

## АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С КРУГОВОЙ ВЕКТОГРАММОЙ СКОРОСТЕЙ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

П. Д. Лебедев<sup>1,2,a</sup>, А. А. Успенский<sup>1,2,b</sup>

<sup>1</sup>Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

<sup>2</sup>Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

<sup>a</sup>pleb@yandex.ru, <sup>b</sup>uspen@imm.uran.ru

Изучается задача управления по быстродействию с кусочно-постоянной динамикой и невыпуклым целевым множеством с гладкой границей. Негладкое решение задачи формируется на основе конструкций теории математического управления и принципов геометрической оптики. Доказаны утверждения, раскрывающие геометрию сингулярных кривых, а также их дифференциальные свойства. Предложены и реализованы алгоритмы построения сингулярного множества и функции оптимального результата. Эффективность алгоритмов проиллюстрирована результатами работы программного комплекса.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, быстродействие, рассеивающая кривая, плоскослоистая среда, функция оптимального результата, закон Снелиуса.

### Введение

Для плоской задачи управления по быстродействию с круговой вектограммой скоростей и замкнутым невыпуклым целевым множеством с гладкой границей предложены алгоритмы построения функции оптимального результата. Задача решается с привлечением принципов геометрической оптики. В частности, используется принцип Ферма: свет выбирает траекторию между двумя точками, движение по которой занимает минимальное время. Изучен случай плоскослоистой двухкомпонентной среды, в которой радиус круга, совпадающего с вектограммой скоростей, является константой в каждой из двух рассматриваемых полуплоскостей. Слоистость среды обуславливает наличие оптимальных траекторий не только в виде прямолинейных отрезков, но и в виде ломаных, точки излома которых лежат на границе полуплоскостей. В работе введены в рассмотрение обобщённые псевдовёршины — характеристические точки границы краевого множества, порождающие ветви сингулярного множества решения задачи управления. Исследованы свойства сингулярного множества, выявлены условия гладкости его ветвей. Осуществлено численное конструирование функции оптимального результата на примере задачи управления по быстродействию. Выполнена визуализация результатов в виде карты линий уровня функции оптимального результата (с указанием сингулярного множества) и графика этой же функции как поверхности в трёхмерном пространстве.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу управления по быстродействию, заключающуюся в приведении точки на целевое множество  $M \subset \mathbb{R}^2$  за минимально возможное время. Полагаем, что движение точки  $\mathbf{x} = (x, y)$  задаётся уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = k(\mathbf{x})\mathbf{v}, \quad (1)$$

где на управление  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  наложено ограничение  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \leq 1$ . Коэффициент  $k(\mathbf{x}) = k(x, y)$  задан равенством

$$k(x, y) = \begin{cases} 1, & y \leq y_c, \\ k_0, & y > y_c, \end{cases}$$

параметр  $y_c$  может быть любым,  $k_0 \in (0, 1)$ . Требуется построить функцию оптимального результата, выявив её сингулярное множество.

Задаче быстродействия поставим в соответствие задачу Дирихле для уравнения Гамильтона — Якоби [1]

$$\min_{\mathbf{v}: \|\mathbf{v}\| \leq 1} \langle Du(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle + k^{-1}(\mathbf{x}) = 0, \quad (2)$$

где  $Du(\mathbf{x})$  есть градиент функции  $u(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x}$ , с краевым условием

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

$\Gamma = \partial M$  — граница  $M$ . Минимаксное решение задачи (2), (3) является функцией оптимального быстродействия в задаче быстродействия с динамикой (1). Уравнение (2) относится к уравнениям Айзекса — Беллмана [2].

Вышеуказанные задачи связаны с задачей Дирихле для ключевого в геометрической оптике [3] уравнения эйконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = n(x, y) \quad (4)$$

с разрывной правой частью  $n(x, y) = n(\mathbf{x}) = k^{-2}(\mathbf{x})$  и с краевым условием (3). Уравнение (4) описывает распространение света в анизотропной среде. Фундаментальное (обобщённое) решение задачи для уравнений типа (4) введено С. Н. Кружковым [4], который отметил возможность привлечения конструкций геометрической оптики при построении задач оптимального управления.

Определим расстояние между точками следующим образом:

$$d_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{G \in G(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \int_G \frac{dG}{k(x, y)}. \quad (5)$$

Здесь  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  — множество всех кусочно-гладких кривых, соединяющих  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ . Иными словами, кратчайшим путём между точками будет линия, на преодоление которой затрачивается наименьшее время. Выражение (5) задаёт метрику, аналогичную по свойствам вариационной метрике из работы [5].

