Челябинский физико-математический журнал. 2019. Т. 4, вып. 4. С. 419–426.

УДК 517.958 DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14405

О ПОДВИЖНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ НЕЛИНЕЙНОГО 3D-УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА — ГОРДОНА

Р. К. Салимов[1,a], Е. Г. Екомасов[1,2,3], А. М. Гумеров[1]

[1] *Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*
[2] *Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия*
[3] *Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия*
[a] *salemsrkk@yandex.ru*

Рассмотрена система из точечной материальной частицы и поля, описываемого нелинейным 3D-уравнением Клейна — Гордона. Частица создаёт неоднородность поля и взаимодействует с ним. Показано, что при учёте релятивистских эффектов в случае малой по сравнению с параметрами неоднородности массы покоя частицы для такой системы невозможен устойчивый минимум энергии при нулевой скорости. Подобное поведение интересно с точки зрения построения солитонных моделей частиц с собственным ненулевым моментом количества движения или солитонных моделей частиц с осциллирующей массой.

Ключевые слова: *солитон, нелинейное волновое уравнение, релятивистский эффект.*

Одним из часто исследуемых лоренц-инвариантных нелинейных дифференциальных уравнений является уравнение Клейна — Гордона, в частности уравнение синус-Гордона. Оно имеет много приложений в различных областях физики, включая гидродинамику, физику конденсированного состояния, теории поля и т. д. [1–4]. Обычно при рассмотрении подобных уравнений с различными неоднородностями или примесями примеси считаются стационарными. Они в таких задачах моделируют различные дефекты, например для уравнения синус-Гордона — дефекты в магнитных материалах [5–11]. В работах [12–14] численно была показана возможность существования в области примеси долгоживущих 2D-пульсонов и 2D-солитонов, структура и динамические свойства которых зависят от параметров примеси. Уравнения Клейна — Гордона являются лоренц-инвариантными, и их решения обладают релятивистскими эффектами [15]. Поэтому достаточно интересным будет рассмотрение системы из этих уравнений и точечной частицы, описываемой релятивистской динамикой. Точечная частица в данной модели будет источником неоднородности для скалярного поля. К тому же, как было показано в [16], учёт релятивистских эффектов в подобной системе приводит к появлению незатухающего движения, которое можно рассматривать как модель собственного момента количества движения или спина частиц. Появление собственного момента количества движения частиц в подобной модели как релятивистского эффекта делает её весьма интересной с методологической точки зрения.

Ранее в работе [16] были исследованы подвижные неоднородности нелинейного пространственно одномерного уравнения Клейна — Гордона, которые рассматривались как солитонные модели частиц с незатухающим нестационарным движением. Для того чтобы рассматривать подобные неоднородности как солитонные модели

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 18-31-00122.

частиц с незатухающим вращением, естественно рассмотреть подобные модели в 3D-случае. В данной работе показано, что в подобной модели при некоторых параметрах и в пространственно трёхмерном случае невозможен минимум энергии при покоящейся частице.

Для рассмотрения подвижных неоднородностей или дефектов будем считать, что неоднородность создаётся частицей с массой m, координаты которой обозначим как x_1, y_1, z_1, её скорость — как $v_x = \dot{x}_1, v_y = \dot{y}_1, v_z = \dot{z}_1$. Гамильтониан неоднородности, взаимодействующей с полем u, запишем в следующем виде (рассматриваем трёхмерный случай):

$$H = H_{\text{def}} + H_u + H_{\text{int}}, \tag{1}$$

где H_{def} — энергия частицы, создающей неоднородность,

$$H_{\text{def}} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}},$$

H_u — энергия скалярного поля,

$$H_u = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u_x^2}{2} + \frac{u_y^2}{2} + \frac{u_z^2}{2} + \frac{u_t^2}{2} + V(u)\right) dxdydz, \tag{2}$$

H_{int} — энергия взаимодействия скалярного поля и частицы, создающей неоднородность,

$$H_{\text{int}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} q(x_1, y_1, z_1, v_x, v_y, v_z, x, y, z) W(u).$$

