Челябинский физико-математический журнал. 2019. Т. 4, вып. 4. С. 398–411.

УДК 517.9 DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14403

ПРИБЛИЖЁННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ АДАМАРА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Н. Б. Медведева[a], **В. А. Викторова**[b]

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
[a]*medv@csu.ru*, [b]*valeriaviktorova4@gmail.com*

В задаче о различении центра и фокуса для случая сложной монодромной особой точки при выполнении некоторых условий общности положения коэффициенты асимптотического представления преобразования монодромии выражаются через интегралы Адамара от функций, возникающих при составлении систем уравнений в вариациях, соответствующих рёбрам диаграммы Ньютона. Подынтегральные функции в этих интегралах весьма сложны, и даже численное нахождение интегралов от них практически невозможно. Предлагается способ вычисления подобного рода интегралов Адамара с помощью решения некоторых специальных систем дифференциальных уравнений. Алгоритм реализован в системе Maple. Приводится численный пример.

Ключевые слова: *интеграл Адамара, монодромная особая точка, преобразование монодромии, отображение соответствия, диаграмма Ньютона, асимптотическое представление, уравнения в вариациях.*

Введение

1. Коэффициенты асимптотического представления отображения соответствия и преобразования монодромии. При вычислении коэффициентов асимптотических представлений отображений соответствия и преобразования монодромии сложной монодромной особой точки получаются формулы, содержащие интегралы Адамара от функций, возникающих при составлении систем уравнений в вариациях, соответствующих рёбрам диаграммы Ньютона [1]. Интеграл Адамара — это один из способов регуляризации расходящегося несобственного интеграла [2]. Подынтегральные функции в упомянутых интегралах весьма сложны, и даже численное нахождение интегралов от них практически невозможно. В настоящей статье предлагается способ вычисления подобного рода интегралов Адамара с помощью решения некоторых специальных систем дифференциальных уравнений. Алгоритм реализован в системе Maple. Приводится пример для случая, когда диаграмма Ньютона векторного поля состоит из двух рёбер.

2. Интеграл Адамара. Ж. Адамар в книге [2] ввёл понятие конечной части расходящегося несобственного интеграла от функции со степенной особенностью в случаях конечного и бесконечного интервалов. Ниже мы немного обобщаем это определение для случая конечного интервала.

Определение 1. Пусть $a > 0$. Будем говорить, что непрерывная на промежутке $(0, a]$ функция $A(x)$ принадлежит классу A_μ, если в некоторой положительной полуокрестности нуля она при некоторых $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_p \leq -1 < \mu_{p+1}$ $(p \geq 1)$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 17-01-00739_а.

представляется в виде $A(x) = a_1 x^{\mu_1} + \dots + a_p x^{\mu_p} + \Psi(x)$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, p$, $\Psi(x) = O(x^{\mu_{p+1}})$ при $x \to 0$.

Понятно, что если хотя бы один из коэффициентов a_i отличен от нуля, то интеграл

$$\int\limits_0^a A(x)\,dx \tag{1}$$

расходится.

Определение 2. *Конечной частью интеграла* (1) (в смысле Адамара) или просто интегралом Адамара от функции $A(x)$ класса A_μ называется

$$\left|\overline{\int_0^a A(x)\,dx} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_\varepsilon^a A(x)\,dx + \varepsilon B(\varepsilon) + B_1(\varepsilon)\ln\varepsilon\right),\right. \tag{2}$$

если функции $B(\varepsilon)$ и $B_1(\varepsilon)$ удовлетворяют условиям:
а) рассматриваемый предел существует;
б) функция $B(\varepsilon)$ принадлежит классу A_μ;
в) $B_1(\varepsilon) = b_1^0 + O(\varepsilon^\beta)$ при $\varepsilon \to 0$, $\beta > 0$, $b_1^0 \in \mathbb{R}$;
г) разложение $\varepsilon B(\varepsilon)$ не содержит нулевой степени ε.

Пусть $F_-(x)$ — первообразная функции $A_-(x) = a_1 x^{\mu_1} + \dots + a_p x^{\mu_p}$:

$$F_-(x) = \frac{a_1 x^{\mu_1+1}}{\mu_1+1} + \dots + \frac{a_{p-1} x^{\mu_{p-1}+1}}{\mu_{p-1}+1} + a_p g(x),$$

где

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^{\mu_p+1}}{\mu_p+1}, & \mu_p < -1, \\ \ln x, & \mu_p = -1. \end{cases}$$

Предложение 1. *Если функция $A(x)$ принадлежит классу A_μ, то значение предела* (2) *не зависит от выбора функций $B(\varepsilon)$ и $B_1(\varepsilon)$, удовлетворяющих условиям* а)–г) *и равно*

$$\left|\overline{\int_0^a A(x)\,dx} = F_-(a) + \int_0^a (A(x) - A_-(x))\,dx.\right. \tag{3}$$

Доказательство. Исходя из условия б) $B(\varepsilon) = \sum\limits_{k=1}^{p} b_k \varepsilon^{\mu_k} + \bar\Psi(\varepsilon)$, где $\bar\Psi(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\mu_{p+1}})$. Тогда с учётом условия в)

$$\int_\varepsilon^a A(x)\,dx + \varepsilon B(\varepsilon) + B_1(\varepsilon)\ln\varepsilon = F_-(a) + \int_\varepsilon^a \Psi(x)\,dx + \sum_{k=0}^{p-1}\left(b_k - \frac{a_k}{\mu_k+1}\right)\varepsilon^{\mu_k+1} +$$

$$+ a_p g(\varepsilon) + b_p \varepsilon^{\mu_p+1} + \left(b_1^0 + O(\varepsilon^\beta)\right)\ln\varepsilon + \varepsilon\bar\Psi(\varepsilon). \tag{4}$$

Если предел (2) существует, то $b_k = \frac{a_k}{\mu_k+1}$ при $1 \le k \le p-1$. Если $\mu_p < -1$, то $b_p = \frac{a_p}{\mu_p+1}$, $b_1^0 = 0$. Если $\mu_p = -1$, то $b_p = 0$ из условия г), $b_1^0 = -a_p$. При выполнении этих условий предел выражения (4) равен правой части (3) и не зависит от произвола в выборе функций $B(\varepsilon)$ и $B_1(\varepsilon)$. □

Замечание. Для практических вычислений в пакете Maple с целью избежания появления несобственных интегралов в формуле для интеграла Адамара (3) в сумму $A_-(x)$ можно включить все отрицательные степени разложения функции $A(x)$, а не только те, которые меньше минус единицы, при этом формула для интеграла Адамара останется верной.