Будем называть динамическим расстоянием до множества  $M$  величину

$$\rho_k(\mathbf{x}, M) = \min_{\mathbf{m} \in M} d_k(\mathbf{x}, \mathbf{m}). \quad (6)$$

По аналогии с обычной  $\varepsilon$ -окрестностью введём замкнутую динамическую  $\varepsilon$ -окрестность как  $M_k(\varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \rho_k(\mathbf{x}, M) \leq \varepsilon\}$ . Также будем называть волновым фронтом, соответствующим моменту времени  $\varepsilon > 0$ , множество  $\Phi_k(M, \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \rho_k(\mathbf{x}, M) = \varepsilon\}$ .

В дальнейшем будем рассматривать случай односвязного множества  $M$ , граница которого  $\Gamma$  есть плоская кривая, заданная параметрическим уравнением

$$\Gamma = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2: \mathbf{y} = \mathbf{y}(t), t \in \Xi\}. \tag{7}$$

Здесь  $\Xi \subseteq \mathbb{R}$  — замкнутое односвязное множество, а отображение  $\mathbf{y}: \Xi \rightarrow \mathbb{R}^2$  является непрерывным на множестве  $\Xi$ , дифференцируемым во всех внутренних точках  $\Xi$ , за исключением, может быть, конечного числа точек. Считаем, что (7) есть замкнутая регулярная кривая без точек самопересечения, т. е. (7) может быть представлена как след точки, движущейся по плоскости с конечной ненулевой скоростью. Данные условия гарантируют, что подмножество  $\text{int } M$  внутренних точек множества  $M$  — непустое и полностью находится по одну сторону от  $\Gamma$ .

## 2. Сингулярные множества в задаче быстрогодействия

Вектограмма скоростей системы является постоянной на каждой из полуплоскостей  $\Pi_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \leq y_c\}$  и  $\Pi_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y > y_c\}$ , а значит, оптимальные траектории, соединяющие точку  $\mathbf{x}$  с той точкой  $\mathbf{m} \in M$ , которую система может достичь из  $\mathbf{x}$  за кратчайшее время, могут быть трёх видов. Либо это отрезок прямой, соединяющий точки  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{m}$ , либо два отрезка прямых, место стыка которых находится на прямой  $\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = y_c\}$ , либо три отрезка прямых, два крайних из которых лежат в полуплоскости  $\Pi_1$ , а средний принадлежит прямой  $\Lambda$  (при этом углы излома определяются законом Снеллиуса, подробнее см. [3]). Линии уровня функции оптимального результата будут совпадать с волновыми фронтами [6] при распространении света в плоскостой среде, описываемой уравнением (4), деформированными за счёт неоднородности среды.

Построение функции оптимального результата в задаче управления по быстродействию с двумя возможными значениями кругового ресурса управления опирается на следующие факты. Целевое множество  $M$  есть подмножество  $\Pi_0$ , при этом радиус круговой вектограммы скоростей (другими словами, коэффициент преломления среды — с точки зрения геометрической оптики) в  $\Pi_0$  равен 1. Тогда в силу [7] функция оптимального результата  $u = u(\mathbf{x})$  на  $\Pi_0 \setminus M$  равна евклидову расстоянию до  $M$ . На второй полуплоскости  $\Pi_1$  меняется коэффициент преломления среды, и, стало быть, эволюция волновых фронтов (линий уровня функции  $u = u(\mathbf{x})$ , продолженной из  $\Pi_0$  в  $\Pi_1$ ) определяется законом Снеллиуса.

Если в точке  $\mathbf{y}(t) = (x(t), y(t)) \in \Gamma$  определена и отлична от нуля производная  $\mathbf{y}'(t) = (x'(t), y'(t))$ , то к  $\Gamma$  в  $\mathbf{y}(t)$  определена нормаль  $N$ . Уравнение точек  $(x^*, y^*) \in N$  имеет вид

$$(x^* - x(t))x'(t) + (y^* - y(t))y'(t) = 0.$$

Если нормаль пересекает прямую  $\Lambda$ , то координаты точки пересечения  $(x^0, y^0)$  есть

$$x^0 = x(t) - \frac{(y_c - y(t))x'(t)}{y'(t)}, \quad y^0 = y_c.$$

Заметим, что если в некоторой точке  $(x(t), y(t))$  имеет место равенство  $y'(t) = 0$ , то нормаль к  $\Gamma$  в ней параллельна  $\Lambda$  и пересечь её не может. Уравнение прямой

$N_1$ , которая содержит оптимальные траектории, приходящие в точку  $\mathbf{y}(t)$  от точек  $(\bar{x}, \bar{y})$  из  $\Pi_1$ , имеет вид  $(\bar{x} - x^0) = (\bar{y} - y^0) \operatorname{ctg} \alpha_1$ , где  $\alpha_1 = \arcsin(k_0 \sin \alpha_0)$ ,  $\alpha_0 = \operatorname{arctg}(-y'(t)/x'(t))$ .