Функция $V(u)$ в выражении (2) имеет вид

$$V(u) = \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2}.$$

Из условия сохранения гамильтониана (1), дифференцируя его по времени, получаем уравнения движения для поля:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(u_t u_{tt} + \frac{\partial V}{\partial u} u_t + q\frac{\partial W}{\partial u} u_t\right) dxdydz + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (u_x u_{xt} + u_y u_{yt} + u_z u_{zt}) dxdydz +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(W\frac{\partial q}{\partial x_1}\dot{x}_1 + W\frac{\partial q}{\partial v_x}\dot{v}_x\right) dxdydz + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(W\frac{\partial q}{\partial y_1}\dot{y}_1 + W\frac{\partial q}{\partial v_y}\dot{v}_y\right) dxdydz +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(W\frac{\partial q}{\partial z_1}\dot{z}_1 + W\frac{\partial q}{\partial v_z}\dot{v}_z\right) dxdydz + \frac{m(v_x\dot{v}_x + v_y\dot{v}_y + v_z\dot{v}_z)}{(1-v^2)^{(3/2)}} = 0.$$

Далее, интегрируя по каждой из координат, получим равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_x u_{xt} dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{xx} u_t dx.$$

Считая, что выполняется уравнение движения для поля u

$$-u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} + u_{tt} + \frac{\partial V}{\partial u} + q\frac{\partial W}{\partial u} = 0,$$

получаем выражение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(W\frac{\partial q}{\partial x_1}\dot{x}_1+W\frac{\partial q}{\partial v_x}\dot{v}_x\right)dxdydz+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(W\frac{\partial q}{\partial y_1}\dot{y}_1+W\frac{\partial q}{\partial v_y}\dot{v}_y\right)dxdydz+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(W\frac{\partial q}{\partial z_1}\dot{z}_1+W\frac{\partial q}{\partial v_z}\dot{v}_z\right)dxdydz+\frac{m(v_x\dot{v}_x+v_y\dot{v}_y+v_z\dot{v}_z)}{(1-v^2)^{3/2}}=0.$$

Рассмотрим далее случай взаимодействия H_{int}, где $W=2\cos^2(u/2)$, а область действия потенциала $q(z,v,x)$ ограничена элиптической областью:

$$q(x,y,z,x_1,y_1,z_1,v_x,v_y,v_z)=\frac{U_0}{\sqrt{1-v^2}}\text{ при }R^2-\frac{(x-x_1)^2}{1-v^2}-(y-y_1)^2-(z-z_1)^2\geq 0,$$

$$q(x,y,z,x_1,y_1,z_1,v_x,v_y,v_z)=0\text{ при }R^2-\frac{(x-x_1)^2}{1-v^2}-(y-y_1)^2-(z-z_1)^2<0.$$

Здесь релятивистское изменение потенциала при движении его источника, т. е. частицы, принимается аналогичным изменению электростатического потенциала ϕ в релятивистском случае, например изменению потенциала движущегося заряда. Т. е. значение потенциала при движении для покоящегося наблюдателя становится больше, а область его действия сужается. Для простоты считаем, что частица движется только вдоль оси x и $v=v_x$. Запаздыванием при этом пренебрегаем. Такой потенциал взаимодействия приводит к равенству

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-u_{tt}=u+2u^3-U_0\sin(u)q(x_1,y_1,z_1,v_x,v_y,v_z,x,y,z)$$

и уравнению для частицы при условии $v=v_x$

$$\frac{mv_x\dot{v}_x}{(1-v^2)^{3/2}}+\frac{U_0v_x\dot{v}_x}{(1-v^2)^{3/2}}\int\limits_{z_1-R}^{z_1+R}dz\int\limits_{y_1-g}^{y_1+g}dy\int\limits_{x_1-f}^{x_1+f}2\cos^2(u/2)dx+\int\limits_{z_1-R}^{z_1+R}dz\int\limits_{y_1-g}^{y_1+g}dy(A+B)=0,$$

$$f(z,y,z_1,y_1,v)=\sqrt{(1-v^2)(R^2-(z-z_1)^2-(y-y_1)^2)},\ g(z,z_1,v)=\sqrt{R^2-(z-z_1)^2},$$

$$A=-\frac{2U_0v_x\dot{v}_x}{(1-v^2)^{3/2}}f(z,y,z_1,y_1,v)\cos^2(u/2)\Big|_{x=x_1+f}-$$

$$-\frac{2U_0x\dot{v}_x}{(1-v^2)^{3/2}}f(z,y,z_1,y_1,v)\cos^2(u/2)\Big|_{x=x_1-f},$$

$$B=\frac{2U_0\dot{x}_1}{(1-v^2)^{1/2}}\cos^2(u/2)\Big|_{x=x_1+f}-\frac{2U_0\dot{x}_1}{(1-v^2)^{1/2}}\cos^2(u/2)\Big|_{x=x_1-f}.$$