1. Диаграмма Ньютона

Приведём ряд определений, связанных с диаграммой Ньютона, которые понадобятся нам в дальнейшем [3–5].

Рассмотрим аналитическое векторное поле V в окрестности изолированной особой точки (0,0) на вещественной плоскости. Оно определяет динамическую систему

$$\dot{x} = X(x,y), \quad \dot{y} = Y(x,y), \tag{5}$$

где $X(0,0) = 0,\ Y(0,0) = 0$.

Рассмотрим разложения Тейлора

$$yX(x,y) = \sum_{\substack{i\geq 0, j\geq 1\\ i+j\geq 2}} a_{ij}x^i y^j, \quad xY(x,y) = \sum_{\substack{i\geq 1, j\geq 0\\ i+j\geq 2}} b_{ij}x^i y^j. \tag{6}$$

Определения. 1. *Носителем* системы (5), а также векторного поля V называется множество таких пар (i,j), что $(a_{ij}, b_{ij}) \neq (0,0)$. Вектор (a_{ij}, b_{ij}) называется *векторным коэффициентом* точки (i,j).

2. Рассмотрим множество

$$\bigcup_{(i,j)} \{(i,j) + \mathbb{R}^2_+\},$$

где $\mathbb{R}^2_+$ — положительный квадрант, объединение берётся по всем точкам (i,j), принадлежащим носителю. Граница выпуклой оболочки этого множества состоит из двух открытых лучей и ломаной, которая может состоять и из одной точки. Эта ломаная называется *диаграммой Ньютона* векторного поля V, а также системы (5). Звенья ломаной называются *рёбрами* диаграммы Ньютона, а их концы — её *вершинами.*

3. Если вершина диаграммы Ньютона не лежит ни на одной координатной оси, то она называется *внутренней*, в противном случае — *граничной.*

4. *Показателем* ребра диаграммы Ньютона называется положительное рациональное число, равное тангенсу угла между ребром и осью ординат.

5. Пусть ℓ и $\tilde{\ell}$ — два примыкающих к внутренней вершине c сверху и снизу ребра с показателями $\alpha = m/n$ и $\tilde{\alpha} = \tilde{m}/\tilde{n}$ ($\alpha < \tilde{\alpha}$, дроби несократимые), (a,b) — векторный коэффициент вершины c. Вершина c называется *невырожденной*, если $nb \neq ma$, $\tilde{n}b \neq \tilde{m}a$.

6. Рассмотрим ребро ℓ диаграммы Ньютона системы (5) с показателем $\alpha = m/n$, где m/n — несократимая дробь. Члены разложения (6) сгруппируем таким образом, что

$$yX(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x,y), \quad xY(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(x,y),$$

где

$$X_k(x,y) = \sum_{ni+mj=k+k_0} a_{ij}x^i y^j, \quad Y_k(x,y) = \sum_{ni+mj=k+k_0} b_{ij}x^i y^j$$

есть квазиоднородные полиномы степени $k+k_0$ с весами n и m переменных x и y соответственно, $k_0>0$. Обозначим $F_k(x,y)=nY_k(x,y)-mX_k(x,y)$, $k\geq 0$.

7. Для любого ненулевого квазиоднородного полинома $R(x,y)$ с весами n и m переменных x и y справедливо разложение (см., например, [6])

$$R(x,y)=Ax^{s_1}y^{s_2}\prod_i\bigl(y^n-b_ix^m\bigr)^{k_i},$$

где b_i — различные ненулевые комплексные числа, $k_i\geq 0$, $s_1\geq 0, s_1\geq 0$ — целые числа, $A\neq 0$. Многочлен вида $y^n-b_ix^m$ (при $k_i>0$) будем называть *простым делителем* многочлена $R(x,y)$, k_i — его кратностью. Простой делитель называется *вещественным*, если $b_i\in\mathbb{R}$.

Ребро ℓ диаграммы Ньютона называется *невырожденным*, если многочлен $F_0(x,y)=nY_0(x,y)-mX_0(x,y)$ не имеет вещественных простых делителей.

2. Система уравнений в вариациях

Определение монодромной особой точки и преобразования монодромии дано, например, в [7]. Топологический тип монодромной особой точки аналитического векторного поля на плоскости может быть ровно одним из следующих: устойчивый фокус, неустойчивый фокус и центр.

Рассмотрим вещественно-аналитическое векторное поле V с монодромной особой точкой $(0,0)$ и диаграммой Ньютона Γ, состоящей, по крайней мере, из двух рёбер.

Пусть c — внутренняя вершина диаграммы Ньютона и пусть к ней примыкают два ребра ℓ и $\tilde{\ell}$ с показателями α и $\tilde{\alpha}$, где $\tilde{\alpha}>\alpha$, $\alpha=m/n$, $\tilde{\alpha}=\tilde{m}/\tilde{n}$ — несократимые дроби. Рассмотрим замену переменных

$$x=z^n,\quad y=z^mw, \tag{7}$$

соответствующую ребру ℓ.

В результате замены (7) в системе (5) получается уравнение

$$\frac{dz}{dw}=\sum_{i=0}^{\infty}\Phi_i(w)z^{i+1}, \tag{8}$$

где

$$\Phi_0(w)=\frac{X_0(1,w)}{wF_0(1,w)},\quad \Phi_1(w)\;=\;\frac{F_0(1,w)X_1(1,w)-F_1(1,w)X_0(1,w)}{wF_0(1,w)^2},$$

$\Phi_2(w)\;=\;\frac{F_0^2(1,w)X_2(1,w)-F_0(1,w)(1,w)F_1(1,w)X_1(1,w)-F_0(1,w)F_2(1,w)X_0(1,w)+F_1^2(1,w)X_0(1,w)}{wF_0^3(1,w)}$, $\Phi_k(w)\;=\;\frac{Q_k(w)}{wF_0(1,w)^{k+1}}$, $Q_k(w)$ — однородный многочлен степени $k+1$ от $X_0(1,w)$, $\ldots$, $X_k(1,w)$, $Y_0(1,w)$, $\ldots$, $Y_k(1,w)$ с целыми коэффициентами. Явный вид функций $\Phi_i(w)$ легко найти на компьютере.

