МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2019. Т. 4, вып. 4. С. 375–386.

УДК 517.957+336.76 DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14401

УЧЁТ ТРАНЗАКЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК ПРИ ДЕЛЬТА-ХЕДЖИРОВАНИИ ОПЦИОНОВ

М. М. Дышаев

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
Mikhail.Dyshaev@gmail.com

Рассмотрены некоторые модели ценообразования опционов с модифицированной волатильностью, позволяющие учесть наличие транзакционных издержек при дельта-хеджировании. Приведены формулы модифицированной волатильности для каждой модели. В большинстве моделей величина транзакционных издержек зависит от частоты и объёма хеджирующих сделок. На примере модели ценообразования с учётом риска («risk adjusted pricing methodology», RAPM) продемонстрирован возможный алгоритм получения величины оптимального интервала ребалансировки. Найдено численное решение нелинейного уравнения с модифицированной волатильностью из модели RAPM. В качестве практического примера построена зависимость оптимального интервала дельта-хеджирования от цены базового актива и времени, оставшегося до исполнения опциона. Сделаны рекомендации по практическому применению значений оптимального интервала в целях дельта-хеджирования опционной позиции.

Ключевые слова: *модель Блэка — Шоулза, транзакционные издержки, RAPM, дельта-хеджирование.*

Введение

Классические модели ценообразования опционов [1–3] были построены с использованием таких предположений, как отсутствие транзакционных издержек, бесконечная делимость акций, возможность непрерывной торговли и т. д. Теория ценообразования опционов, разработанная Блэком и Шоулзом [1], опирается на «арбитражный» аргумент: непрерывно корректируя портфель, состоящий из акций и безрисковых облигаций, инвестор может точно копировать доходность («return») любого опциона на эту акцию. Следовательно, стоимость опциона должна равняться стоимости такого реплицирующего портфеля. Авторы, Блэк и Шоулз, показали, что значение цены опциона $u(x,t)$ является решением линейного параболического уравнения

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0, \tag{1}$$

где цена базового актива $x \geqslant 0$ меняется в интервале времени $t \in [0,T]$, $r \geqslant 0$ — безрисковая процентная ставка, а σ — так называемая историческая волатильность цены базового актива. При этом приращение цены базового актива x подчиняется логнормальному распределению:

$$dx = \mu x dt + \sigma x dW, \tag{2}$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-01-00244.

где W — винеровский процесс, μ — снос, дрейф случайной величины.

Но наличие транзакционных издержек нарушает связь, установленную в работе Блэка и Шоулза, поскольку непрерывный пересмотр портфеля (или «ребалансировка», «рехеджирование») подразумевает непрерывную торговлю и, следовательно, бесконечные операционные затраты. Дискретная же ребалансировка портфеля с использованием дельты Блэка — Шоулза («дельта-хеджирование»), если учитываются транзакционные издержки, генерирует ошибки в стоимости реплицирующего портфеля, которые коррелируют с рынком и не стремятся к нулю при более частом пересмотре.

Чтобы применить данную модель на практике, необходимо, с одной стороны, учесть транзакционные издержки, возникающие у трейдеров при осуществлении рехеджирования, и, с другой стороны, учесть риск изменения стоимости портфеля, возникающий у трейдера из-за относительно редкой ребалансировки портфеля опционов («tracking error»).

Первой работой, направленной на учёт транзакционных издержек, была работа [4]. Идея Леланда состояла в том, чтобы заменить определение цены опциона через стоимость реплицирующего портфеля на определение цены опциона из стоимости приближённого хеджирования. Предложение Леланда состояло в том, чтобы периодически рехеджировать портфель, как в модели Блэка — Шоулза, но используя модифицированную волатильность, отражающую наличие транзакционных издержек. В модели Леланда модифицированная волатильность $\hat{\sigma}_L$ имеет вид

$$\hat{\sigma}_L^2 = \sigma^2 \left[1 + \sqrt{2/\pi}\; k/\sigma\sqrt{\Delta t}\right],$$

где σ — волатильность из модели Блэка — Шоулза, Δt является малым, но не инфинитезимальным интервалом времени между пересмотрами портфеля, а k представляет собой стоимость двусторонней транзакции, измеряемая как доля объёма транзакций по покупке и продаже (актив сначала купили, потом продали):

$$k = \frac{x_{\text{ask}} - x_{\text{bid}}}{x} = 2\frac{x_{\text{ask}} - x_{\text{bid}}}{x_{\text{ask}} + x_{\text{bid}}}, \tag{3}$$

где x_{ask} и x_{bid} — цены предложения и спроса соответственно.

