Челябинский физико-математический журнал. 2019. Т. 4, вып. 4. С. 412–418.

УДК 514.1 DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14404

БЕСКООРДИНАТНАЯ ЗАПИСЬ ГЕЛЬМГОЛЬЦЕВЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Г. Г. Михайличенко[1,a], **А. А. Симонов**[2,b]

[1] *Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия*
[2] *Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия*
[a] *mikhailichenko@gasu.ru*, [b] *a.simonov@g.nsu.ru*

Метрики геометрий максимальной подвижности можно записать в бескоординатном виде. В работе рассмотрены некоторые гельмгольцевы плоскости, являющиеся геометриями максимальной локальной подвижности, бескоординатная запись которых была неизвестна. Найдены неявные задания функций, помогающих построить такую запись.

Ключевые слова: *двумерная геометрия, плоскости Гельмгольца, геометрия максимальной подвижности, группа преобразований, метрическая функция.*

Введение

Хорошо известно, что для евклидовой плоскости шесть расстояний $l(ij)$, $l(ik), \ldots, l(kl)$, где, например, $l(ij) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$, построенных на четырёх точках i, j, k, l, связаны уравнением

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l^2(ij) & l^2(ik) & l^2(il) \\ 1 & l^2(ij) & 0 & l^2(jk) & l^2(jl) \\ 1 & l^2(ik) & l^2(jk) & 0 & l^2(kl) \\ 1 & l^2(il) & l^2(jl) & l^2(kl) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Данное тождество является следствием равенства нулю трёхмерного объёма тетраэдра, построенного на этих четырёх точках. Этот факт объясняется и существованием трёхпараметрической группы движений плоскости Евклида, так как она приводит к увеличению числа свободных координат. Аналогичная ситуация возникает и в других плоских геометриях максимальной подвижности.

Геометрии с максимальной подвижностью впервые рассматривал Герман Гельмгольц в статье «О фактах, лежащих в основании геометрии» [1, с. 366–382], допуская в качестве условия II существование в геометриях «...подвижных, но неизменяемых (твёрдых) тел или систем точек; такое допущение необходимо для сравнения пространственных величии путём совмещения».

Другими условиями для построения геометрий были:

I. «Пространство n измерений есть n-кратно протяжённое многообразие.»

III. «Допускается вполне свободная подвижность твёрдых тел ...»

IV. «Если твёрдое тело вращается около $n-1$ точек, выбранных так, что положение тела зависит только от одной независимой переменной, то вращение без поворота назад приводит тело в конце в то начальное положение, из которого оно вышло.»

Если отказаться от последнего условия, то можно получить [2] дополнительные геометрии. Данные геометрии, несмотря на то, что они были исключены Г. Гельмгольцем аксиомой IV, были названы в его честь [3, §3]. Для *плоскости Гельмгольца* метрическая функция — аналог квадрата «расстояния» между точками i и j с координатами (x_i, y_i) и (x_j, y_j), она имеет следующий вид:

$$f(ij) = \left((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\right) \cdot \exp\left(2\gamma \cdot \operatorname{arctg}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \tag{1}$$

где $\gamma > 0$. Для *псевдогельмгольцевой плоскости*

$$f(ij) = \left((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2\right) \cdot \exp\left(2\beta \cdot \operatorname{Arc(c)th}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \tag{2}$$

где $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$, причём функция Arc(c)th зависит от значения аргумента, совпадая с Arth, если он по модулю меньше единицы, и с Arcth, если больше.