Пусть $\sigma>0$. Предположим, что на промежутке $(0,\sigma]$ нет нулей многочлена $F_0(1,w)$. Рассмотрим решение $z=\varphi(w,\rho)$ уравнения (8), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(\sigma,\rho)=\rho$. Будем искать его в виде ряда по степеням ρ:

$$z=C_0(w)\rho\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}C_k(w)\rho^k\right). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8) и приравнивая в левой и правой части коэффициенты при одинаковых степенях ρ, получим следующую систему уравнений относительно $C_k(w)$:

$$\begin{array}{l} C_0'(w) = C_0(w)\Phi_0(w), \\ C_1'(w) = C_0(w)\Phi_1(w), \\ C_2'(w) = C_0(w)(C_0(w)\Phi_2(w) + 2C_1(w)\Phi_1(w)), \\ \dots \\ C_k'(w) = R_k(w), \\ \dots, \end{array} \tag{10}$$

где $R_k(w)$ — многочлен степени $k+1$ с целыми коэффициентами относительно $C_0(w), \dots, C_{k-1}(w), \Phi_1(w), \dots, \Phi_k(w)$. Систему (10) с начальными условиями $C_0(\sigma) = 1$, $C_k(\sigma) = 0$ при $k \geq 1$ будем называть *системой уравнений в вариациях, соответствующей ребру ℓ, с начальным условием в точке σ.*

В вычислении коэффициентов асимптотического представления преобразования монодромии участвуют величины вида

$$p_0 = \exp \left| \overline{\int_\sigma^0 \Phi_0(\xi) d\xi} \right., \tag{11}$$

$$p_k = \left| \overline{\int_\sigma^0 R_k(\xi) d\xi} \right., \quad k \geq 1.$$

В данной статье доказано, что при определённых условиях эти интегралы Адамара существуют, а также предлагается компьютерный алгоритм для их приближённого вычисления.

3. Вычисление интегралов Адамара

Пусть $\sigma > 0$. Предположим, что на промежутке $(0, \sigma]$ нет нулей многочлена $F_0(1, w)$. В силу монодромности особой точки этот многочлен не тождественно равен нулю [8].

Пусть c — внутренняя вершина диаграммы Ньютона Γ и пусть к ней примыкают два ребра ℓ и $\tilde{\ell}$ с показателями α и $\tilde{\alpha}$, где $\tilde{\alpha} > \alpha$, $\alpha = m/n$, $\tilde{\alpha} = \tilde{m}/\tilde{n}$ — несократимые дроби. Предположим, что вершина c невырожденная, т. е. $\tilde{n}b - \tilde{m}a \neq 0, nb - ma \neq 0$, где (a, b) — векторный коэффициент вершины c. Обозначим

$$\lambda = \frac{\tilde{n}b - \tilde{m}a}{nb - ma}, \quad \gamma = \frac{a}{nb - ma}.$$

В силу критерия монодромности [8] выполняется неравенство $\lambda > 0$. Имеет место соотношение

$$\gamma(\tilde{m}n - \tilde{n}m) = -\lambda n + \tilde{n}. \tag{12}$$

Определение 3. Будем говорить, что непрерывная на промежутке $(0, a]$ функция $f(x)$ принадлежит классу A_∞, если на некотором интервале $(0, \delta)$, $0 < \delta \leq a$, она задаётся сходящимся рядом $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x^{\mu_k}$, $\mu_k \nearrow +\infty$, причём ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, лежащем в интервале $(0, \delta)$.

Функция $\Phi_0(\xi) = \frac{X_0(1,\xi)}{\xi F_0(1,\xi)}$ представляется в виде $\Phi_0(\xi) = \frac{\gamma}{\xi} + \Psi(\xi)$, где $\Psi(\xi)$ — рациональная функция, не имеющая полюсов на отрезке $[0, \sigma]$.

Лемма 1. *Если* $F(\xi)$ *— первообразная функция* $\Psi(\xi)$, *удовлетворяющая условию* $F(0) = 0$, *то*

$$C_0(\xi) = p_0 \xi^\gamma \exp F(\xi), \tag{13}$$

причём величина p_0, *задаваемая формулой* (11), *выражается следующим образом:*

$$p_0 = \sigma^{-\gamma} \exp \int\limits_\sigma^0 \Psi(\xi) d\xi. \tag{14}$$

Доказательство. Решая систему (10), получаем

$$C_0(w) = \exp \int_\sigma^w \Phi_0(\xi) d\xi, \quad C_k(w) = \int_\sigma^w R_k(\xi) d\xi, \ k \geq 1.$$

Отсюда

$$\ln C_0(\xi) = \int\limits_\sigma^\xi \Phi_0(t) dt = \int\limits_\sigma^{\xi_0} \Phi_0(t) dt + \int\limits_{\xi_0}^\xi \Phi_0(t) dt,$$

где $\xi_0 > 0$ — любая точка из окрестности нуля, в которой $\Psi(\xi)$ задаётся сходящимся степенным рядом. Далее

$$\int\limits_{\xi_0}^\xi \Phi_0(t) dt = \gamma \ln \xi - \gamma \ln \xi_0 + F(\xi) - F(\xi_0),$$

$$\ln C_0(\xi) = \left[\int\limits_\sigma^{\xi_0} \Phi_0(t) dt - \gamma \ln \xi_0 - F(\xi_0) \right] + \gamma \ln \xi + F(\xi).$$

Поскольку $C_0(\xi)$ не зависит от ξ_0, перейдём к пределу при $\xi_0 \to +0$, получим в соответствии с определением 2, что интеграл Адамара (11) существует и что

$$\ln C_0(\xi) = \left| \overline{\int\limits_\sigma^0 \Phi_0(t) dt} \right. + \gamma \ln \xi + F(\xi) = \ln p_0 + \gamma \ln \xi + F(\xi).$$

Формула (14) следует из формулы (3) для интеграла Адамара:

$$p_0 = \exp \left| \overline{\int\limits_\sigma^0 \Phi_0(t) dt} \right. = \exp \left(-\gamma \ln \sigma + \int\limits_\sigma^0 \Psi(\xi) d\xi \right) = \sigma^{-\gamma} \exp \int\limits_\sigma^0 \Psi(\xi) d\xi.$$

Лемма 1 доказана. □

Функция $R_k(\xi)$ имеет вид

$$\begin{aligned} &R_1 = C_0 \Phi_1, \ R_2 = C_0^2 \Phi_2 - 2 C_0 C_1 \Phi_1, \\ &R_3 = C_0^3 \Phi_3 + 3\, C_0^2 C_1 \Phi_2 + C_0 C_1^2 \Phi_1 + 2\, C_0 C_2 \Phi_1, \\ &\ldots, \\ &R_k = \sum_{i=1}^k \mathcal{P}_i(C_1, \ldots, C_{k-1}) C_0^i \Phi_i \ \ (k \geq 1), \end{aligned} \tag{15}$$

где $\mathcal{P}_i$ является квазиоднородным многочленом с целыми коэффициентами степени $k-i$ от $C_1,\ldots,C_{k-1}$ с весами переменных $(1,2,\ldots,k-1)$.