Замечание 1. Необходимо отметить, что при таком определении транзакционных издержек не учитывается комиссия, взимаемая брокером или биржей за совершение транзакции, а также другие затраты, присутствующие на практике. Например, в настоящее время относительный спрэд $(x_{\text{ask}} - x_{\text{bid}})/x$ на Московской бирже не превышает 0.03–0.04 % по некоторым «голубым фишкам» («blue chips»), например, ПАО «Газпром» или ПАО «Сбербанк». Однако комиссия брокера для частных инвесторов для двух последовательных сделок («the round trip transaction costs») составляет около 0.2 %. Подобные затраты различны для разных категорий участников торгов. Для операций с маржируемыми («futures-style») опционами величина комиссии брокера сравнима с величиной среднего спрэда, и поэтому формула для коэффициента транзакционных издержек (3) может успешно использоваться. Учитывая это, можно увеличивать или уменьшать k на необходимую величину, определяемую тарифным планом брокера или используемым базовым активом.

Метод Леланда оказался очень эффективным на практике, когда транзакционные издержки невелики и пересмотр портфеля проводится не слишком часто. Однако, как показано в [5], есть определённые математические моменты в этом подходе. Даже для европейского колл-опциона конечная стоимость реплицирующего портфеля не сходится к конечной выплате по опционному контракту, если стоимость транзакции (т. е. например, комиссия брокера в процентах от объёма сделки) не зависит от количества ребалансировок портфеля ([5, теорема 2]). С учётом этого авторы предположили, что $k = k_n = k_0 n^{-\alpha}$, $\alpha \in [0, 1/2]$ и тогда модифицированная волатильность $\hat{\sigma}_{KS}$, зависящая от числа ребалансировок, примет вид

$$\hat{\sigma}_{KS}^2 = \sigma^2 \left(1 + \frac{\gamma_n}{\sigma}\right), \quad \gamma_n = \sqrt{\frac{8}{\pi}} k_n n^{1/2} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} k_0 n^{1/2-\alpha}.$$

Обобщающее исследование этих же авторов [6] является, на наш взгляд, одним из наиболее полных источников, освещающих вопросы учёта транзакционных издержек.

Авторы [7] использовали асимптотический анализ для получения нелинейного уравнения Блэка — Шоулза для модели, учитывающей транзакционные издержки и фактор неприятия риска хеджерами. Волатильность $\hat{\sigma}_{BS}$ в модели принимает вид $\hat{\sigma}_{BS}^2 = \sigma^2 \left(1 + Y\left(e^{r(T-t)} k^2 \gamma C x^2 u_{xx}\right)\right)$, где учитываются транзакционные издержки k, количество хеджируемых проданных опционов C и фактор неприятия риска γ. При этом Y — функция корректировки волатильности [7, теорема 3.1], которая удовлетворяет задаче Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{d}{df}[Y(f)] = \frac{Y(f) + 1}{2\sqrt{fY(f)} - f}, \quad Y(0) = 0.$$

Авторы показали, что полученное нелинейное уравнение Блэка — Шоулза является вырожденным параболическим уравнением и к нему применима теория вязкостных решений.

Другая модель, которая учитывает переменные транзакционные издержки при ребалансировке портфеля, представлена в работе [8]. Авторы, используя усреднённое значение функции транзакционных издержек («the mean value modification of the transaction costs function»)

$$\tilde{k}(\xi) = \int\limits_0^{\infty} k(\xi x) x e^{-x^2/2} dx,$$

получили выражение для модифицированной волатильности

$$\hat{\sigma}_{SZ}^2 = \sigma^2 \left(1 - \tilde{k}(\sigma x |u_{xx}| \sqrt{\Delta t}) \sqrt{2/\pi} \frac{\operatorname{sgn}(x u_{xx})}{\sigma \sqrt{\Delta t}}\right).$$