Метрическая функция *дуальногельмгольцевой плоскости*:

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 \cdot \exp\left(2\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right). \tag{3}$$

Кроме трёх геометрий Гельмгольца, к двумерным геометриям максимальной локальной подвижности относятся известные геометрии постоянной кривизны, а также симплектическая и *симплициальная плоскости* с метрическими функциями

$$f(ij) = x_i y_j - x_j y_i,$$

$$f(ij) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}. \tag{4}$$

Плоские геометрии с «расстояниями» (1)–(4) записаны в координатном представлении. Чтобы их записать в бескоординатном виде, можно использовать связь шести расстояний для четырёх точек i, j, k, l:

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl)) = 0. \tag{5}$$

В случае симплектической и симплициальной плоскостей такие связи известны. В частности, для метрической функции (4) можно записать [3, формула (5.3)]:

$$\begin{vmatrix} f(ij) - f(jk) & f(jk) - f(ik) & 0 \\ f(ij) - f(jl) & 0 & f(il) - f(jl) \\ 0 & f(ik) - f(kl) & f(il) - f(kl) \end{vmatrix} = 0.$$

Расписывая определитель, выразим расстояние $f(ij) = f_{ij}$ через остальные:

$$f_{ij} = \frac{f_{ik} f_{il}(f_{jk} - f_{jl}) + f_{il} f_{jk}(f_{jl} - f_{kl}) + f_{ik} f_{jl}(f_{kl} - f_{jk})}{f_{kl}(f_{jk} - f_{jl}) + f_{ik}(f_{jl} - f_{kl}) + f_{il}(f_{kl} - f_{jk})}. \tag{6}$$

Таким образом, для симплициальной трёхмерной геометрии с метрической функцией (4), выраженной через координаты, оказалось возможным найти её бескоординатную запись (6).

Если уравнение связи (5) известно в явном виде, то его можно локально разрешить относительно одного из «расстояний» и записать это расстояние в бескоординатной форме. Однако явный вид уравнения (5) известен для всех плоских геометрий максимальной подвижности, за исключением трёх плоскостей Гельмгольца. Для гельмгольцевых же геометрий (1)–(3) доказано, что такое уравнение существует, но до последнего времени в явном виде оно не было известно [4, §5]. Попытаемся найти уравнение связи (5) для этих плоскостей, что и будет основной целью данной работы.

1. Общие построения

Рассмотрим геометрию на двумерном многообразии M с метрической функцией в координатном представлении

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j) \tag{7}$$

для открытого и плотного в M^2 множества пар $\langle ij\rangle$. Её невырожденность определяется условиями

$$\frac{\partial(f(im), f(in))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f(mj), f(nj))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0, \tag{8}$$

выполняющимися для плотного в M^3 множества троек $\langle imn\rangle$ и $\langle mnj\rangle$.

Следуя [3], при существовании уравнения (5), отражающего связь между шестью расстояниями для открытого и плотного в M^4 множества четвёрок $\langle ijkl\rangle$ с условием $\operatorname{grad}(\Phi) \neq 0$, будем говорить, что оно выражает феноменологическую симметрию двумерной геометрии с метрической функцией (7). Групповая симметрия степени 3 для этой геометрии определяется трёхпараметрической группой движений

$$\begin{cases} x' = \lambda(x, y; \alpha, \beta, \gamma), \\ y' = \sigma(x, y; \alpha, \beta, \gamma), \end{cases} \tag{9}$$

сохраняющих метрическую функцию (7): $f(x_i, y_i, x_j, y_j) = f(x'_i, y'_i, x'_j, y'_j)$. Обе симметрии, групповая и феноменологическая, эквивалентны (см. [3, § 6, с. 37]).

Соответствующие замены координат x, y и параметров α, β, γ позволяют группу движений (9) записать в следующем виде:

$$\begin{cases} x' = \lambda(x, y; \beta, \gamma) + \alpha, \\ y' = \sigma(x, y; \beta, \gamma), \end{cases} \tag{10}$$

так, что параметр α определяет локально параллельный перенос по координате x. Метрическая функция (7) как двухточечный инвариант группы движений (10) в этом случае должна иметь более простое координатное представление:

$$f(ij) = f(x_i - x_j, y_i, y_j). \tag{11}$$

Условие невырожденности (8) для метрической функции (11) выполняется только тогда, когда в группе движений (10) в уравнение для y' существенно входят оба параметра γ и β, а в уравнение для x' — хотя бы один из них.