У функции  $u(\mathbf{x})$  оптимального результата могут появляться особенности, обусловленные множественностью оптимальных траекторий, исходящих из точек  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ . Объединение этих точек является в терминах Р. Айзекса [2] рассеивающей кривой  $L$ . Других сингулярных особенностей в задаче быстрогодействия с относительно простой динамикой не возникает (кроме прямой  $\Lambda$ , на которой оптимальные траектории могут иметь изломы).

**Определение 1.** Будем говорить, что несовпадающие точки  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$  границы  $\partial M$  множества  $M$  являются *динамически симметричными* в задаче быстрогодействия, если найдётся точка  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus M$  такая, что из неё выходят как минимум две оптимальные траектории, одна из которых пересекает  $M$  в точке  $\mathbf{m}_1$ , а другая в  $\mathbf{m}_2$ .

Заметим, что в общем случае могут существовать и несовпадающие оптимальные траектории, которые из одной точки  $\mathbf{x} \notin M$  приходят в одну и ту же точку  $\mathbf{m} \in M$ . Однако мы введём дополнительные условия, которые позволяют свести задачу о построении рассеивающей кривой к нахождению динамически симметричных точек.

**Определение 2.** *Рассеивающей линией*  $\hat{L}$  (при заданном целевом множестве  $M \subset \mathbb{R}^2$  и параметрах системы (1)) назовём множество всех точек  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ , для которых найдутся две несовпадающие точки  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$  границы  $\partial M$ , до которых идут оптимальные траектории из  $\mathbf{x}$ .

**Определение 3.** Будем называть точку  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$  *обобщённой псевдовершиной* множества  $M$ , если существует последовательность  $\{(\bar{\mathbf{m}}_n, \tilde{\mathbf{m}}_n)\}_{n=1}^{\infty}$  пар динамически симметричных точек, для которой имеет место предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{\mathbf{m}}_n, \tilde{\mathbf{m}}_n) = (\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_0)$ .

**Лемма 1.** Пусть в задаче быстрогодействия для системы (1) множество  $M$  односвязно и имеет гладкую границу  $\Gamma$ . Тогда, если выполняется вложение  $M \subset \Pi_0$ , то для любых точек  $\mathbf{x} \notin M$  и  $\mathbf{y} \in \Gamma$  существует максимум одна оптимальная траектория, содержащая их.

*Доказательство.* Обозначим  $\mathbf{x} = (x, y)$ ,  $\mathbf{y} = (\bar{x}, \bar{y})$ . Если точка  $\mathbf{x}$  лежит в полуплоскости  $\Pi_0$ , то оптимальной траекторией, идущей от  $\mathbf{x}$  к  $\mathbf{y}$ , является отрезок  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ . Если точка  $\mathbf{x}$  лежит в полуплоскости  $\Pi_1$ , то оптимальная траектория есть ломаная из двух отрезков, смыкающихся в точке  $\mathbf{z} = (x^0, y^0) \in \Lambda$ . При этом углы  $\alpha_0$  (между векторами  $\mathbf{z} - \mathbf{x}$  и перпендикуляром  $\mathbf{n} = (1, 0)$  к  $\Lambda$ ) и  $\alpha_1$  (между векторами  $\mathbf{y} - \mathbf{z}$  и перпендикуляром  $\mathbf{n}$ ) связаны по закону Снеллиуса

$$\sin \alpha_1 = k_0 \sin \alpha_0. \quad (8)$$

Если абсциссу  $x^0$  точки  $\mathbf{z}$  изменять от  $x$  до  $\bar{x}$ , то угол  $\alpha_0$  будет монотонно возрастать, а угол  $\alpha_1$  убывать. Поэтому равенство (8) может выполняться только при одном значении  $x^0$ , а значит, оптимальная траектория, состоящая из двузвенной ломаной, является единственной.  $\square$

Важную роль играют свойства гладкости рассеивающей кривой.

**Теорема 1.** Пусть  $M \subset \Pi_0$  и задана некоторая точка  $\mathbf{x} \in \hat{L}$  рассеивающей кривой, такая, что  $\mathbf{x} \notin \Lambda$ . Тогда если в точку  $\mathbf{x}$  приходит ровно две оптимальные

траектории  $T_1$  и  $T_2$ , то в  $\mathbf{x}$  определена для  $\tilde{L}$  касательная  $\Theta$ . При этом если  $\mathbf{x} \in \Pi_0$ , то  $\Theta$  совпадает с биссектрисой угла, образованного точками  $\mathbf{m}_1, \mathbf{x}, \mathbf{m}_2$ , где  $\mathbf{m}_i = T_i \cap \partial M$ ,  $i = 1, 2$ . Если же  $\mathbf{x} \in \Pi_1$ , то  $\Theta$  совпадает с биссектрисой угла, образованного точками  $\mathbf{z}_1, \mathbf{x}, \mathbf{z}_2$ , где  $\mathbf{z}_i = T_i \cap \Lambda$ ,  $i = 1, 2$ .