Обозначим при $k\geq 1$

$$\tilde{C}_0 = p_0^{-1}C_0, \quad \tilde{C}_i = p_0^{-i}C_i, \quad 1\leq i\leq k, \quad \tilde{R}_k = p_0^{-k}R_k.$$

Тогда в силу квазиоднородности $\mathcal{P}_i$

$$\tilde{R}_k = \sum_{i=1}^{k}\mathcal{P}_i(\tilde{C}_1,\ldots,\tilde{C}_{k-1})\tilde{C}^i\Phi_i, \tag{16}$$

$$\tilde{C}_k' = \tilde{R}_k, \qquad \tilde{C}_k(\xi) = \int\limits_{\sigma}^{\xi}\tilde{R}_k(t)dt. \tag{17}$$

Положим также

$$\tilde{p}_k = \sqrt{\int\limits_{\sigma}^{0}\tilde{R}_k(\xi)d\xi}\,.$$

Тогда $p_k = p_0^k\tilde{p}_k$.

Пусть K — любое натуральное число, и пусть $k\leq K$. Потребуем, чтобы функция $\tilde{C}_k$ для каждого k принадлежала классу A_∞. Из формул (15), (17) и соотношения (12) вытекает, что это условие выполняется, если λ избегает некоторого множества рациональных чисел Λ_K, мощность которого зависит от K и которое не имеет конечных точек сгущения. Принадлежность λ данному множеству можно легко проверить на компьютере.

Лемма 2. *Пусть K — натуральное число. Если $\lambda\notin\Lambda_K$, то при $k\leq K$ $\tilde{C}_k(\xi) = \tilde{p}_k + F_k(\xi)$, где $F_k\in A_\infty$ — первообразная $\tilde{R}_k$, не содержащая нулевой степени в разложении.*

Доказательство. Представим $F_k = F_k^- + F_k^+$, где F_k^- — сумма отрицательных степеней разложения F_k , $F_k^+ = F_k - F_k^-$, $A_k^- = (F_k^-)'$.

Пусть $\xi_0 > 0$ — любая точка из окрестности нуля, в которой $\tilde{R}_k(\xi)$ задаётся сходящимся рядом. В этой окрестности

$$\tilde{R}_k(\xi) = \sum_{\mu_k<0,\,\mu_k\neq -1}a_k\xi^{\mu_k} + \sum_{\mu_k\geq 0}a_k\xi^{\mu_k}.$$

Тогда

$$A_k^-(\xi) = \sum_{\mu_k<0,\,\mu_k\neq -1}a_k\xi^{\mu_k}, \qquad F_k^-(\xi) = \sum_{\mu_k<0,\,\mu_k\neq -1}\frac{a_k}{\mu_k+1}\xi^{\mu_k+1},$$

$$C_k(\xi) = \int\limits_{\sigma}^{\xi_0}\tilde{R}_k(t)dt + \int\limits_{\xi_0}^{\xi}\tilde{R}_k(t)dt = \int\limits_{\sigma}^{\xi_0}\tilde{R}_k(t)dt + F_k(\xi) - F_k(\xi_0) =$$

$$= -F_k^-(\xi_0) - F_k^+(\xi_0) + \int\limits_{\sigma}^{\xi_0}\big(\tilde{R}_k(t) - A_k^-(t)\big)dt + \int\limits_{\sigma}^{\xi_0}A_k^-(t)dt + F_k(\xi) =$$

$$-F_k^-(\sigma) + \int\limits_{\sigma}^{\xi_0}\big(\tilde{R}_k(t) - A_k^-(t)\big)dt - F_k^+(\xi_0) + F_k(\xi) =$$

$$= -F_k^-(\sigma) + \int\limits_{\sigma}^{0} \big(\tilde{R}_k(t) - A_k^-(t)\big)dt + F_k(\xi) = \tilde{p}_k + F_k(\xi),$$

так как по формуле (3) с учётом замечания 1

$$\tilde{p}_k = \left|\overline{\int\limits_{\sigma}^{0} \tilde{R}_k(\xi)d\xi} = -F_k^-(\sigma) + \int\limits_{\sigma}^{0} \big(\tilde{R}_k(\xi) - A_k^-(\xi)\big)d\xi. \right. \tag{18}$$

□

Из формулы (14) следует, что p_0 можно найти из решения задачи Коши $\bar{C}_0' = \bar{C}_0\Psi$, $\bar{C}_0(\sigma) = \sigma^{-\gamma}$ по формуле

$$p_0 = \bar{C}_0(0). \tag{19}$$

Из формулы (18) получаем, что $\tilde{p}_k$ можно найти из решения задачи Коши

$$\begin{array}{ll} \tilde{C}_0' = \tilde{C}_0\Phi_0, & \tilde{C}_0(\sigma) = p_0^{-1}, \\ \tilde{C}_1' = \tilde{C}_0\Phi_1, & \tilde{C}_1(\sigma) = 0, \\ \ldots, & \\ \tilde{C}_{k-1}' = \tilde{R}_{k-1}, & \tilde{C}_{k-1}(\sigma) = 0, \\ \bar{C}_k' = \tilde{R}_k - A_k^-, & \bar{C}_k(\sigma) = -F_k^-(\sigma), \end{array} \tag{20}$$

по формуле $\tilde{p}_k = \bar{C}_k(0)$. Функции $\tilde{C}_i$, Φ_i, $\tilde{R}_i$, вообще говоря, не ограничены в окрестности нуля, поэтому в последнем уравнении в правой части стоит разность неограниченных функций, что приводит к трудностям в численном решении системы (20) вблизи нуля.