Выражение (11) разрешим относительно разности $x_i - x_j$: $x_i - x_j = \psi(y_i, y_j, f(ij))$. Из четвёрки $\langle ijkl\rangle$ выделим тройки $\langle ijk\rangle$, $\langle ijl\rangle$, $\langle ikl\rangle$, для которых очевидно справедливы следующие три соотношения:

$$\begin{cases} \psi(y_i, y_j, f(ij)) - \psi(y_i, y_k, f(ik)) + \psi(y_j, y_k, f(jk)) = 0, \\ \psi(y_i, y_j, f(ij)) - \psi(y_i, y_l, f(il)) + \psi(y_j, y_l, f(jl)) = 0, \\ \psi(y_i, y_k, f(ik)) - \psi(y_i, y_l, f(il)) + \psi(y_k, y_l, f(kl)) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Далее из первых двух соотношений системы (12) находим y_k, y_l и подставляем в третье. В результате получим уравнение

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl), y_i, y_j) = 0,$$

которое по переменным y_i, y_j является тождеством, что следует из преобразований группы движений (10) с учётом сделанного выше замечания. Фиксируя значения этих переменных, получим уравнение (5).

2. Дуальногельмгольцева плоскость

Название дуальногельмгольцевой плоскости с метрической функцией (3) обусловлено возможностью задать её точки дуальными числами $z = x + Jy$, для которых $J^2 = 0$ (см. [3, § 3, с. 13]). Имеет смысл упростить выражение (3), извлекая квадратный корень и переставляя координаты x и y:

$$f(ij) = (y_i - y_j)e^{\frac{x_i - x_j}{y_i - y_j}},$$

откуда следует, что

$$x_i - x_j = (y_i - y_j)\ln\frac{f(ij)}{y_i - y_j}. \tag{13}$$

Воспользовавшись сокращённой записью $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$, перепишем систему соотношений (12) с функцией ψ из (13):

$$\begin{cases} y_{ij}\ln\frac{f(ij)}{y_{ij}} - y_{ik}\ln\frac{f(ik)}{y_{ik}} + y_{jk}\ln\frac{f(jk)}{y_{jk}} = 0, \\ y_{ij}\ln\frac{f(ij)}{y_{ij}} - y_{il}\ln\frac{f(il)}{y_{il}} + y_{jl}\ln\frac{f(jl)}{y_{jl}} = 0, \\ y_{ik}\ln\frac{f(ik)}{y_{ik}} - y_{il}\ln\frac{f(il)}{y_{il}} + y_{kl}\ln\frac{f(kl)}{y_{kl}} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

С учётом того, что для любой тройки точек $i, j, k \in M$ для координат справедливо тождество $y_{ij}+y_{jk}+y_{ki} = 0$ и $y_{ij} = -y_{ji}$, введём функцию четырёх переменных $\theta = \theta(u, v, z, t)$, задаваемую неявно уравнением

$$t\ln\frac{u}{t} - \theta\ln\frac{v}{\theta} + (\theta - t)\ln\frac{z}{\theta - t} = 0, \tag{15}$$

для которой, как видно из уравнения (15), справедливо тождество

$$\theta(u, v, z, t) = t\cdot\theta\left(\frac{u}{t}, \frac{v}{t}, \frac{z}{t}, 1\right) \equiv t\cdot\theta'\left(\frac{u}{t}, \frac{v}{t}, \frac{z}{t}\right).$$

Если из первых двух уравнений системы (14) выразить

$$\begin{cases} y_{ik} = \theta(f(ij), f(ik), f(jk), y_{ij}) = y_{ij}\cdot\theta'\left(\frac{f(ij)}{y_{ij}}, \frac{f(ik)}{y_{ij}}, \frac{f(jk)}{y_{ij}}\right), \\ y_{il} = \theta(f(ij), f(il), f(jl), y_{ij}) = y_{ij}\cdot\theta'\left(\frac{f(ij)}{y_{ij}}, \frac{f(il)}{y_{ij}}, \frac{f(jl)}{y_{ij}}\right) \end{cases}$$