В работе [9] была обобщена и проанализирована модель ценообразования опционов с поправкой на риск («risk adjusted pricing methodology», RAPM). Модель учитывает риск изменения стоимости портфеля, возникающий при недостаточно частом пересмотре портфеля, и риск увеличения транзакционных издержек при частой ребалансировке. В этой модели функция волатильности имеет вид

$$\hat{\sigma}_{JS}^2 = \sigma^2 \left(1 - q\,(x u_{xx})^{\frac{1}{3}}\right), \tag{4}$$

где $q = 3\left(k^2 R/2\pi\right)^{\frac{1}{3}}$, $R \geq 0$ — показатель премии за риск («risk premium coefficient»). Он представляет собой предельную стоимость подверженности инвестора риску (другими словами, надбавка в цене, которую готов потерять инвестор в случае недостаточно частой ребалансировки).

В процессе построения модели авторы, минимизируя функцию общего риска, получили формулу для оценки оптимального интервала времени для последовательных ребалансировок портфеля в соответствии с дельта-хеджированием (формула (2.14) в [9]). Данный интервал времени минимизирует величину суммарного риска r_R:

$$\Delta t_{\mathrm{opt}} = \left(\frac{\sqrt{2\pi}\sigma^3 R}{k} \left| x u_{xx} \right| \right)^{-\frac{2}{3}}. \tag{5}$$

Отметим, что данная модель была в дальнейшем углублённо численно исследована в работе [10], а в работе [11] найдено семейство точных решений с использованием методов геометрического анализа.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы на примере модели RAPM [9] продемонстрировать возможный способ получения оптимального интервала выполнения ребалансировок портфеля при дельта-хеджировании опционов. С точки зрения практической опционной торговли знание данного интервала позволяет проводить дельта-хеджирование опционных портфелей программно, автоматически варьируя величину интервала между ребалансировками в зависимости от рыночных параметров.

1. Модель RAPM

1.1. Предварительные замечания

В данном разделе будут кратко представлены результаты обобщения и развития модели RAPM, сделанные в работе [9]. Первым шагом является исследование изменения величины портфеля за интервал времени Δt между пересмотрами портфеля. Как и в модели Блэка — Шоулза, рассматривается синтетический портфель из одного опциона с ценой u и базового актива с ценой x в количестве δ штук:

$$\Pi = u + \delta x. \tag{6}$$

Изменение такого портфеля можно представить в виде $\Delta\Pi = \Delta u + \delta \Delta x$. Изменение стоимости данного портфеля $\Delta\Pi$ также должно, в свою очередь, за рассматриваемый промежуток времени Δt составить $\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$, а с учётом общего риска $\Delta\Pi$ (транзакционные издержки здесь учитываются со знаком плюс, поскольку должны включаться в «альтернативную» стоимость портфеля) получается в виде $\Delta\Pi = r\Pi\Delta t + r_R x \Delta t$, где надбавка, или премия, на единицу стоимости базового актива за общий риск $r_R = r_{TC} + r_{VP}$ состоит из двух компонентов: премия за возникающие транзакционные издержки и премия за недостаточно точное хеджирование (поскольку оно проводится только в дискретные моменты времени, а не непрерывно, как в модели Блэка — Шоулза).

1.2. Премия за риск возрастания транзакционных издержек

Следующим шагом будет поиск каждой из перечисленных компонент возникающего общего риска. Найдём величину транзакционных издержек. Поскольку стоимость транзакции при пересмотре портфеля составляет

$$|\Delta\delta| \frac{x_{\mathrm{ask}} - x_{\mathrm{bid}}}{2} = \frac{1}{2} |\Delta\delta| x k,$$

то изменение портфеля при наличии транзакционных издержек

$$\Delta\Pi = \Delta u + \delta \Delta x - \frac{1}{2} |\Delta\delta| x k. \tag{7}$$

Рассматривается стратегия дельта-хеджирования, следовательно, $\delta = -u_x$. Имеем $\Delta(-u_x) = -u_{xx}\sigma x\Delta W$, так как $\Delta x = \sigma x\Delta W$ в силу формулы (2) при $\mu = 0$. Для ΔW авторы применили аппроксимацию Леланда: $|\Delta W| \approx \mathbb{E}\left[|\Delta W|\right] = \sqrt{2/\pi}\sqrt{\Delta t}$.