Поэтому преобразуем систему уравнений (20), вводя новые неизвестные функции. По формуле (13) $C_0(\xi) = p_0\xi^\gamma \exp F(\xi)$, где $F(\xi)$ — первообразная функция $\Psi(\xi)$, удовлетворяющая условию $F(0) = 0$. Положим $H_0(\xi) = \exp F(\xi)$. Тогда $H_0' = H_0\Psi$, $H_0(\sigma) = \sigma^{-\gamma}p_0^{-1}$, где p_0 ищется по формуле (19). Функция $H_0(\xi)$ является ограниченной в нуле.

Возьмём любое натуральное K. Для каждого $1 \le k \le K$ положим $H_k = \tilde{C}_k - F_k^-$. Тогда $H_k' = \tilde{R}_k - A_k^-$, $H_k(\sigma) = -F_k^-(\sigma)$. Подставим в $\tilde{R}_k$ $\tilde{C}_0 = \xi^\gamma H_0$, $\tilde{C}_i = H_i + F_i^-$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Результат обозначим $\bar{R}_k = \bar{R}_k(H_0, H_1, \ldots, H_{k-1}, \xi)$.

Тогда величину $\tilde{p}_k$ при $k \le K$ можем найти из решения следующей задачи Коши

$$\begin{array}{l} H_0' = H_0\Psi, \quad H_0(\sigma) = \sigma^{-\gamma}p_0^{-1}, \\ \ldots, \\ H_i' = \bar{R}_i - A_i^-, \quad H_i'(\sigma) = -F_i^-(\sigma), \\ \ldots, \\ H_k' = \bar{R}_k - A_k^-, \quad H_k'(\sigma) = -F_k^-(\sigma), \end{array}$$

по формуле $\tilde{p}_k = H_k(0)$.

Пусть $\Phi_k(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi^{N_k}}\right)$ при $\xi \to 0$, $1 \le k \le K$. Положим $N = \max\left\{\max\limits_{1\le k\le K} N_k, 0\right\}$. Тогда $\Phi_k(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi^N}\right)$ при $\xi \to 0$.

Лемма 3. *В условиях леммы 2 для любого $1 \le k \le K$*

а) *если $\gamma - N \ge 0$, то $\tilde{R}_k(\xi) = O(\xi^{\gamma-N})$, $\tilde{C}_k(\xi) = O(1)$ при $\xi \to 0$;*

б) *если $\gamma - N < 0$, то $\tilde{R}_k(\xi) = O(\xi^{(\gamma-N)k})$, $\tilde{C}_k(\xi) = O(\xi^{(\gamma-N)k})$ при $\xi \to 0$.*

Доказательство. В силу формулы (13) $\tilde{C}_0(\xi) = O(\xi^\gamma)$, отсюда $\tilde{R}_1(\xi) = \tilde{C}_0(\xi)\Phi_1(\xi) = O(\xi^{\gamma-N})$. Очевидно, что $\tilde{R}_1 \in A_\infty$.

По лемме 2 $\tilde{C}_1 = \tilde{p}_1 + F_1 \in A_\infty$, где F_1 — первообразная $\tilde{R}_1$, разложение которой не содержит нулевой степени ξ. Если $\tilde{R}_1(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \xi^{\mu_k}$, то $F_1(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu_k+1}\xi^{\mu_k+1} \in A_\infty$, а значит, разложение $\tilde{R}_1(\xi)$ не содержит (-1)-й степени. Отсюда

$$\tilde{C}_1(\xi) = \begin{cases} O(1) \ \text{при} \ \gamma - N \geq 0, \\ O(\xi^{\gamma-N}) \ \text{при} \ \gamma - N < 0. \end{cases}$$

Далее рассмотрим два случая.

1. Пусть $\gamma - N \geq 0$. Предположим, что $\tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_{k-1}$ являются $O(1)$ при $\xi \to 0$. Тогда для любого $1 \leq i \leq k$ $\tilde{C}_0^i \Phi_i \mathcal{R}_i(\tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_{k-1}) = O(\xi^{\gamma i - N}) = O(\xi^{\gamma - N})$.

Отсюда и из формулы (16) $\tilde{R}_k = O(\xi^{\gamma-N})$, $\tilde{R}_k \in A_\infty$. В силу леммы 2 получаем $\tilde{C}_k = \tilde{p}_k + F_k$, где $F_k \in A_\infty$. Поэтому $\tilde{R}_k(\xi)$ не содержит (-1)-й степени в разложении, $\tilde{C}_k = O(1)$ при $\xi \to 0$.

2. Рассмотрим случай $\gamma - N < 0$. Предположим, что при $1 \leq i < k$ $\tilde{C}_i = O(\xi^{(\gamma-N)i})$. Тогда при $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (k-1)\alpha_{k-1} = k - i$ имеем $\tilde{C}_1^{\alpha_1} \ldots \tilde{C}_{k-1}^{\alpha_{k-1}} = O(\xi^{(\gamma-N)(k-i)})$. Отсюда с учётом $\tilde{C}_0^i \Phi_i = O(\xi^{\gamma i - N})$ получаем, что $\tilde{C}_0^i \Phi_i \mathcal{R}_i(\tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_{k-1}) = O(\xi^{Ni + (\gamma-N)k}) = O(\xi^{(\gamma-N)k})$. Отсюда $\tilde{R}_k = O(\xi^{(\gamma-N)k})$. Завершая доказательство как в предыдущем пункте, получаем $\tilde{C}_k(\xi) = O(\xi^{(\gamma-N)k})$.

Лемма доказана. □

Следствие 1. *При $\gamma - N \geq 0$ имеем $A_k^- = 0$, $F_k^- = 0$. При $\gamma - N < 0$ имеем $A_k^- = O(\xi^{(\gamma-N)k})$, $F_k^- = O(\xi^{(\gamma-N)k})$.*

Из всех доказанных утверждений вытекает следующий алгоритм вычисления p_k.

4. Алгоритм вычисления p_k

Зададим натуральное число K и найдём все p_k при $1 \leq k \leq K$. Значение p_0 предполагается вычисленным по формуле (19).

Рассмотрим два случая.

Случай I: $\gamma - N \geq 0$. В этом случае $A_k^- = 0$, $F_k^- = 0$. В этом случае для $1 \leq k \leq K$

$$\bar{R}_k = \bar{R}_k(H_0,\ H_1, \ldots, H_{k-1},\ \xi) = \sum_{i=1}^{k} \xi^{\gamma i - N} \big(\xi^N \Phi_i\big) H_0^i \mathcal{R}_i(H_1, \ldots, H_{k-1}).$$

Значения $\tilde{p}_k$ при $1 \leq k \leq K$ могут быть найдены из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &H_0' = H_0 \Psi, \quad H_0(\sigma) = \sigma^{-\gamma} p_0^{-1}, \\ &H_k' = \bar{R}_k, \quad H_k(\sigma) = 0, \ \ k = 1, \ldots, K, \end{aligned}$$

по формуле $\tilde{p}_k = H_k(0)$, $k = 1, \ldots, K$, $p_k = \tilde{p}_k p_0^k$.

