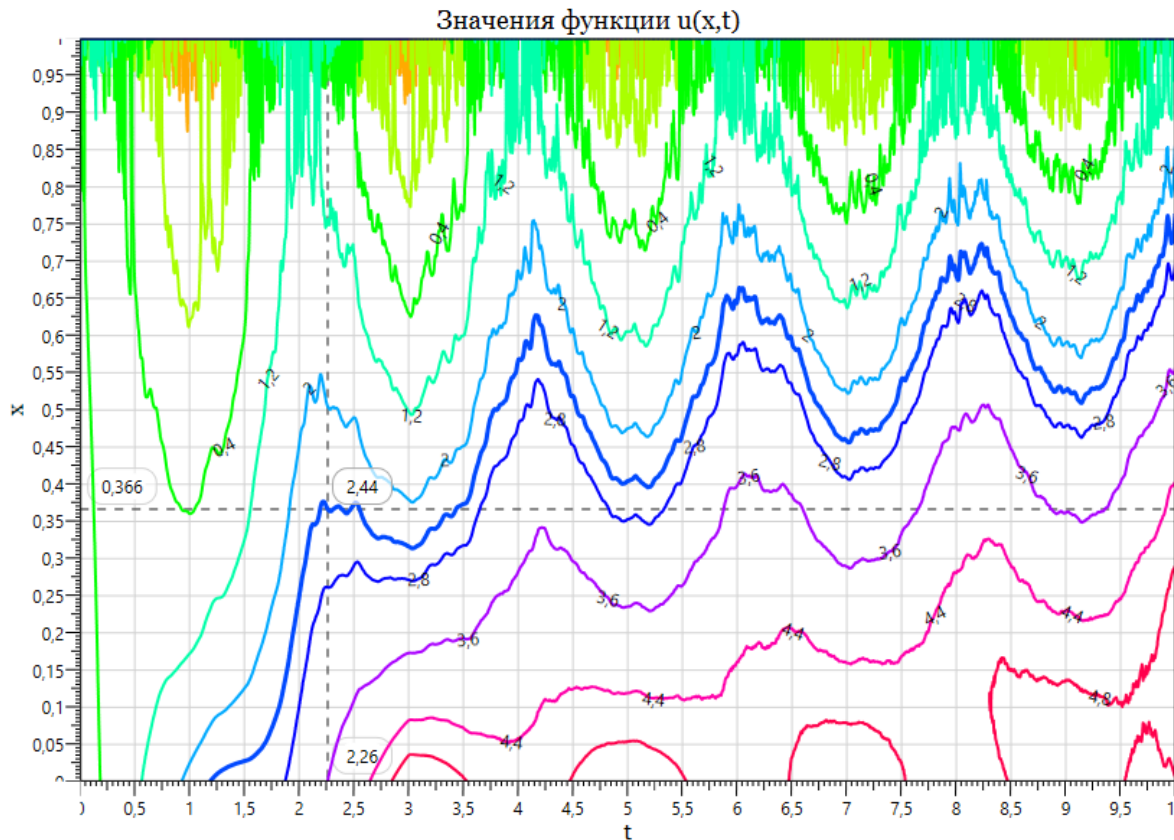


Рис. 2. Визуализация решения примера 1

Для этого необходимо приравнять подынтегральную функцию к нулю. Имеем, что

$$\pi e^{1-\pi^2(10-\tau)} + \frac{3\tau}{\pi} e^{-\pi^2(10-\tau)} - (\cos^2(\pi\tau) + 1) \frac{1 - e^{-\pi^2(10-\tau)}}{\pi} = 0.$$

Решая это уравнение численно, находим, что $\tau \approx 9.6001$. Подставляя это значение в (20) и вычисляя определённый интеграл, получаем, что значение $F(z(0))$ с точностью до третьего знака после запятой равно $F(z(0)) \approx 1.6419$.

При численном решении задачи из примера 1 в программе (рис. 2) были найдены значения оценки $F(z^0)$, а также значения интеграла (6) при различных шагах разбиения h и τ пространственной и временной переменной.

h	τ	$F(z^0)$	I
0.01	0.01	1.7776	0.4973
0.005	0.005	1.7098	0.3229
0.0025	0.0025	1.6758	0.0847
0.00125	0.00125	1.6588	0.0716
0.0005	0.0005	1.6487	0.0282