Найдём математическое ожидание $\mathbb{E}\left[|\Delta W|\right]$. Так как рассматривается винеровский процес, получим

$$f(y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma_{|\Delta W|}}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{|\Delta W|}}, \quad \sigma_{|\Delta W|} = \sqrt{\Delta t},$$

$$\mathbb{E}\left[|\Delta W|\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(y)dy = \frac{2\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\Delta t}} d\left(\frac{y^2}{2\Delta t}\right) = \sqrt{\frac{2\Delta t}{\pi}}.$$

Подставив все полученные выражения в (7), получим

$$\Delta\Pi = \Delta u + \delta\Delta x - \frac{1}{2}|\Delta\delta| xk = \Delta u + \delta\Delta x - \frac{1}{2} xk|u_{xx}|\sigma x\sqrt{\frac{2\Delta t}{\pi}} = \Delta u + \delta\Delta x - r_{TC} x\Delta t,$$

где

$$r_{TC} = \frac{kx\sigma|u_{xx}|}{\sqrt{2\pi\Delta t}}.$$

1.3. Премия за риск волатильности портфеля

В работе [9] авторы ввели премию за риск волатильности портфеля

$$r_{VP} = R\frac{\mathbb{D}\left[\Delta\Pi/x\right]}{\Delta t},$$

где R — коэффициент премии за риск, а $\mathbb{D}\left[\Pi\right] = \mathbb{E}\left[(\Pi - \mathbb{E}\left[\Pi\right])^2\right]$ представляет собой дисперсию приращений стоимости портфеля за интервал времени между ребалансировками. Применяя лемму Ито к стоимости портфеля (6) с учётом (2), получим

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left[\Pi_t + \mu x\Pi_x + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \Pi_{xx}\right] dt + \sigma x\Pi_x dW = \\ &= \left[\Pi_t + \mu x\Pi_x\right] dt + + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \Pi_{xx}(\Delta W)^2 + \sigma x\Pi_x dW = \\ &= \left[\Pi_t + \mu x(u_x + \delta)\right] dt + + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx}(\Delta W)^2 + \sigma x(u_x + \delta)dW = \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx}(\Delta W)^2 + \sigma x(u_x + \delta)dW + A, \end{aligned}$$

где присутствует детерминированное слагаемое $A = \left[\Pi_t + \mu x(u_x + \delta)\right] dt$, для которого $\mathbb{E}\left[A\right] = A$.

Чтобы найти дисперсию приращений портфеля, найдём сначала величину

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\Delta\Pi\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx}(\Delta W)^2 + \sigma x(u_x + \delta)dW + A\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx}(\Delta W)^2\right] + \mathbb{E}\left[\sigma x(u_x + \delta)dW\right] + A = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx}\Delta t + A, \end{aligned}$$

где учтено, что $\Delta W = \phi\sqrt{\Delta t}$, $\delta = -u_x$, $\mathbb{E}\left[\phi^2\right] = 1$, и ϕ — случайная переменная со стандартным нормальным распределением.

Теперь найдём дисперсию приращений портфеля:

$$\mathbb{D}\left[\Delta\Pi\right] = \mathbb{E}\left[(\Delta\Pi - \mathbb{E}\left[\Delta\Pi\right])^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx}(\Delta W)^2 + A - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx}\Delta t - A\right)^2\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx}\Delta t(\phi^2 - 1)\right)^2\right] = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx}\Delta t\right)^2 \mathbb{E}\left[\phi^4 - 2\phi^2 + 1\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx}\Delta t\right)^2 \left(\mathbb{E}\left[\phi^4\right] - 2\mathbb{E}\left[\phi^2\right] + 1\right).$$

С учётом общей формулы для моментов случайной величины со стандартным нормальным распределением ($\mathbb{E}\left[\phi^4\right] = 3$) получим следующую формулу для искомой дисперсии:

$$\mathbb{D}\left[\Delta\Pi\right] = \frac{1}{2}\sigma^4 x^4 u_{xx}^2 (\Delta t)^2,$$

и тогда формула для премии за риск волатильности портфеля принимает вид

$$r_{VP} = R\frac{\mathbb{D}\left[\Delta\Pi/x\right]}{\Delta t} = \frac{1}{2}R\sigma^4 x^2 u_{xx}^2 \Delta t.$$