*Доказательство.* Заметим, что согласно лемме 1 точку  $\mathbf{x}$  различные оптимальные траектории соединяют с множеством  $M$  в разных точках. Поэтому  $\mathbf{m}_1 \neq \mathbf{m}_2$ .

Рассмотрим случай, когда  $\mathbf{x} \in \Pi_0$ . Тогда найдётся круг ненулевого радиуса  $O(\mathbf{x}, r_0) \subset \Pi_0$ . Поскольку скорость движения системы (1) в полуплоскости  $\Pi_0$  больше, чем в  $\Pi_1$ , то  $T_1$  и  $T_2$  есть отрезки, соединяющие  $\mathbf{x}$  с ближайшими в евклидовой метрике точками из  $M$ . Рассмотрим часть  $\hat{L}_0 = \hat{L} \cap O(\mathbf{x}, r_0)$  рассеивающей линии, которая лежит в окрестности точки  $\mathbf{x}$ . В ней имеет место  $\hat{L}_0 = L(M) \cap O(\mathbf{x}, r_0)$ , где  $L(M)$  — биссектриса множества  $M$ , т. е. множество точек, имеющих две или более ближайших точки в  $M$ . По свойствам биссектрисы, изученным, например в [8], к ней определена касательная, совпадающая со срединным перпендикуляром к отрезку, с концами в двух ближайших точках  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$  на  $M$ . Значит, и к рассеивающей кривой  $\hat{L}$  в точке  $\mathbf{x}$  тоже определена та же самая касательная  $\Theta$ , совпадающая с биссектрисой угла между лучами  $\{\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{m}_1 - \mathbf{x}) : \lambda \geq 0\}$  и  $\{\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{m}_2 - \mathbf{x}) : \lambda \geq 0\}$ .

Рассмотрим случай, когда  $\mathbf{x} \in \Pi_1$ . Тогда найдётся круг ненулевого радиуса  $O(\mathbf{x}, r_1) \subset \Pi_1$ . Рассмотрим динамическую окрестность  $M_k(\varepsilon_1)$ , где

$$\varepsilon_1 = \rho_k(\mathbf{x}, M) - r_1/k_0.$$

По построению она содержит волновой фронт  $\Phi_k(M, \varepsilon_1)$ , который имеет ровно две точки пересечения с окружностью  $\partial O(\mathbf{x}, r_1) : \mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$ . При этом

$$\mathbf{v}_1 = \partial O(\mathbf{x}, r_1) \cap [\mathbf{x}, \mathbf{z}_1], \tag{9}$$

$$\mathbf{v}_2 = \partial O(\mathbf{x}, r_1) \cap [\mathbf{x}, \mathbf{z}_2]. \tag{10}$$

Рассмотрим круг  $\partial O(\mathbf{x}, r_2)$  радиуса  $r_2 < r_1$ . Все точки из данного круга, принадлежащие рассеивающей кривой  $\hat{L}$ , будут одновременно принадлежать рассеивающей кривой  $\hat{L}^*$  в задаче быстродействия, в которой в качестве целевого множества взято  $M_k(\varepsilon_1)$ .

Поскольку функция (6) липшицева (с константой липшицевости, равной  $k_0^{-1}$ ), то отображение, связывающее точку  $\mathbf{x}$  и множество  $\Omega_k(\mathbf{x}, M)$  ближайших к ней в метрике (5) точек на замкнутом множестве  $M$ , полунепрерывно сверху. Рассмотрим сходящиеся последовательности точек  $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1} \subset \mathbb{R}^2 \setminus M$  и  $\{\mathbf{y}_n\}_{n=1} \subset M$ , такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{y}_0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbf{y}_n \in \Omega_k(M, \mathbf{x}_n).$$

Покажем, что имеет место включение

$$\mathbf{y}_0 \in \Omega_k(\mathbf{x}_0, M). \tag{11}$$

Допустим, (11) не выполняется. Тогда найдётся точка  $\mathbf{y}^* \in M$ , такая, что  $d_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}^*) < d_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ . Рассмотрим круги  $O(\mathbf{x}_0, \Delta r)$ ,  $O(\mathbf{y}_0, \Delta r)$ , где  $\Delta r = k_0 R^*/4$ ,  $R^* = d_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - d_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}^*) > 0$ . Начиная с некоторого номера  $n^*$  выполняются включения  $\mathbf{x}_n \in O(\mathbf{x}_0, \Delta r)$  и  $\mathbf{y}_n \in O(\mathbf{y}_0, \Delta r)$ .