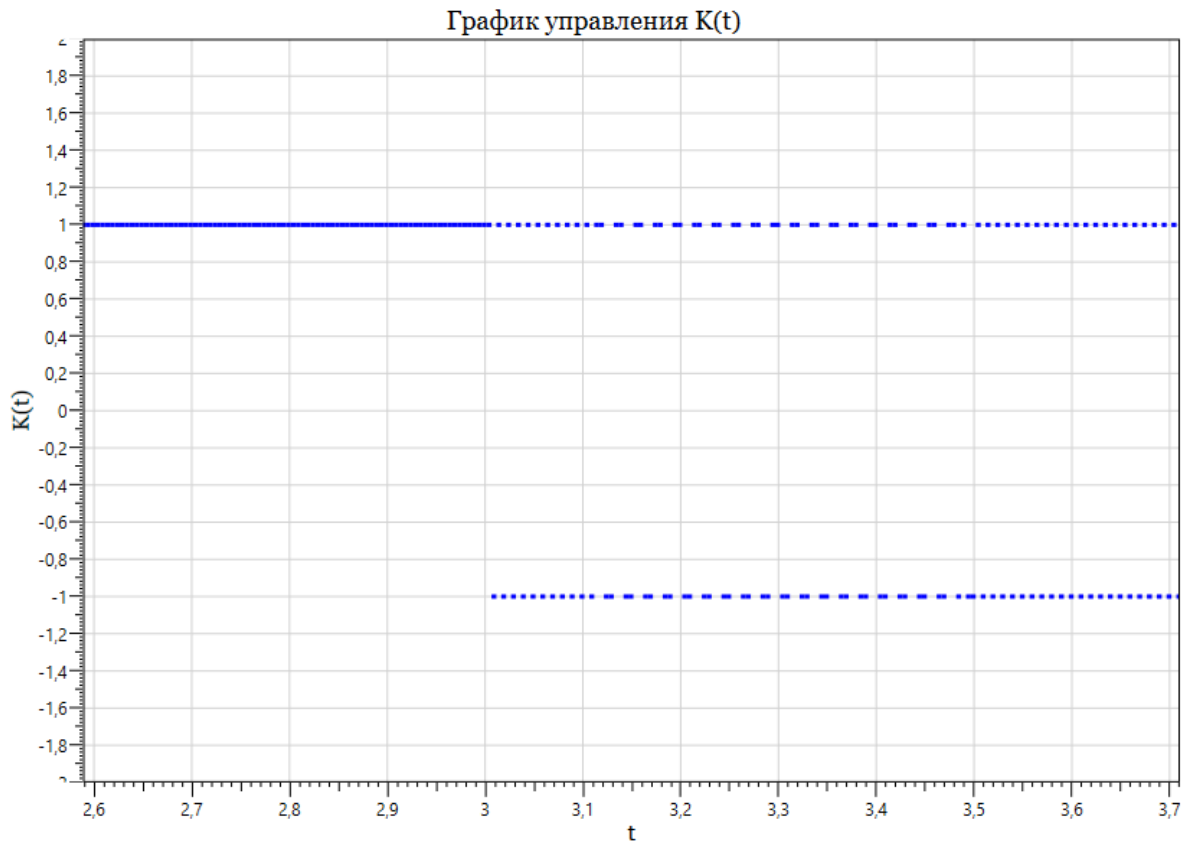
Из таблицы видно, что при уменьшении шагов h и τ увеличивается точность вычислений.

Поскольку значения интеграла I в неравенстве (6) всегда меньше значений $F(z(0))$, мы можем найти такое ε , чтобы с помощью функции управления (13) выполнить неравенство (6).

Визуализация решения тестовой задачи при $h = \tau = 0.005$ в программе изображена на рис. 2. При наведении курсора мыши на область решения отображается дополнительная информация о значении функции в точке (x, t) и рисуется изолиния.

Построим с помощью программы приближённый график управления $\xi(t)$ (в программе $K(t)$) при $2.6 \leq t \leq 3.7$ (рис. 3).

Из графика видно, что с определённого момента времени скорость изменения температуры на правом конце стержня то уменьшается, то увеличивается, в зависимости от значений функции управления $\xi(t)$. Это происходит потому, что темпе-

Рис. 3. Дискретный график управления $\xi(t)$

ратура на правом конце стержня точно не известна, а в программе вычисляется с помощью случайного числа.

Список литературы

1. **Осипов, Ю. С.** Позиционное управление в параболических системах / Ю. С. Осипов // Приклад. математика и механика. — 1977. — Т. 41, № 2. — С. 195–201.
2. **Егоров, А. И.** Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А. И. Егоров. — М. : Наука, 1978. — 464 с.
3. **Короткий, А. И.** Аппроксимация в задачах позиционного управления параболическими системами / А. И. Короткий, Ю. С. Осипов // Приклад. математика и механика. — 1978. — Т. 42, № 4. — С. 599–605.
4. **Васильев, Ф. П.** Методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. — М. : Наука, 1981. — 400 с.
5. **Ukhobotov, V. I.** The problem of controlling the process of heating the rod in the presence of disturbance and uncertainty / V. I. Ukhobotov, I. V. Izmet'shev // IFAC PapersOnLine. — 2018. — Vol. 51, iss. 32. — P. 739–742.
6. **Ухоботов, В. И.** Задача управления процессом нагрева стержня с неизвестными температурой на правом конце и плотностью источника тепла / В. И. Ухоботов, И. В. Изместьев // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2019. — Т. 25, № 1. — С. 297–305.
7. **Самарский, А. А.** Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 616 с.
8. **Полянин, А. Д.** Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. — М. : Физматлит, 2001. — 576 с.
9. **Тихонов, А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 735 с.