Учитывая, что $\dot{x}_1=v_x$, уравнение движения для частицы можно записать в виде $m_{\text{eff}}\dot{v}_x=F_{\text{eff}}$, где

$$m_{\text{eff}}=\frac{m}{(1-v^2)^{3/2}}+\int\limits_{z_1-R}^{z_1+R}dz\int\limits_{y_1-g}^{y_1+g}dy(C+A),\tag{3}$$

$$F_{\text{eff}} = -\int\limits_{z_1-R}^{z_1+R} dz \int\limits_{y_1-g}^{y_1+g} dyB, \tag{4}$$

$$C = \frac{2U_0 v_x \dot{v}_x}{(1-v^2)^{3/2}} \int\limits_{x_1-f}^{x_1+f} \cos^2(u/2)dx.$$

Из выражения (3), в частности, следует, что для решения $u = 0$ эффективная масса равна обычной, т. е. если поле не захватывается неоднородностью, то уравнение движения для частицы совпадает с уравнением движения без учёта поля u.

Далее покажем, что для этой модели при малом значении массы покоя m и достаточно больших параметрах U_0, R не будет существовать устойчивого минимума энергии в состоянии с нулевой скоростью. Под достаточно большими значениями параметров U_0, R подразумеваются такие значения, при которых для покоящейся частицы будет существовать стационарное решение в виде солитона. В этом стационарном состоянии энергия поля $H_u + H_{\text{int}}$ будет иметь минимум для покоящейся частицы, т. е. для случая, когда координаты x_1, y_1, z_1 не меняются. Численные эксперименты для сферически симметричного случая показывают существование таких стационарных решений, например для случая $R = 1$, $U_0 = 20$. Решение $u(r)$ при этом является монотонно убывающим по r, т. е. $u(a) > u(b)$ для всех $b > a$.

При этом координаты центра солитона находятся в точке x_1, y_1, z_1. Для такого решения значение подынтегрального выражения $C + A$ будет отрицательным при $v = 0$. Действительно, если выражение $u(\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2})$ монотонно убывает по $r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$ и является сферически симметричным, то оно будет также монотонно убывать с ростом $(x-x_1)^2$ при фиксированных y и z. Учитывая, что максимальное значение $|u|_{\max} < \pi$ и $u \to 0$ при $r \to \infty$, получим, что значение $\cos^2(u/2)$ при $x = x_1 \pm f$ будет больше, чем $\cos^2(u/2)$ при $x_1 - f < x < x_1 + f$. Поэтому $A + C < 0$.

Предположим теперь, что при малых по сравнению с величиной $|A + C|$ значениях m минимумом энергии будет стационарное состояние частицы. Для малых m эффективная масса частицы m_{eff} в таком состоянии будет отрицательной. Значит, такое состояние частицы будет неустойчивым. Действительно, при малом смещении координаты частицы x_1 в положительном направлении оси x относительно центра солитона x_0 возникнет отрицательная возвращающая сила F_{eff}. А так как эффективная масса тоже будет отрицательной, частица получит приращение скорости в сторону первоначального смещения, и подобное стационарное состояние будет неустойчивым.

Покажем это более подробно. Как было показано выше, для фиксированных значений y, z функция $\cos^2(u/2)$ будет монотонно возрастать с ростом $(x-x_1)^2$. Значит, величина B в выражении (4) будет положительна при небольшом смещении x_1 относительно центра солитонного решения x_0 и сила F_{eff} будет отрицательна.

Таким образом, представленная модель при малой массе покоя частицы описывает постоянно движущуюся с некоторым ускорением частицу. В случае финитного движения частицы в двумерном и трёхмерном случае подобная система будет иметь некоторый ненулевой момент количества движения. В этом случае подобную систему уместно рассматривать как солитонную модель спина. Случай, в котором эффективная масса частицы будет оставаться положительной, также интересен с точки зрения существования состояний с двумя различными эффективными массами, зависящих от энергии движения частицы. Кроме того, данная модель обладает достаточной новизной и достойна изучения с методологической точки зрения.