1.4. Оптимальный интервал дельта-хеджирования

В работе [9] в рамках RAPM авторы получили следующие выражения для общей премии за риск:

$$r_R = r_{TC} + r_{VP} = \frac{k\sigma x}{\sqrt{2\pi}}\left|u_{xx}\right|\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} + \frac{1}{2}R\sigma^4 x^2 u_{xx}^2 \Delta t.$$

Первое слагаемое отвечает за рост транзакционных издержек при уменьшении интервала ребалансировки. Второе слагаемое отвечает за рост ошибки репликации при увеличении этого интервала. Отсюда легко найти значение оптимального интервала дельта-хеджирования, при котором, с одной стороны, минимизируются транзакционные издержки, а с другой стороны, минимизируется ошибка хеджирования опциона.

Найдём производную функции общей премии за риск относительно величины оптимального интервала и приравняем к нулю:

$$r_R' = \left(\frac{k\sigma x}{\sqrt{2\pi}}\left|u_{xx}\right|\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} + \frac{1}{2}R\sigma^4 x^2 u_{xx}^2 \Delta t\right)' = -\frac{1}{2}\frac{k\sigma x}{\sqrt{2\pi}}\left|u_{xx}\right|\frac{1}{(\sqrt{\Delta t})^3} + \frac{1}{2}R\sigma^4 x^2 u_{xx}^2 = 0,$$

откуда сразу получаем величину оптимального интервала для дельта-хеджирования (5), или немного в другой форме:

$$\Delta t_{\text{opt}} = \left(\frac{k}{\sqrt{2\pi}R\sigma^2 x|u_{xx}|}\right)^{2/3}. \tag{8}$$

2. Численное решение

2.1. Конечно-разностная схема

В целях проведения анализа оптимального интервала времени необходимо найти решения $u(x,t)$ для уравнения (1) в рамках RAPM [9] с модифицированной волатильностью (4).

В данной работе для построения численной схемы был использован подход, изложенный в [12]. Отметим кратко, что использовался двухслойный неявно-явный шеститочечный шаблон с весами, когда значения искомой функции u_n^{m+1} на $(m+1)$-м слое имеют вес ω, а значения с предыдущего m-го слоя учитываются с весом $1-\omega$.

Чтобы найти приближённое решение $u(x,t)$, были использованы следующие разностные представления:

$$u \sim \theta u_n^{m+1} + (1-\theta)\, u_n^m, \quad u_t \sim \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\tau},$$
$$u_x \sim \theta \frac{u_{n+1}^{m+1} - u_n^{m+1}}{h} + (1-\theta)\frac{u_{n+1}^m - u_n^m}{h},$$
$$u_{xx} \sim \theta \frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{h^2} + (1-\theta)\frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2},$$

где τ обозначает шаг по времени t, а h соответствует постоянному шагу по координате x.

Подставляя соответствующие представления в уравнение (1), получаем систему линейных уравнений

$$a_n u_{n-1}^{m+1} - b_n u_n^{m+1} + c_n u_{n+1}^{m+1} = d_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1, \quad m = 1, 2, \ldots, M-1,$$

где

$$a_n = -\frac{1}{2}\theta \left(\hat{\sigma}_n^m\right)^2 n^2 h^2, \quad c_n = a_n - \theta r n,$$
$$b_n = -\left[\frac{1}{\tau} + \theta \left(\hat{\sigma}_n^m\right)^2 n^2 h^2 + \theta r n + r\theta\right],$$
$$d_n = \frac{1}{\tau} u_n^m + (1-\theta)\left(\hat{\sigma}_n^m\right)^2 n^2 h^2 \left(u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m\right) -$$
$$-r\,(1-\theta)\, u_n^m + r(1-\theta) n \left(u_{n+1}^m - u_n^m\right),$$
$$\left(\hat{\sigma}_n^m\right)^2 = \sigma^2 \left(1 - q\left(n\left(u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m\right)/h\right)^{1/3}\right),$$

$\hat{\sigma}_n^m$ соответствует модифицированной волатильности (4). Применяется метод прогонки, поскольку условие преобладания диагональных элементов выполняется: $|b_n| \geq |a_n| + |c_n|$.