При этом в силу свойств метрики (5) выполняются неравенства

$$d_k(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}^*) \leq d_k(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_0) + d_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}^*) \leq k_0^{-1} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| + d_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}^*) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq k_0^{-1}k_0R^*/4 + d_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}^*) = d_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}^*) + 0.25R^*, \\ d_k(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) &\geq d_k(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_0) - d_k(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_0) \geq d_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - d_k(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_0) - d_k(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_0) \geq \\ &\geq d_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| - \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_0\| \geq d_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - k_0^{-1}k_0R^*/4 - k_0^{-1}k_0R^*/4 = \\ &= d_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - 0.5R^* = d_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}^*) + R^* - 0.5R^* = d_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}^*) + 0.5R^*. \end{aligned}$$

Из них вытекает, что  $d_k(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}^*) < d_k(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)$ , и поэтому  $\mathbf{y}_n \notin \Omega_k(M, \mathbf{x}_n)$ . Получилось противоречие.

Таким образом, для точек в некоторой малой окрестности  $\mathbf{x}$  ближайšie в динамической метрике точки лежат в малой окрестности точки  $\mathbf{v}_1$  или  $\mathbf{v}_2$ , а значит, и в полуплоскости  $\Pi_1$ . Следовательно, оптимальные траектории, соединяющие точки  $\mathbf{x}^*$  из окрестности  $\mathbf{x}$  с  $M_k(\varepsilon_1)$ , есть отрезки с одним концом в  $\mathbf{x}^*$ , а другим концом на ближайшей в евклидовой метрике к  $\mathbf{x}^*$  точке из  $M_k(\varepsilon_1)$ . Получается, что в некотором круге  $O(\mathbf{x}, r_3)$ ,  $0 < r_3 < r_2$ , выполняется

$$\widehat{L} \cap O(\mathbf{x}, r_3) = L(M_k(\varepsilon_1)) \cap O(\mathbf{x}, r_3).$$

Поскольку точка  $\mathbf{x}$  имеет ровно две ближайšie в евклидовой метрике точки на  $M_k(\varepsilon_1)$ , то к  $L(M_k(\varepsilon_1))$  определена касательная, совпадающая с биссектрисой угла, образованного точками  $\mathbf{v}_1, \mathbf{x}, \mathbf{v}_2$ . Из выражений (9) и (10) следует, что границы угла совпадают с лучами  $\{\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z}_1 - \mathbf{x}) : \lambda \geq 0\}$  и  $\{\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z}_2 - \mathbf{x}) : \lambda \geq 0\}$ .

Показано, что к рассеивающей кривой  $\widehat{L}$  определена касательная, совпадающая в первом случае с биссектрисой угла, образованного точками  $\mathbf{m}_1, \mathbf{x}, \mathbf{m}_2$ ; а во втором случае — точками  $\mathbf{z}_1, \mathbf{x}, \mathbf{z}_2$ .  $\square$

Следствием из теоремы является уравнение касательной к рассеивающей линии  $\widehat{L}$  в точках, в которые сходятся ровно две траектории. Если это точка  $\mathbf{x} \in \Pi_0 \setminus \Lambda$ , то уравнение имеет вид

$$\Theta = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{z} - \mathbf{m}_1\| = \|\mathbf{z} - \mathbf{m}_2\|\}. \quad (12)$$

Если же это точка  $\mathbf{x} \in \Pi_1$ , то его можно записать как

$$\Theta = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{z} = \mathbf{x} + t \left( \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}_1\|} - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}_2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}_2\|} \right), t \in (-\infty, \infty) \right\}. \quad (13)$$

Существование касательных к рассеивающей кривой  $\widehat{L}$  в точках, удовлетворяющих условиям теоремы 1, означает гладкость локального участка этой сингулярной линии.

### 3. Пример решения задачи быстродействия

В среде MATLAB разработан программный комплекс [9] решения задач быстродействия с круговой вектограммой скоростей. Его основу составляют процедуры вычислительной геометрии (например, пересечение отрезков или лучей) и численной оптимизации (например, отыскание ближайшей в евклидовой или динамической метрике точки на множестве), а также алгоритмы численного решения задачи Коши для дифференциального уравнения, связывающего координаты динамически симметричных точек [10].

**Пример 1.** Пусть в задаче быстродействия для динамической системы (1) целевое множество  $M$  не выпукло и совпадает с подграфиком функции

$$f(x) = \begin{cases} (2x^2 + 1)^{-1}, & x \leq 0, \\ (4x^2 + 1)^{-1}, & x > 0. \end{cases} \quad (14)$$

Параметры функции  $k(x, y)$  заданы: значение коэффициента  $k_0 = 0.5$ , ордината линии разграничивающей полушлоскости с различными вектограммами  $y_0 = 1.75$ . Требуется построить решение в виде линий уровня функции оптимального результата с указанием рассеивающей кривой и в виде графика функции  $u(x, y)$ .