Список литературы

1. **Scott, A.** (ed.). Encyclopedia of Nonlinear Science / A. Scott. — New York : Routledge, 2006. — 1104 p.
2. **Cuevas-Maraver, J.** The sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics / J. Cuevas-Maraver, P. G. Kevrekidis, F. Williams (eds.). — Cham : Springer, 2014. — 263 p.
3. **Dauxois, Th.** Physics of Solitons / Th. Dauxois, M. Peyrard. — Cambridge : Cambridge University Press, 2010. — 436 p.
4. **Braun, O. M.** The Frenkel — Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications / O. M. Braun, Yu. S. Kivshar. — Berlin : Springer, 2004. — 472 p.
5. **Ekomasov, E. G.** On the possibility of the observation of the resonance interaction between kinks of the sine-Gordon equation and localized waves in real physical systems / E. G. Ekomasov, A. M. Gumerov, R. V. Kudryavtsev // JETP Letters. — 2015. — Vol. 101, no. 12. — P. 835–839.
6. Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны / M. A. Шамсутдинов, В. Н. Назаров, И. Ю. Ломакина и др. — М. : Наука, 2009. — 456 с.
7. **Ekomasov, E. G.** Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping / E. G. Ekomasov, A. M. Gumerov, R. V. Kudryavtsev // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2017. — Vol. 312. — P. 198–208.
8. Arbitrarily large numbers of kink internal modes in inhomogeneous sine-Gordon equations / J. A. González, A. Bellorín, M. A. García-Ñustes et al. // Physics Letters A. — 2017. — Vol. 381, no. 24. — P. 1995–1998.
9. **Ekomasov, E. G.** Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities / E. G. Ekomasov, A. M. Gumerov, R. V. Kudryavtsev et al. // Brazilian Journal of Physics. — 2018. — Vol. 48, no. 6. — P. 576–584.
10. Interaction of sine-Gordon kinks and breathers with a parity-time-symmetric defect / D. Saadatmand, S. V. Dmitriev, D. I. Borisov, P. C. Kevrekidis // Physical Review E. — 2014. — Vol. 90, no. 5. — P. 052902.
11. **Ekomasov, E. G.** Excitation of magnetic inhomogeneities in three-layer ferromagnetic structure with different parameters of the magnetic anisotropy and exchange / E. G. Ekomasov, R. R. Murtazin, V. N. Nazarov // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2015. — Vol. 385. — P. 217–221.
12. Nucleation and evolution of magnetic inhomogeneities of the pulson and 2D soliton type in magnets with local anisotropy inhomogeneities / E. G. Ekomasov, R. R. Murtazin, Sh. A. Azamatov, A. E. Ekomasov // Physics of Metals and Metallography. — 2011. — Vol. 112, no. 3. — P. 213-223.
13. **Ekomasov, E. G.** Excitation of nonlinear solitary flexural waves in a moving domain wall / E. G. Ekomasov, S. A. Azamatov, R. R. Murtazin // Physics of Metals and Metallography. — 2009. — Vol. 108, no. 6. — P. 532–537.
14. **Ekomasov, E. G.** Interaction of sine-Gordon solitons in the model with attracting impurities / E. G. Ekomasov, A. M. Gumerov, R. R. Murtazin // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2017. — Vol. 40, no. 17. — P. 6178–6186.
15. **Мусиенко, А. И.** Аналоги релятивистских эффектов в классической механике / А. И. Мусиенко, Л. И. Маневич // Успехи. физ. наук. — 2004. — Т. 174, № 8. — С. 861–886.
16. **Salimov, R. K.** On nonstationary inhomogeneities of the nonlinear Klein—Gordon equation / R. K. Salimov // JETP Letters. — 2019. — Vol. 109, no. 7. — P. 490–493.

Поступила в редакцию 19.10.2019
После переработки 05.11.2019

Сведения об авторах

Салимов Ришат Камилевич, преподаватель кафедры информационных технологий и компьютерной математики, Башкирский государственный университет, Уфа, Россия; e-mail: salemsrkk@yandex.ru.

Екомасов Евгений Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической физики, Башкирский государственный университет, Уфа, Россия; научный сотрудник, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия; профессор кафедры моделирования физических процессов и систем, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия.

Гумеров Азамат Маратович, кандидат физико-математических наук, инженер физико-технического института, Башкирский государственный университет, Уфа, Россия.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2019. Vol. 4, iss. 4. P. 419–426.

DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14405

ON NONSTATIONARY INHOMOGENEITIES OF THE NONLINEAR 3D KLEIN — GORDON EQUATION

R.K. Salimov[1,a], **E.G. Ekomasov**[1,2,3], **A.M. Gumerov**[1]

[1]*Bashkir State University, Ufa, Russia*
[2]*South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia*
[3]*Tyumen State University, Tyumen, Russia*
[a]*salemsrkk@yandex.ru*

A system of a point material particle and a field described by the nonlinear 3D Klein — Gordon equation is considered. The particle creates nonuniformity of the field and interacts with it. It is showed that when taking into account relativistic effects, if the particle small in comparison with the parameters of nonuniformity of the rest mass, a stable minimum of energy at zero velocity is impossible. Such a behavior is of interest from the point of view of soliton models construction of particles with an intrinsic non-zero moment or soliton models of particles with the oscillating mass.

Keywords: *soliton, nonlinear wave equation, relativistic effect.*

References

1. **Scott A.** *Encyclopedia of Nonlinear Science.* New York, Routledge, 2004. 1004 p.
2. **Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P.G., Williams F.** (eds.) *The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics.* Cham, Springer, 2014. 263 p.
3. **Dauxois Th., Peyrard M.** *Physics of Solitons.* Cambridge, Cambridge University Press, 2010. 436 p.
4. **Braun O.M., Kivshar Yu.S.** *The Frenkel — Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications.* Berlin, Springer, 2004. 472 p.
5. **Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Kudryavtsev R.V.** On the possibility of the observation of the resonance interaction between kinks of the sine-Gordon equation and localized waves in real physical systems. *JETP Letters*, 2015, vol. 101, no. 12, pp. 835–839.
6. **Shamsutdinov M.A., Nazarov V.N., Lomakina I.Yu.** *Ferro i antiferromagnetodinamika. Nelineynye kolebaniya, volny i solitony* [Ferro- and Antiferromagnetodynamics. Nonlinear Oscillations, Waves and Solitons]. Moscow, Nauka Publ., 2009. 452 p. (In Russ.).
7. **Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Kudryavtsev R.V.** Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017, vol. 312, pp. 198–208.
8. **González J.A., Bellorín A., García-Ñustes M.A. [et al.].** Arbitrarily large numbers of kink internal modes in inhomogeneous sine-Gordon equations. *Physics Letters A*, 2017, vol. 381, no. 24, pp. 1995–1998.
9. **Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Kudryavtsev R.V. [et al.].** Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities. *Brazilian Journal of Physics*, 2018, vol. 48, no. 6, pp. 576–584.

The work is supported by the Russian Foundation of Basic Research, grant 18-31-00122.

10. **Saadatmand D., Dmitriev S.V., Borisov D.I., Kevrekidis P.G.** Interaction of sine-Gordon kinks and breathers with a parity-time-symmetric defect. *Physical Review E*, 2014, vol. 90, no. 5, p. 052902.
11. **Ekomasov E.G., Murtazin R.R., Nazarov V.N.** Excitation of magnetic inhomogeneities in three-layer ferromagnetic structure with different parameters of the magnetic anisotropy and exchange. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2015, vol. 385, pp. 217–221.
12. **Ekomasov E.G., Murtazin R.R., Azamatov Sh.A., Ekomasov A.E.** Nucleation and evolution of magnetic inhomogeneities of the pulson and 2D soliton type in magnets with local anisotropy inhomogeneities. *Physics of Metals and Metallography*, 2011, vol. 112, no. 3, pp. 213–223.
13. **Ekomasov E.G., Azamatov S.A., Murtazin R.R.** Excitation of nonlinear solitary flexural waves in a moving domain wall. *Physics of Metals and Metallography*, 2009, vol. 108, no. 6, pp. 532–537.
14. **Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Murtazin R.R.** Interaction of sine-Gordon solitons in the model with attracting impurities. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2017, vol. 40, no. 17, pp. 6178–6186.
15. **Musienko A.I., Manevich L.I.** Classical mechanical analogs of relativistic effects. *Physics-Uspekhi*, 2004, vol. 47, no. 8, pp. 797–820.
16. **Salimov R.K.** On nonstationary inhomogeneities of the nonlinear Klein — Gordon equation. *JETP Letters*, 2019, vol. 109, no. 7, pp. 490–493.

Accepted article received 19.10.2019
Corrections received 05.11.2019