2.2. Параметры численной схемы

Авторы [9] использовали для расчётов значение $q = 3\left(k^2 R/2\pi\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0.2$. Для расчётов в данной работе также использовано значение $q = 0.2$, а показатель R находится из значения q для заданной величины транзакционных издержек (в данной работе было принято $k = 0.002$) как $R = 2\pi q^3/27k^2 \approx 465.42$. Чтобы расчёты были приближены к практическим величинам, использовались следующие параметры:

волатильность $\sigma = 0.3$;

шаг изменения волатильности $\Delta\sigma = 0.01$;

страйк-цена $K = 0.4$;

количество узлов по цене базового актива x: $N = 200$;

шаг изменения цены базового актива $h = 1/N = 0.005$;

вес «верхнего» слоя в шаблоне $\omega = 0.9$.

Также полагаем, что безрисковая процентная ставка $r = 0$, что соответствует ситуации с маржируемыми опционами на фьючерсы (см. замечание 1).

2.3. Пример

Продемонстрируем полученные результаты на примере комбинации опционов, сформированной как «short straddle». Она заключается в одновременной продаже опциона колл и пут с одним страйком и одной датой экспирации. Цены приобретения и продажи опционов для формирования портфеля для определённости принимаем соответствующими модели Блэка — Шоулза.

Определим граничные и финальное условия для комбинации опционов, которые соответствуют сумме условий для каждого опциона. С учётом того, что:

$$\begin{aligned} &\text{short put:} \quad u(0,t) = (-K + p_1)e^{-r(T-t)}, \quad \lim_{x\to\infty} u(x,t) = +p_1 e^{-r(T-t)}, \\ &\qquad u(x,T) = -\max\{K - x, 0\} + p_1, \\ &\text{short call:} \quad u(0,t) = +p_2 e^{-r(T-t)}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{u(x,t)}{x - (K + p_2)e^{-r(T-t)}} = -1, \\ &\qquad u(x,T) = -\max\{x - K, 0\} + p_2, \end{aligned}$$

получаем, считая $r = 0$:

$$\begin{aligned} &\text{short straddle:} \quad u(0,t) = p_1 + p_2 - K, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{u(x,t)}{x - (K + p_1 + p_2)} = -1, \\ &\qquad u(x,T) = -|x - K| + p_1 + p_2, \end{aligned}$$

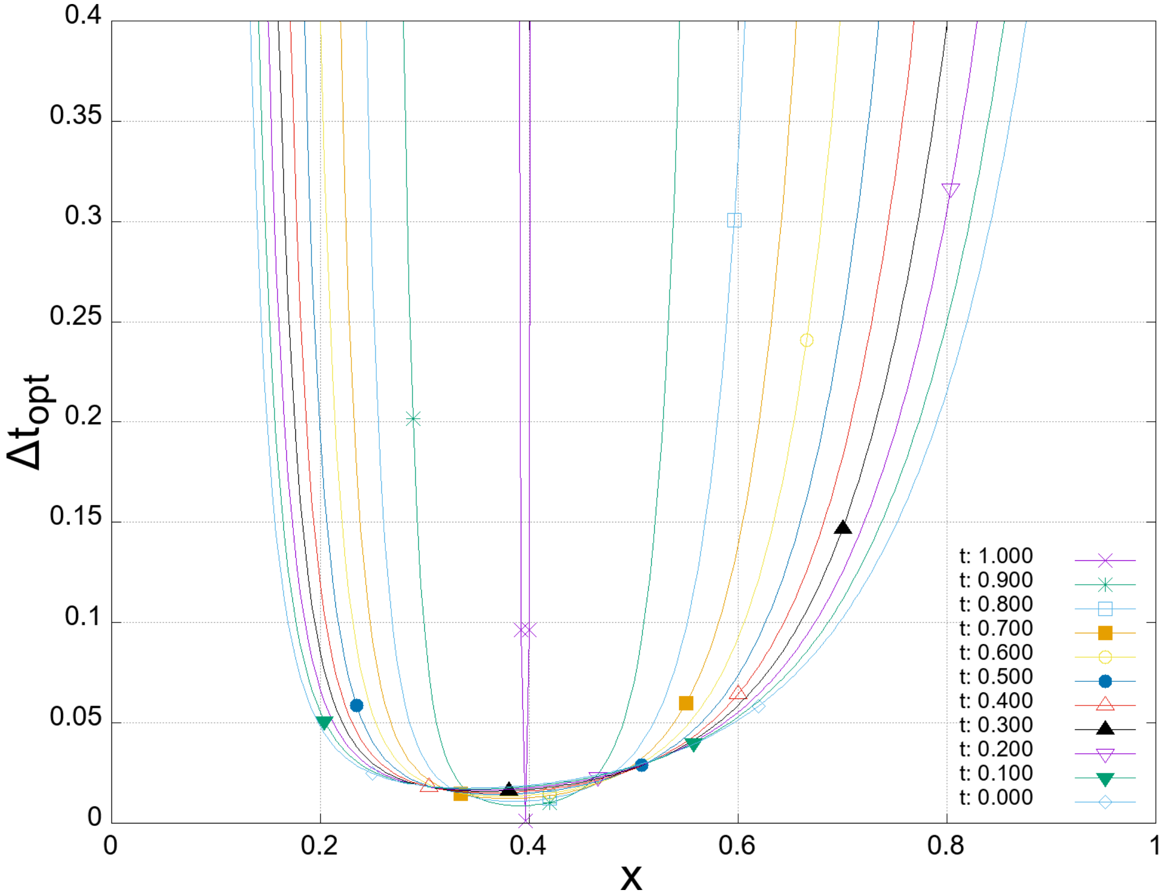
где p_1 и p_2 являются ценами продажи соответствующих опционов при формировании комбинации.