и подставить в третье, то получим уравнение

$$y_{ik}\ln\frac{f(ik)}{y_{ik}} - y_{il}\ln\frac{f(il)}{y_{il}} + (y_{il} - y_{ik})\ln\frac{f(kl)}{y_{il} - y_{ik}} = 0,$$

которое по переменной y_{ij} является тождественным. Фиксируя $y_{ij} \neq 0$, получим уравнение (5) для дуальногельмгольцевой плоскости. С учётом группы движений [4, выражение (6)] дуальногельмгольцевой плоскости и соответствующей группы вращений [4, выражение (6′)] мы можем выбрать $y_{ij} = 1$. Таким образом, если от функции θ перейти к θ' — функции трёх переменных, являющейся решением уравнения

$$\ln u - \theta'\ln\frac{v}{\theta'} + (\theta' - 1)\ln\frac{z}{\theta' - 1} = 0, \tag{16}$$

то уравнение (5) можно записать в виде, совпадающем с (15) при

$$t = \theta'(f(ij), f(ik), f(jk)),\ \theta = \theta'(f(ij), f(il), f(jl)),\ u = f(ik),\ v = f(il),\ z = f(kl),$$

или в виде $\theta\Big(f(ik), f(il), f(kl), \theta'\big(f(ij), f(ik), f(jk)\big)\Big) = \theta'\big(f(ij), f(il), f(jl)\big)$, или только через функцию (16):

$$\theta'\Big(\frac{f(ik)}{t}, \frac{f(il)}{t}, \frac{f(kl)}{t}\Big) = \frac{\theta'\big(f(ij), f(il), f(jl)\big)}{t}, \tag{17}$$

где по-прежнему $t = \theta'(f(ij), f(ik), f(jk))$.

3. Псевдогельмгольцева плоскость

Рассмотрим псевдогельмгольцеву плоскость с метрической функцией (2) при условии $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$, точки которой задаются двойными числами $z = x + Jy$ с $J^2 = 1$ (см. [3, § 3, с. 13]). Случай $\beta = 1$ исключается из-за нарушения условия (8) для метрической функции (2). При $\beta = 0$ псевдогельмгольцева плоскость переходит в плоскость Минковского с метрической функцией $f(ij) = (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2$.

При помощи замены переменных и масштабных преобразований от метрической функции (2) можно перейти (см. [3, с. 52–53]) к функции

$$f(ij) = \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^p}, \tag{18}$$

где $p = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$, причём $0 < p^2 < 1$.

Аналогично выводу уравнения (5) для дуальногельмгольцевой плоскости, переставляя в выражении (18) координаты x и y, придём к выражению $x_i - x_j = (y_i - y_j)^p f(ij)$, для которого запишем систему (12):

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{ij}^p f(ij) - y_{ik}^p f(ik) + (y_{ik} - y_{ij})^p f(jk) = 0, \\ y_{ij}^p f(ij) - y_{il}^p f(il) + (y_{il} - y_{ij})^p f(jl) = 0, \\ y_{ik}^p f(ik) - y_{il}^p f(il) + (y_{il} - y_{ik})^p f(kl) = 0. \end{array} \right. \tag{19}$$

Если из первых двух соотношений системы (19) выразить y_{ik}, y_{il} и подставить в третье, то получится связь всех взаимных «расстояний» для точек четвёрки $\langle ijkl \rangle$, которая по переменной y_{ij} является тождеством. С учётом группы движений [4, выражение (6)] псевдогельмгольцевой плоскости и соответствующей группы вращений мы можем выбрать $y_{ij} = 1$. В частном случае для некоторых p можно получить точные решения в радикалах. В общем же случае, как и для дуальногельмгольцевой плоскости, всё сводится к определению функции четырёх переменных $\theta = \theta(u, v, z, t)$, задаваемой неявно уравнением

$$t^p u - \theta^p v + (\theta - t)^p z = 0, \tag{20}$$

для которой, как видно из уравнения (20), справедливо тождество

$$\theta(u, v, z, t) = t \cdot \theta(ut^p, vt^p, zt^p, 1) \equiv t \cdot \theta'(ut^p, vt^p, zt^p).$$