Случай II: $\gamma - N < 0$.

В этом случае необходимо а) на каждом шаге искать A_k^- и F_k^-, б) преобразовать правую часть таким образом, чтобы избежать вычитания бесконечно больших функций.

База индукции: вычисление $\tilde{p}_1$.

1. Ищем разложение $F(\xi)$ — первообразной $\Psi(\xi)$, удовлетворяющей условию $F(0)=0$, до степени, меньшей $K(N-\gamma)$.

2. Ищем разложение $\tilde{R}_1(\xi)$. Для этого представим $\tilde{R}_1(\xi) = \tilde{C}_0(\xi)\Phi_1(\xi) = \xi^\gamma \exp F(\xi)\Phi_1(\xi) = \xi^{\gamma-N}Q_1(\xi)$, где $Q_1(\xi) = H_0(\xi)(\xi^N\Phi_1(\xi))$, и разложим $Q_1(\xi)$ до степеней, меньших $K(N-\gamma)$, то есть

$$Q_1(\xi) \approx \sum_{0\le j<K(N-\gamma)} a_j\xi^j.$$

3. Ищем разложение первообразной $F_1(\xi)$ функции $\tilde{R}_1(\xi)$:
$F_1(\xi) = \xi^{\gamma-N}G_1(\xi)$, где $G_1(\xi) \approx \sum\limits_{0\le j<K(N-\gamma)} \frac{a_j\xi^{j+1}}{\gamma-N+j+1}$.

4. Найдём $A_1^-(\xi) = \xi^{\gamma-N}B_1(\xi)$, где $B_1(\xi) = \sum\limits_{0\le j<N-\gamma} a_j\xi^j$.

5. Найдём F_1^- — первообразную A_1^-: $F_1^- = \xi^{\gamma-N}G_1^-(\xi)$,

$$G_1^-(\xi) = \sum_{0\le j<N-\gamma} \frac{a_j\xi^{j+1}}{\gamma-N+j+1}.$$

6. Составляем систему дифференциальных уравнений, для этого обозначим $Q_1(H_0,\ \xi) = H_0\big(\xi^N\Phi_1(\xi)\big)$.

$$\begin{array}{l} H_0' = H_0\Psi(\xi), \quad H_0(\sigma) = \frac{\sigma^{-\gamma}}{p_0}, \\ H_1' = \frac{Q_1(H_0,\,\xi)-B_1(\xi)}{\xi^{N-\gamma}}, \quad H_1(\sigma) = -F_1^-(\sigma). \end{array} \tag{21}$$

7. Находим $\tilde{p}_1 = H_1(0)$ и $p_1 = \tilde{p}_1 p_0$.

Замечание. Поскольку система уравнений (21) не решается до точки $\xi=0$, то $\tilde{p}_1 \approx H_1(\varepsilon)$, где ε — малое число. Погрешность такой замены $\Delta \approx H_1'(\varepsilon)\varepsilon$.

Шаг индукции: вычисление p_k.

Предположим, что найдены $\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_{k-1}, A_1^-,\dots,A_{k-1}^-$, а также представление $\tilde{R}_i = \xi^{(\gamma-N)i}Q_i(\xi)$ при $i<k$, причём разложения $Q_i(\xi)$ найдены до степеней, меньших $K(N-\gamma)$. Тем самым при $1\le i<k$ можно найти разложения первообразных $F_i(\xi)$ функций $\tilde{R}_i(\xi)$ в виде $F_i(\xi) = \xi^{(\gamma-N)i}G_i(\xi)$, где разложение G_i найдено до степеней, меньших $K(N-\gamma)$.

1. Найдём разложение $\tilde{R}_k(\xi)$. Для этого подставим в формулу (16)

$$\tilde{C}_0 = \xi^\gamma \exp F(\xi), \quad \tilde{C}_j = \xi^{(\gamma-N)j}\big(G_j(\xi) + \tilde{p}_j\xi^{(N-\gamma)j}\big).$$

Тогда при $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (k-1)\alpha_{k-1} = k-i$ $\quad \tilde{C}_0^i\Phi_i\tilde{C}_{k-1}^{\alpha_{k-1}} =$

$$\xi^{(\gamma-N)k}\big(\xi^{Ni}\Phi_i\big)(\exp F(\xi))^i\big(G_1(\xi)+\tilde{p}_1\xi^{(N-\gamma)}\big)^{\alpha_1}\cdots\big(G_{k-1}(\xi)+\tilde{p}_{k-1}\xi^{(N-\gamma)(k-1)}\big)^{\alpha_{k-1}}.$$

Подставляя сюда разложения $\xi^{Ni}\Phi_i$, $\exp F(\xi)$, $G_i(\xi)$ до степеней, меньших $(N-\gamma)K$, получим представление $\tilde{R}_k(\xi)$ в виде $\tilde{R}_k(\xi) = \xi^{(\gamma-N)k}Q_k(\xi)$, где $Q_k(\xi) \approx \sum\limits_{0\le\mu_k<K(N-\gamma)} a_k\xi^{\mu_k}$.

2. Найдём разложение первообразной $F_k(\xi)$ для $\tilde{R}_k(\xi)$: $F_k(\xi) = \xi^{(\gamma-N)k}G_k(\xi)$, где

$$G_k(\xi) \approx \sum_{0\le\mu_k<K(N-\gamma)} \frac{a_k}{(\gamma-N)k+\mu_k+1}\xi^{\mu_k+1}.$$

3. Найдём $A_k^- = \xi^{(\gamma-N)k} B_k(\xi)$, где

$$B_k(\xi) = \sum_{0 \le \mu_k < k(N-\gamma)} a_k \xi^{\mu_k}.$$

4. Найдём $F_k^- = \xi^{(\gamma-N)k} G_k^-(\xi)$, где

$$G_k^-(\xi) = \sum_{0 \le \mu_k < k(N-\gamma)} \frac{c_k}{(\gamma-N)k + \mu_k + 1} \xi^{\mu_k+1}.$$