Границей целевого множества является график гладкой функции (14), вложенный в полушлоскость  $\Pi_0$ , поэтому для рассеивающей линии справедливы лемма 1 и теорема 1. При исследовании динамически симметричных точек было установлено, что  $\hat{L}$  состоит из двух ветвей. Первая из них порождается обобщённой псевдовершиной  $y_1 \approx (-0.87, 0.39)$  (являющейся точкой локального максимума кривизны [11] кривой  $\Gamma$ , что характерно для псевдовершин в задаче быстродействия с круговой вектограммой скоростей [12]) и имеет точку прекращения  $\hat{x}_1 \approx (-1.69, 2.05)$ . Вторая ветвь, лежащая в первом квадранте, порождается обобщённой псевдовершиной  $y_2 \approx (0.69, 0.34)$  и имеет точку прекращения  $\hat{x}_2 \approx (1.31, 1.29)$ . Граница  $\Gamma$  целевого множества, прямая  $\Lambda$  (пунктир), рассеивающая линия  $\hat{L}$ , обобщённые псевдовершины (в виде белых кружков) и линии уровня  $\Phi$  функции оптимального результата с шагом  $h_\rho = 0.2$  представлены на рис. 1.

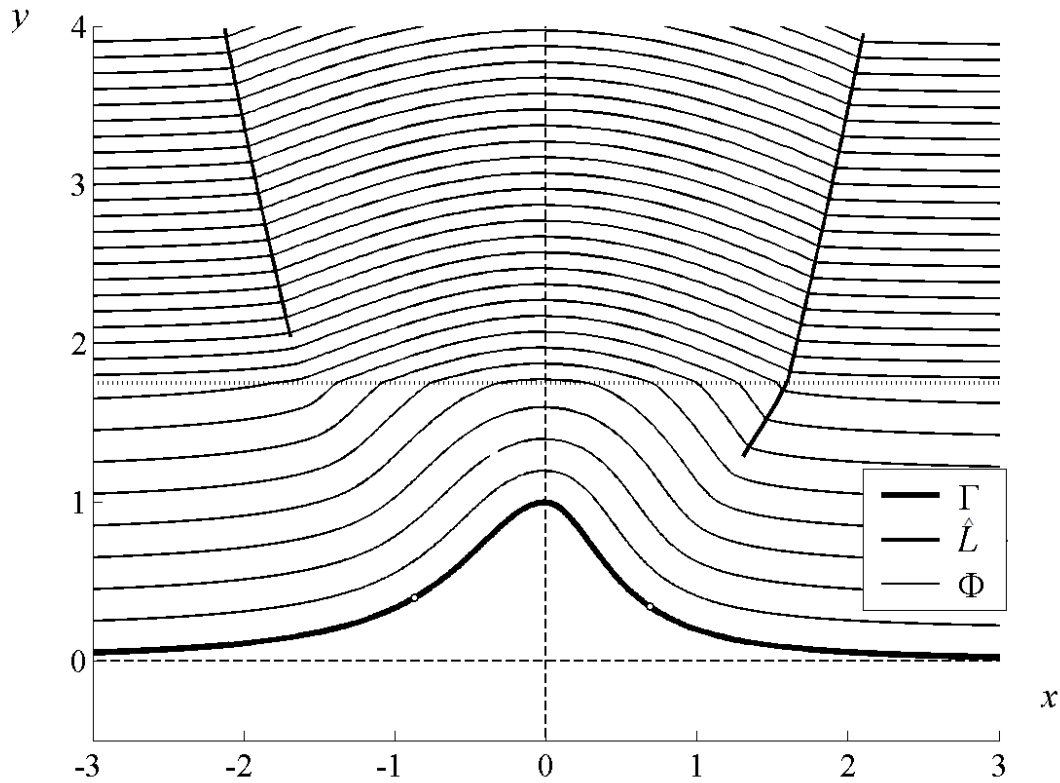


Рис.1. Граница  $\Gamma$  целевого множества, рассеивающая линия  $\hat{L}$ , обобщённые псевдовершины и линии уровня  $\Phi$  функции оптимального результата в примере 1

На рис. 1 видно, что  $\hat{L}$  является гладкой кривой, в полушлоскости  $\Pi_0$  в её точках определены касательные по формуле (12), а в полушлоскости  $\Pi_1$  — по формуле (13). Единственная точка излома для рассеивающей кривой — это точка её пересечения с прямой  $\Lambda$ .

График аппроксимации функции  $u = u(x, y) = \rho_k((x, y), M)$  на прямоугольной сетке с ячейками размера  $0.1 \times 0.1$  представлен на рис. 2. График имеет негладкие особенности на множестве  $\hat{L}$  и на  $\Lambda$ .