10. **Даугавет, И. К.** Теория приближённых методов. Линейные уравнения / И. К. Даугавет. — 2-е изд. — СПб : БХВ, 2006. — 278 с.
11. **Кульков, С. С.** Решение дифференциальных уравнений параболического типа, содержащих производную по координате первого порядка [Электронный ресурс]. — URL: http://ict.muctr.ru/html2/6/lek6_3_1.html (дата обращения: 02.10.2019).
12. Выбор между C++ и C Sharp [Электронный ресурс]. — URL: <https://habrahabr.ru/post/262461/> (дата обращения: 02.10.2019).
13. InteractiveDataDisplay for WPF [Электронный ресурс]. — URL: <https://github.com/Microsoft/InteractiveDataDisplay.WPF> (дата обращения: 18.04.2019).
14. OpenGL [Электронный ресурс]. — URL: <https://opengl.org/> (дата обращения: 02.10.2019).
15. **Годунов, С. К.** Решение систем линейных уравнений / С. К. Годунов. — Новосибирск : Наука, 1980. — 177 с.

Поступила в редакцию 03.10.2019

После переработки 01.11.2019

Сведения об авторе

Сушков Андрей Сергеевич, аспирант математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: mesocyclon@yandex.ru.

CONTROL OF THE ROD HEATING PROCESS IN MOVING ENVIRONMENT WITH VOLUME HEAT FORMATION

A.S. Sushkov

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
mesocyclon@yandex.ru

The article proposes a numerical method for solving the problem of controlling the process of heating a rod in moving environment with volume heat formation. The controlled parameter is the temperature at the left end of the rod. When constructing the control function, the approach is used, which is described in the works of V.I. Ukhobotov and I.V. Izmet'ev. In this paper, special attention is paid to the development of a numerical method for solving the problem, as well as its software implementation. The approximation of the control problem is made using an implicit difference scheme. A program has been developed that allows one to obtain and visualize an approximate solution to the considered problem, as well as to build a control function. The performance of the program is verified on one example.

Keywords: *heat-conduction equation, temperature, control, difference scheme, approximation.*

References

1. **Osipov Yu.S.** Position control in parabolic systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 41, no. 2, pp. 187–193.
2. **Egorov A.I.** *Optimal'noye upravleniye teplovymi i diffuzionnymi protsessami* [Optimal control of thermal and diffusion processes]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 464 p. (In Russ.).
3. **Korotkii A.I., Osipov Yu.S.** Approximation in problems of position control of parabolic systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1978, vol. 42, no. 4, pp. 631–637.
4. **Vasil'ev F.P.** *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Methods for solving extremal problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 400 p. (In Russ.).
5. **Ukhobotov V.I., Izmet'ev I.V.** The problem of controlling the process of heating the rod in the presence of disturbance and uncertainty. *IFAC PapersOnLine*, 2018, vol. 51, iss. 32, pp. 739–742.
6. **Ukhobotov V.I., Izmet'ev I.V.** Zadacha upravleniya protsessom nagreva stержnya s neizvestnymi temperaturay na pravom kontse i plotnost'yu istochnika tepla [A control problem for a rod heating process with unknown temperature at the right end and unknown density of the heat source]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of RAS], 2019, vol. 25, no. 1, pp. 297–305. (In Russ.).
7. **Samarskiy A.A.** *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of difference schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 616 p. (In Russ.).
8. **Polyanin A.D.** *Spravochnik po lineinym uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Handbook of linear equations of mathematical physics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 576 p. (In Russ.).
9. **Tikhonov A.N., Samarskiy A.A.** *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 735 p. (In Russ.).
10. **Daugavet, I.K.** *Teoriya priblizhyonnykh metodov. Lineynye uravneniya* [Theory of approximate methods. Linear equations]. BKhV Publ., 2006. 278 p. (In Russ.).

11. **Kul'kov, S.S.** Resheniye differentsial'nykh uravneniy parabolicheskogo tipa, soderzhashchikh proizvodnuyu po koordinate pervogo poryadka [Solving of parabolic type differential equations, containing a first order derivative with respect to coordinate]. Available at: http://ict.muctr.ru/html2/6/lek6_3_1.html, accessed 02.10.2019.
12. Choosing between C ++ and C Sharp. Available at: <https://habrahabr.ru/post/262461/>, accessed 02.10.2019.
13. InteractiveDataDisplay for WPF. Available at: <https://github.com/Microsoft/InteractiveDataDisplay.WPF>, accessed 02.10.2019.
14. OpenGL. Available at: <https://opengl.org/>, accessed 02.10.2019.
15. **Godunov, S. K.** *Resheniye sistem lineinykh uravneniy* [Solving linear equation systems]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1980. 177 p. (In Russ.).

Accepted article received 03.10.2019

Corrections received 01.11.2019