Более того, от функции трёх переменных θ' можно перейти к функции двух переменных $\overline{\theta}$, так как из (20) следует равенство

$$\theta'(u, v, z) = \theta' \left(1, \frac{v}{u}, \frac{z}{u}\right) \equiv \overline{\theta} \left(\frac{v}{u}, \frac{z}{u}\right), \tag{21}$$

и функция $\overline{\theta}$ является решением уравнения

$$\overline{\theta}^p a - (\overline{\theta} - 1)^p b = 1. \tag{22}$$

В частном случае $p = 1/2$ уравнение легко решается:

$$\sqrt{\overline{\theta}} = \frac{a \pm b\sqrt{b^2 - a^2 + 1}}{a^2 - b^2},$$

знаки выбираются из условия $\overline{\theta} \geq 1$.

Для псевдогельмгольцевой плоскости уравнение (5) запишется так же, как и для дуальногельмгольцевой при помощи уравнения (17), но построенной при помощи функции (21), (22).

Заключение

Имеется полная классификация феноменологически симметричных двумерных геометрий (см. [2] или [3, §3]), которые являются также и двумерными геометриями максимальной локальной подвижности. Для гельмгольцевых плоскостей с метрическими функциями (2) и (3) уравнение (5) в виде (17) получено через введение специальных функций (16) и (22). В случае плоскости Гельмгольца (1) для вывода уравнения (5) предлагается воспользоваться рассмотренным общим построением.

Список литературы

1. **Гельмгольц, Г.** О фактах, лежащих в основании геометрии / Г. Гельмгольц. — В кн.: Об основаниях геометрии. — М., 1956. — С. 368–387.
2. **Михайличенко, Г. Г.** Двумерные геометрии / Г. Г. Михайличенко // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 24, № 2. — С. 346–348.
3. **Михайличенко, Г. Г.** Двумерные геометрии / Г. Г. Михайличенко. — Барнаул : Барнаул. гос. пед. ун-т, 2004. — 129 с.
4. **Кыров, В. А.** Гельмгольцевы пространства размерности два / В. А. Кыров // Сиб. мат. журн. — 2005. — Т. 46, № 6. — С. 1341–1359.

Поступила в редакцию 08.06.2019
После переработки 08.10.2019

Сведения об авторах

Михайличенко Геннадий Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики и информатики, Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия; e-mail: mikhailichenko@gasu.ru.

Симонов Андрей Артёмович, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры общей физики, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: a.simonov@g.nsu.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2019. Vol. 4, iss. 4. P. 412–418.

DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14404

COORDINATE-FREE RECORDING OF HELMHOLTZ PLANES

G.G. Mikhailichenko[1,a], **A.A. Simonov**[2,b]

[1] *Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russia*
[2] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
[a] *mikhailichenko@gasu.ru;* [b] *a.simonov@g.nsu.ru*

The metrics of most geometries of maximum mobility can be written in the coordinateless form. In this paper, we consider some Helmholtz planes, which are geometries of maximum local mobility, whose coordinateless recording was unknown. Implicitly defined functions are found to construct such a record.

Keywords: *two-dimensional geometries, geometry of maximum mobility, group of transformations, Helmholtz planes, metric function.*

References

1. **Helmholtz H.** O faktakh, lezhashchikh v osnovanii geometrii [On facts underlying geometry]. In book : *Ob osnovaniyakh geometrii* [On the grounds of the geometry]. Moscow, 1956. 529 p. (In Russ.).
2. **Mikhailichenko G.G.** Dvumernye geometrii [Two-dimensional geometries]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1981, vol. 24, no. 2, pp. 346–348. (In Russ.).
3. **Mikhailichenko G.G.** *Dvumernye geometrii* [Two-dimensional geometries]. Barnaul, Barnaul State Pedagogical University, 2004. 132 p. (In Russ.).
4. **Kyrov V.A.** Two-dimensional Helmholtz spaces. *Siberian Mathematical Journal*, 2005, vol. 46, iss. 6, pp. 1082–1096.

Accepted article received 08.06.2019
Corrections received 08.10.2019