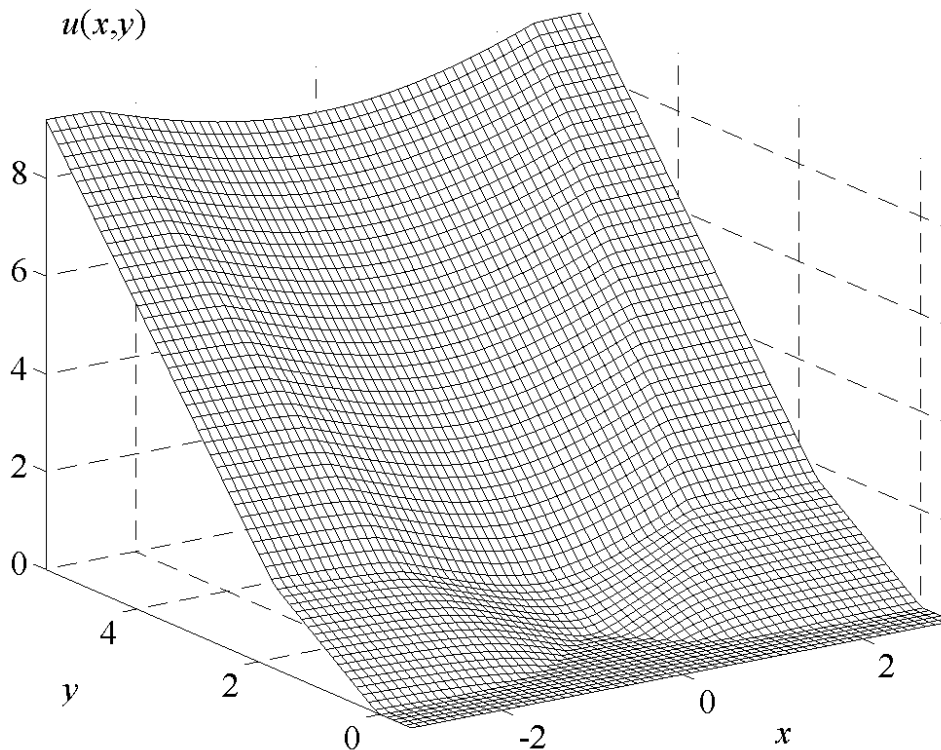


Рис. 2. График функции  $u = u(x, y)$  оптимального результата в примере 1

## Список литературы

1. **Субботин, А. И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации / А. И. Субботин. — М.; Ижевск : Ин-т компьютер. технологий, 2003. — 336 с.
2. **Айзекс, Р.** Дифференциальные игры / Р. Айзекс. — М. : Мир, 1967. — 479 с.
3. **Кравцов, Ю. А.** Геометрическая оптика неоднородных сред / Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов. — М. : Наука, 1980. — 304 с.
4. **Кружков, С. Н.** Обобщённые решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала. I / С. Н. Кружков // Мат. сб. — 1975. — Т. 98, вып. 3. — С. 450–493.
5. **Лебедев, П. Д.** Итерационные алгоритмы построения оптимальных упаковок в неоднородной метрике / П. Д. Лебедев, А. А. Лемперт // Proceedings of the International Youth School-Conference sSoProMat-2017, Yekaterinburg, Russia, 06 February, 2017, eds A. A. Makhnev, S. F. Pravdin. — URL: <http://ceur-ws.org> (дата обращения 20.09.2019).
6. **Арнольд, В. И.** Особенности каустик и волновых фронтов / В. И. Арнольд. — М. : Фазис, 1996. — 334 с.
7. **Ушаков, В. Н.** Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала / В. Н. Ушаков, А. А. Успенский, П. Д. Лебедев // Тр. Ин-та математики и механики. — 2008. — Т. 14, № 2. — С. 182–191.
8. **Ушаков, В. Н.** Геометрия сингулярных кривых для одного класса задач быстрого действия / В. Н. Ушаков, А. А. Успенский, П. Д. Лебедев // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Приклад. математика. Информатика. Процессы управления. — 2013. — Вып. 3. — С. 157–167.
9. Свид. 2017662074 Российская Федерация. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Программа построения волновых фронтов и функции евклидова расстояния до компактного невыпуклого множества / П. Д. Лебедев, А. А. Успенский; опубл. 27.10.2017. Реестр программы для ЭВМ.



10. **Лебедев, П. Д.** Построение функции оптимального результата и рассеивающих линий в задачах быстрогодействия с невыпуклым целевым множеством / П. Д. Лебедев, А. А. Успенский // Тр. Ин-та математики и механики. — 2016. — Т. 22, № 2. — С. 188–198.
11. **Рашевский, П. К.** Курс дифференциальной геометрии / П. К. Рашевский. — М. : Едиториал, УРСС, 2003. — 432 с.
12. **Лебедев, П. Д.** Конструирование негладкого решения задачи управления по быстроддействию при низком порядке гладкости границы целевого множества / П. Д. Лебедев, А. А. Успенский // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2019. — Т. 25, № 1. — С. 108–119.

*Поступила в редакцию 26.09.2019*

*После переработки 26.10.2019*

#### Сведения об авторах

**Лебедев Павел Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия; старший научный сотрудник Института естественных наук и математики, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия; e-mail: pleb@yandex.ru.