На рисунке представлен оптимальный интервал, полученный для RAPM. Видно, что интервал Δt_{opt} уменьшается по мере приближения времени экспирации комбинации или при приближении цены базового актива к цене страйк-опционов. В случае, когда при экспирации базовый актив будет торговаться около цены страйк, может потребоваться частое рехеджирование, поскольку $\Delta t_{\text{opt}} \to 0$. В работе [9, §2.6] предложено использовать время остановки хеджирования («switching time») t_*, после которого ребалансировки портфеля уже не производятся.

Заключение

На примере модели RAPM продемонстрирован вариант расчёта оптимального интервала для выполнения хеджирования портфеля. Найдено приближённое решение уравнения с модифицированной волатильностью, учитывающей риск увеличения транзакционных издержек при частом пересмотре портфеля, а также риск получения убытков из-за редкого пересмотра. Построен график, показывающий динамику этого интервала в течение жизни опциона.

Порядок применения полученного оптимального интервала ребалансировки может быть следующим. Трейдер, желая хеджировать свой портфель опционов, может отсчитывать время от последнего пересмотра портфеля и сравнивать его с интервалом, определяемым формулой (5) или (8). И если рассчитанный интервал оказался меньше времени, прошедшего после предыдущего пересмотра, то трейдер, докупая или продавая базовый актив в соответствии со стратегией дельта-хеджирования, может произвести ребалансировку портфеля. Данный метод может быть использован в автоматических системах выставления ордеров в торговую систему.



Оптимальный интервал времени Δt_{opt} для хеджирования комбинации «short straddle» в рамках модели RAPM

Список литературы

1. **Black, F.** The pricing of options and corporate liabilities / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy. — 1973. — Vol. 81, no. 3. — P. 637–654.
2. **Merton, R. C.** Theory of rational option pricing / R. C. Merton // The Bell Journal of Economics and Management Science. — 1973. — Vol. 4, no. 1. — P. 141–183.
3. **Cox, J. C.** Option pricing: a simplified approach / J. C. Cox, S. A. Ross, M. Rubinstein // Journal of Financial Economics. — 1979. — Vol. 7, no. 3. — P. 229–263.
4. **Leland, H. E.** Option pricing and replication with transactions costs / H. E. Leland // The Journal of Finance. — 1985. — Vol. 40, no. 5. — P. 1283–1301.
5. **Kabanov, Y. M.** On Leland's strategy of option pricing with transactions costs / Y. M. Kabanov, M. M. Safarian // Finance and Stochastics. — 1997. — Vol. 1, no. 3. — P. 239–250.
6. **Kabanov, Y. M.** Markets with transaction costs. Mathematical theory / Y. M. Kabanov, M. M. Safarian. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2010.
7. **Barles, G.** Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black — Scholes equation / G. Barles, H. M. Soner // Finance and Stochastics. — 1998. — Vol. 2, no. 4. — P. 369–397.
8. **Ševčovič, D.** Analysis of the nonlinear option pricing model under variable transaction costs / D. Ševčovič, M. Žitňanská // Financial Markets. — 2016. — Vol. 23, no. 2. — P. 153–174.