5. Составляем систему уравнений для определения $\tilde{p}_k$. Для этого определим функции

$$Q_k(H_0, \ldots, H_{k-1}, \xi) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} H_0^i \big(\xi^{Ni} \Phi_i(\xi)\big) \mathcal{P}_i\big(\xi^{N-\gamma} H_1 + G_1^-(\xi), \ldots, \xi^{(N-\gamma)(k-1)} H_{k-1} + G_{k-1}^-(\xi)\big).$$

Тогда

$$\tilde{R}_k(\xi) - A_k^-(\xi) = \frac{Q_k(H_0(\xi), H_1(\xi), \ldots, H_{k-1}(\xi), \xi) - B_k(\xi)}{\xi^{(N-\gamma)k}}.$$

Система дифференциальных уравнений для определения $\tilde{p}_k$ имеет вид

$$\begin{array}{ll}
H_0' = H_0 \Psi, & H_0(\sigma) = \sigma^{-\gamma} p_0^{-1}, \\
H_1' = \frac{Q_1(H_0,\, \xi) - B_1(\xi)}{\xi^{N-\gamma}}, & H_1(\sigma) = -F_1^-(\sigma), \\
\ldots & \\
H_i' = \frac{Q_i(H_0, H_1, \ldots, H_{i-1}, \xi) - B_i(\xi)}{\xi^{(N-\gamma)i}}, & H_i(\sigma) = -F_i^-(\sigma), \\
\ldots & \\
H_k' = \frac{Q_k(H_0, H_1, \ldots, H_{k-1}, \xi) - B_k(\xi)}{\xi^{(N-\gamma)k}}, & H_k(\sigma) = -F_k^-(\sigma).
\end{array}$$

Из этой системы находим $\tilde{p}_k = H_k(0)$.

Замечание. $H_k(0) \approx H_k(\varepsilon)$ при малом ε, при этом погрешность $\Delta \approx H_k'(\varepsilon)\varepsilon$.

Алгоритм реализован в пакете MAPLE, ниже приводится пример.

5. Пример

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -y(-y^{12} + 2y^{11} + y^{10} + 3x^6 - x^5 y - 6x^4 y^2),$$

$$\dot{y} = (1/2)x(10y^8 + 3x^6 + 2x^3 y^3 + 15x^2 y^4).$$

Её диаграмма Ньютона состоит из двух рёбер ℓ и $\tilde{\ell}$. Показатель ребра ℓ равен $1/2$, показатель ребра $\tilde{\ell}$ равен 1. Вершина c, соединяющая рёбра ℓ и $\tilde{\ell}$, имеет координаты $(4,4)$, её векторный коэффициент $(a,b) = (6, 15/2)$. Отсюда $\lambda = 1/6$, $\gamma = 2/3$.

Для ребра ℓ многочлен $F_0(x,y) = y^4(y^4 + 9x^2)(y^4 + x^2)$, для $\tilde{\ell}$ $F_0(x,y) = \frac{3}{2}x^4(x^2+y^2)^2$. Тем самым выполняются условия невырожденности для обоих рёбер и внутренней вершины. Согласно критерию монодромности [8] особая точка $(0,0)$ является монодромной.

После замены $x = z^2, y = zw$, соответствующей ребру ℓ, получаем уравнение

$$\frac{dz}{dw} = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i(w) z^{i+1},$$

где

$$\Phi_0(w) = -\frac{w^8-6}{w(w^8+10w^4+9)},$$

$$\Phi_1(w) = -\frac{20w^{14}+30w^{10}-2w^8-10w^4-3}{w^2(w^8+10w^4+9)^2},$$

$$\Phi_2(w) = \frac{50w^{24}+175w^{20}-4w^{18}+240w^{16}+105w^{12}+24w^{10}-347w^8-730w^4-408}{w^3(w^8+10w^4+9)^3},$$

$$\Psi(w) = \Phi_0(w) - \frac{2}{3w} = -(5/3)w^3(w^2-2w+2)(w^2+2w+2)(w^4+9)(w^4+1).$$

Возьмём $\sigma = 1$. Составляя дифференциальное уравнение

$$H_0'(w) = -(5/3)H_0(w)\frac{w^3(w^2-2w+2)(w^2+2w+2)}{(w^4+9)(w^4+1)}$$

и решая его с начальным условием $H_0(1) = 1$ в пакете Maple, получим

$$p_0 \approx 1.14538620977712.$$

Для нахождения A_1^- найдём разложения

$$\exp F(x) \approx 1 - (5/27)w^4 + (565/5832)w^8,$$

$$\tilde{C}_0 = w^\gamma \exp F(w) \approx w^{2/3}(1-(5/27)w^4+(565/5832)w^8),$$

$$\tilde{R}_1 = w^\gamma \exp F(w)\Phi_1(w) \approx 1/(27w^{4/3}) + (25/729)w^{8/3} - (19643/157464)w^{20/3}.$$

Отсюда $A_1^- = 1/(27w^{4/3})$, $F_1^- = -1/(9w^{1/3})$.

Для нахождения $\tilde{p}_1$ составляем систему дифференциальных уравнений

$$H_0' = -(5/3)H_0\frac{w^3(w^2-2w+2)(w^2+2w+2)}{(w^4+9)(w^4+1)},$$

$$H_1' = \frac{-27H_0(20w^{14}+30w^{10}-2w^8-10w^4-3)-(w^8+10w^4+9)^2}{27w^{4/3}(w^8+10w^4+9)^2}$$

с начальными условиями

$$H_0(1) = \sigma^{-\gamma}/p_0 = 0.87306795861, \quad H_1(1) = -F1^-(\sigma) = 1/9.$$

Решая её, получаем $\tilde{p}_1 = H_0(0) \approx 0.1246761448909$, $p_1 = \tilde{p}_1 p_0 \approx 0.142802337046$.

Для нахождения p_2 найдём разложения

$$\tilde{C}_1 := \tilde{p}_1 + F_1 \approx 0.12467614489 - \frac{1}{9w^{1/3}} + \frac{25}{2673}w^{11/3} - \frac{19643}{1207224}w^{23/3},$$

где F_1 — первообразная $\tilde{R}_1$, не содержащая нулевой степени в разложении.