**Успенский Александр Александрович**, доктор физико-математических наук, зав. сектором, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия; ведущий научный сотрудник Института естественных наук и математики, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия; e-mail: uspen@imm.uran.ru.

## ALGORITHMS FOR SOLVING THE VELOCITY PROBLEM WITH CIRCULAR VECTOGRAM IN INHOMOGENEOUS MEDIUM

P.D. Lebedev<sup>1,2,a</sup>, A.A. Uspenskii<sup>1,b</sup>

<sup>1</sup>*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia*

<sup>2</sup>*Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russia*

<sup>a</sup>*pleb@yandex.ru*, <sup>b</sup>*uspen@imm.uran.ru*

We study the performance control problem with a piecewise constant dynamics and a non-convex target set with a smooth boundary. A non-smooth solution to the problem is formed on the basis of the constructions of the theory of mathematical control and the principles of geometric optics. Statements are proved that reveal the geometry of singular curves, as well as their differential properties. Algorithms for constructing a singular set and an optimal result function are proposed and implemented. The effectiveness of the algorithms is illustrated by the results of the software package.

**Keywords:** *optimal control, velocity, dispersing curve, plane-layered medium, optimal result function, Snellius law.*

## References

1. **Subbotin A.I.** *Generalized Solutions of First Order PDEs: the Dynamical Optimization Perspective*. Boston, Birkhäuser, 1995. xii+314 p.
2. **Isaacs R.** *Differential Games*. New York, John Wiley and Sons, 1965. 384 p.
3. **Kravtsov Yu.A., Orlov Yu.I.** *Geometricheskaya optika neodnorodnykh sred* [Geometric optics of inhomogeneous media]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 306 p. (In Russ.).
4. **Kruzhkov S.N.** Obobshchyonnye resheniya uravneniy Gamil'tona — Yakobi tipa eykonala. I [Generalized solutions of the Hamilton — Jacobi equations of eikonal type. I]. *Mathematics of the USSR — Sbornik*, 1975, vol. 27, no. 3, pp. 406–446.
5. **Lebedev P.D., Lempert A.A.** Iteratsionnye algoritmy postroyeniya optimal'nykh upakovok v neodnorodnoy metrike [Iterative algorithms for optimal packing construction in inhomogeneous metrics]. *Proceedings of the International Youth School-Conference sSoProMat-2017*, Yekaterinburg, Russia, 06 February, 2017, eds.: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin. Available at: <http://ceur-ws.org> (accepted 20.09.2019). Pp. 98–108.
6. **Arnold V.I.** *Singularities of Caustics and Wave Fronts*. Dordrecht, Springer-Science+Business Media, 1990. xiii+259 p.
7. **Ushakov V.N., Uspenskii A.A., Lebedev P.D.** Postroyeniye minimaksnogo resheniya uravneniya tipa eykonala [Construction of a minimax solution for an eikonal-type equation]. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 263, suppl. 2, pp. 191–201.
8. **Ushakov V.N., Uspenskii A.A., Lebedev P.D.** Geometriya singulyarnykh krivykh dlya odnogo klassa zadach bystrodeystviya [Geometry of singular curves for a class of velocity problems]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Ser. 10. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya* [Bulletin of Saint-Petersburg University. Ser. 10. Applied mathamtics. Informatics. Control Processes], 2013, iss. 3, pp. 157–167. (In Russ.).

9. **Lebedev P.D., Uspenskii A.A.** *Programma postroyeniya volnovykh frontov i funktsii yevklidova rasstoyaniya do kompaktnogo nevypuklogo mnozhestva* [Program for constructing wave fronts and the function of the Euclidean distance to a compact nonconvex set]. Certificate of state registration of the computer program no. 2017662074, October 27, 2017. (In Russ.).
10. **Lebedev P.D., Uspenskii A.A.** Postroyeniye funktsii optimal'nogo rezul'tata i rasseivayushchikh liniy v zadachakh bystrodeystviya s nevypuklym tselevym mnozhestvom [Construction of the optimal result function and dispersing lines in time-optimality problems with a nonconvex target set]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics], 2016, vol. 22, no. 2, pp. 188–198. (In Russ.).
11. **Rashevskii P.K.** *Kurs differentsial'noy geometrii* [A Course in Differential Geometry]. Moscow, URSS, 2003. 432 p. (In Russ.).
12. **Lebedev P.D., Uspenskii A.A.** Konstruirovaniye nekladkogo resheniya zadachi upravleniya po bystrodeystviyu pri nizkom poryadke gladkosti granitsy tselevogo mnozhestva [Construction of a nonsmooth solution in a time-optimal problem with a low order of the boundary smoothness of the target set]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics], 2019, vol. 25, no. 1, pp. 108–119. (In Russ.).

*Article received 26.09.2019*

*Corrections received 26.10.2019*