9. **Jandačka, M.** On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile / M. Jandačka, D. Ševčovič // Journal of Applied Mathematics. — 2005. — Vol. 2005, no. 3. — P. 235–258.
10. **Ankudinova, J.** On the numerical solution of nonlinear Black — Scholes equations / J. Ankudinova, M. Ehrhardt // Computers & Mathematics with Applications. — 2008. — Vol. 56, no. 3. — P. 799–812.
11. **Bordag, L. A.** Study of the risk-adjusted pricing methodology model with methods of geometrical analysis / L. A. Bordag // Stochastics. — 2011. — Vol. 83, no. 4–6. — P. 333–345.
12. **Dyshaev, M. M.** Comparing of some sensitivities (Greeks) for nonlinear models of option pricing with market illiquidity / M. M. Dyshaev, V. E. Fedorov // Mathematical Notes of NEFU. — 2019. — Vol. 26, no. 2. — P. 94–108.

Поступила в редакцию 29.09.2019
После переработки 25.10.2019

Сведения об авторе

Дышаев Михаил Михайлович, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Научно-исследовательского сектора, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: Mikhail.Dyshaev@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2019. Vol. 4, iss. 4. P. 375–386.

DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14401

ACCOUNTING OF TRANSACTION COSTS FOR DELTA-HEDGING OF OPTIONS

M.M. Dyshaev

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
Mikhail.Dyshaev@gmail.com

Some pricing models of options with modified volatility are considered. These models allow to take into account the presence of transaction costs during delta-hedging. Modified volatility formulas for each model are given. Usually, the value of transaction costs depends on the frequency and volume of hedging transactions. Using an example of risk adjusted pricing methodology (RAPM), a possible algorithm for obtaining the value of the optimal rebalancing interval is demonstrated. The numerical solution of the nonlinear equation with a modified volatility from the RAPM model is found. As a practical example, the dependence of the optimal delta-hedging interval on the price of the underlying asset and the time remaining until the exercise of the option is constructed. For the practical using of the optimal interval of the rebalancing some recommendations are made.

Keywords: *Black — Scholes model, transaction costs, RAPM, delta hedging.*

References

1. **Black F., Scholes M.** The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 1973, vol. 81, no. 3, pp. 637–654.
2. **Merton R.C.** Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 1973, vol. 4, no. 1, pp. 141–183.
3. **Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M.** Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 1979, vol. 7, no. 3, pp. 229–263.
4. **Leland H.E.** Option pricing and replication with transactions costs. *The Journal of Finance*, 1985, vol. 40, no. 5, pp. 1283–1301.
5. **Kabanov Y.M., Safarian M.M.** On Leland's strategy of option pricing with transactions costs. *Finance and Stochastics*, 1997, vol. 1, no. 3, pp. 239–250.
6. **Kabanov Y.M., Safarian M.M.** *Markets with transaction costs. Mathematical theory.* Berlin, Heidelberg, Springer Finance, 2010.
7. **Barles G., Soner H.M.** Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation. *Finance and Stochastics*, 1998, vol. 2, no. 4, pp. 369–397.
8. **Ševčovič D., Žitňanská M.** Analysis of the nonlinear option pricing model under variable transaction costs. *Financial Markets*, 2016, vol. 23, no. 2, pp. 153–174.
9. **Jandačka M., Ševčovič D.** On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile. *Journal of Applied Mathematics*, 2005, vol. 2005, no. 3, pp. 235–258.
10. **Ankudinova J., Ehrhardt M.** On the numerical solution of nonlinear Black-Scholes equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 2008, vol. 56, no. 3, pp. 799–812.

The work is supported by the Russian Foundation of Basic Research, grant 19-01-00244.

11. **Bordag L.A.** Study of the risk-adjusted pricing methodology model with methods of geometrical analysis. *Stochastics*, 2011, vol. 83, no. 4–6, pp. 333–345.
12. **Dyshaev M.M., Fedorov V.E.** Comparing of some sensitivities (Greeks) for nonlinear models of option pricing with market illiquidity. *Mathematical notes of NEFU*, 2019, vol. 26, no. 2, pp. 94–108.

Article received 29.09.2019
Corrections received 25.10.2019