Подставляя разложения $\tilde{C}_0$, $\tilde{C}_1$ в $\tilde{R}_2$, получаем

$$\tilde{R}_2 \approx \frac{-46}{81w^{5/3}} + \frac{0.0092352699919}{w^{4/3}} + \frac{25610}{24057}w^{7/3} + 0.0085511759184w^{8/3}.$$

Отсюда

$$A_2^- = \frac{-46}{81w^{5/3}} + \frac{0.0092352699919}{w^{4/3}}, \quad F_2^- = \frac{0.8518518519}{w^{2/3}} - \frac{0.02770580998}{w^{1/3}}.$$

Для нахождения $\tilde{p}_2$ составляем систему дифференциальных уравнений

$$H_0' = -(5/3)H_0 \frac{w^3(w^2-2w+2)(w^2+2w+2)}{(w^4+9)(w^4+1)},$$

$$H_1' = \frac{-27H_0(20w^{14}+30w^{10}-2w^8-10w^4-3)-(w^8+10w^4+9)^2}{27w^{4/3}(w^8+10w^4+9)^2},$$

$$H_2' = \frac{(w^8+10w^4+9)^{-3}}{w^{5/3}}\big[H_0^2(50w^{24}+175w^{20}-4w^{18}+240w^{16}+105w^{12}+24w^{10}-$$

$$-347w^8-730w^4-408)-2H_0\big(H_1w^{1/3}-1/9\big)(20w^{14}+30w^{10}-2w^8-10w^4-3)\times$$

$$\times(w^8+10w^4+9)+(w^8+10w^4+9)^3(46/81-0.0092352699919w^{1/3})\big].$$

Решая эту систему с начальными условиями

$$H_0(1)=0.87306795861,\quad H_1(1)=1/9,\quad H_2(1)=-F_2^-(\sigma)=-0.8241460419,$$

получим $\tilde{p}_2 = H_2(0) \approx -1.0355561683172783$, $p_2 = \tilde{p}_2 p_0 \approx -1.186111754640$.

Список литературы

1. **Медведева, Н. Б.** Асимптотическое разложение преобразования монодромии / Н. Б. Медведева // Челяб. физ.-мат. журн. — 2016. — Т. 1, вып. 1. — С. 56–72.
2. **Адамар, Ж.** Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. — М. : Наука, 1978. — 352 с.
3. **Медведева, Н. Б.** Об аналитической разрешимости проблемы различения центра и фокуса / Н. Б. Медведева // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2006. — Т. 254. — С. 11–100.
4. **Медведева, Н. Б.** Об аналитической неразрешимости проблемы устойчивости на плоскости / Н. Б. Медведева // Успехи мат. наук. — 2013. — Т. 68, вып. 5. — С. 147–176.
5. **Медведева, Н. Б.** Достаточное условие фокуса для монодромной особой точки / Н. Б. Медведева, Е. В. Мазаева // Тр. Моск. мат. об-ва. — 2002. — Т. 62. — С. 87–114.
6. **Березовская, Ф. С.** Асимптотика преобразования монодромии особой точки с фиксированной диаграммой Ньютона / Ф. С. Березовская, Н. Б. Медведева // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1991. — Т. 15. — С. 156–177.
7. **Арнольд, В. И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения - 1 / В. И. Арнольд, Ю. С. Ильяшенко // Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики. Фундамент. направления. — 1985. — Т. 1. — С. 7–149.
8. **Медведева, Н. Б.** Критерий монодромности особой точки векторного поля на плоскости / Н. Б. Медведева // Алгебра и анализ. — 2001. — Т. 13, вып. 2. — С. 130–150.

Поступила в редакцию 09.10.2019
После переработки 05.11.2019

Сведения об авторах

Медведева Наталия Борисовна, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной математики, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: medv@csu.ru.

Викторова Валерия Андреевна, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: valeriaviktorova4@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2019. Vol. 4, iss. 4. P. 398–411.

DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14403

AN APPROXIMATE CALCULATION OF HADAMARD INTEGRALS OF A SPECIAL FORM

N.B. Medvedeva[a], **V.A. Viktorova**[b]

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
[a]*medv@csu.ru,* [b]*valeriaviktorova4@gmail.com*

In the problem of distinguishing between the center and the focus for the case of a complex monodromic singular point under certain general conditions, the coefficients of the asymptotic representation of the monodromy transformation are expressed in terms of the Hadamard integrals of the functions arising from the systems of equations in variations corresponding to the edges of the Newton diagram. The integrands in these integrals are very complex, and even numerical finding the integrals from them is almost impossible. A method is proposed for calculating this kind of Hadamard integrals by solving some special systems of differential equations. The algorithm is implemented in the Maple system. A numerical example is given.

Keywords: *integral of Hadamard, monodromic singular point, monodromy map, correspondence map, Newton diagram, asymptotic expansion, equations in variations.*

References

1. **Medvedeva N.B.** Asimptoticheskoe razlozhenie preobrazovaniya monodromii [Asymptotic expansion of the monodromy map]. *Chelyabinskiy fiziko-matematicheskiy zhurnal* [Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal], 2016, vol. 1, iss. 1, pp. 56–72. (In Russ.).
2. **Hadamard J.** Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. Mineola, New York, Dover Publ., 2003. 309 p.
3. **Medvedeva N.B.** On the analytic solvability of the problem of distinguishing between center and focus. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2006, vol. 254, iss. 1, pp. 7–93.
4. **Medvedeva N.B.** On analytic insolubility of the stability problem on the plane. *Russian Mathematical Surveys*, 2013, vol. 68, no. 5, pp. 923–949.
5. **Medvedeva N.B., Mazaeva E.V.** A sufficient condition for a focus for a monodromic singular point. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 2002, vol. 63, pp. 77–103.
6. **Berezovskaya F.S., Medvedeva N.B.** Asimptotika preobrazovaniya monodromii osoboy tochki s fiksirovannoy diagrammoy N'yutona [Monodromy transformation asymptotics of a singular point with a fixed Newton diagram]. *Trudy seminara imeni I.G. Petrovskogo* [Transactions of I.G. Petrovskiy Workshop], 1991, iss. 15, pp. 156–177. (In Russ.).
7. **Arnol'd, V.I.** Obyknovennye differentsial'nye uravneniya — 1. [Ordinary differential equations — 1]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya* [Results of science and technology. Contemporary problems of mathematics. Fundamental directions], 1985, vol. 1, pp. 7–149. (In Russ.).
8. **Medvedeva N. B.** Monodromy criterion for a singular point of a vector field in the plane. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2002, vol. 13, no. 2, pp. 253–268.

Accepted article received 09.10.2019
Corrections received 05.11.2019

The work is supported by the Russian Foundation of Basic Research, grant 17-01-00739_a.