

## О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ, АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ОДНУ КРАЕВУЮ ЗАДАЧУ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

А. С. Сушков

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия  
mesocyclon@yandex.ru

Сложность в применении дифференциальных задач на практике заключается в основном в невозможности получения их решений в аналитическом виде, что делает актуальным разработку численных методов. В данной работе построена одна неявная разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу гиперболического типа с однородными граничными условиями. Найден порядок аппроксимации разностной схемы. Особое внимание уделено доказательству устойчивости и сходимости. При доказательстве использован подход, аналогичный методу разделения переменных в математической физике. Автором найдено условие сходимости, накладываемое на параметры разностной схемы. Проведён численный эксперимент. Разработана программа, позволяющая находить и визуализировать приближённое решение.

**Ключевые слова:** уравнение гиперболического типа, краевая задача, неявная разностная схема, аппроксимация, устойчивость разностной схемы, сходимость разностной схемы.

### Введение

При математической формулировке многих технических задач возникают системы линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, точное решение которых часто невозможно получить в аналитическом виде. В этом случае необходимо переходить к численным методам, позволяющим найти приближённое решение дифференциальной задачи в виде таблицы чисел, на основе которой можно получить количественные характеристики процесса, выбрать оптимальные параметры, т. е., в конечном счёте, получить достаточно полное представление относительно изучаемого физического процесса.

Для того чтобы построить упомянутое приближённое решение, необходимо прежде всего заменить исходную дифференциальную задачу, то есть основное уравнение и соответствующие начальные и граничные условия, некоторой конечномерной задачей, обычно представляющей собой явную или неявную разностную схему. Также необходимо обосновать сходимость приближённого решения разностной задачи к точному решению дифференциальной задачи.

Стоит также отметить, что некоторые краевые задачи могут быть использованы как вспомогательные к решению других задач. Гиперболическое уравнение, рассмотренное в данной статье, может быть использовано при решении двумерной граничной обратной задачи теплопроводности методом квазиобращения [1]. В работе [1] для данного случая приведена оценка на параметр  $\varepsilon$ , где он определён как постоянная времени.

Заметим, что рассматриваемая в данной работе задача при  $\varepsilon = 1$  может описывать колебания круглой мембраны в среде, оказывающей сопротивление, пропорциональное скорости [2].

В [3] аппроксимация была проведена явной разностной схемой, для вычисления по которой требуется много машинного времени. В данной работе для аппроксимации была использована неявная разностная схема, представляющая собой систему линейных алгебраических уравнений с невырожденной трёхдиагональной квадратной матрицей, имеющей диагональное преобладание, которая может быть решена методом прогонки [4], вследствие чего время вычислений значительно сокращается.

Разработана программа, позволяющая находить и визуализировать приближённое решение исследуемой задачи.

## 1. Постановка задачи и разностная схема

В области  $Q = (0, 1) \times (0, T)$  рассматривается следующая краевая задача с однородными граничными условиями для уравнения гиперболического типа:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0; \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

При заданной функции  $f(x) \in C[0, 1]$  ищется такое решение  $u(x, t) \in C([0, 1] \times [0, T])$  задачи, что  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in C((0, 1) \times (0, T))$ .

Перейдём к построению разностной схемы на равномерной сетке в прямоугольной области  $Q = (0, 1) \times (0, T)$ . Разобьём отрезок пространственной переменной  $[0, 1]$  на части с шагом  $h = 1/M$ , определив тем самым точки  $x_m = mh$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ . Аналогичным образом разобьём временной отрезок  $[0, T]$  на части с шагом  $\tau > 0$ , получив точки разбиения  $t_n = n\tau$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Полученные точки разбиения формируют узлы  $(x_m, t_n)$ , множество которых представляет собой сетку  $\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_m, t_n) \in \bar{Q}\}$ . На сетке  $\bar{\omega}_{h\tau}$  определим сеточную функцию  $u(x_m, t_n) = u_m^n$ ,  $(x_m, t_n) \in \bar{\omega}_{h\tau}$ .

Запишем задачу (1)–(3) в операторной форме  $Lu = F$ , где

$$Lu = \begin{cases} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ 0 < t < T, 0 < x < 1; \\ u(x, 0), 0 \leq x \leq 1; \\ u_t(x, 0), 0 \leq x \leq 1; \\ u(0, t), 0 \leq t \leq T; \\ u(1, t), 0 \leq t \leq T; \end{cases} \quad F = \begin{cases} 0, 0 < t < T, 0 < x < 1; \\ 0, 0 \leq x \leq 1; \\ f(x), 0 \leq x \leq 1; \\ 0, 0 \leq t \leq T; \\ 0, 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

В разностных производных задача (1)–(3) имеет вид уравнения

$$\varepsilon \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\tau^2} + \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{1}{x_m} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h}, \quad (4)$$

где  $m = 1, 2, \dots, M - 1$ ,  $n = 1, 2, \dots, N - 1$ , с граничными условиями

$$u_0^n = u_M^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (5)$$

и начальными условиями

$$u_m^0 = 0, \quad \frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} = f_m \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (6)$$

## 2. Исследование аппроксимации разностной схемы

Невязкой метода (4)–(6) назовём сеточную функцию  $\delta f^{(h)} = L_h[u]_h - f^{(h)}$ , где  $[u]_h$  — точное решение задачи (1)–(3) в узлах сетки,  $f^{(h)}$  — приближённое решение разностной схемы (4),  $L_h$  — разностная аппроксимация оператора  $L$ . В нашем случае невязка примет вид

$$\delta f^{(h)} = \begin{cases} \varepsilon \frac{u(x_m, t_{n+1}) - 2u(x_m, t_n) + u(x_m, t_{n-1}))}{\tau^2} + \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{\tau} - \\ - \frac{u(x_{m+1}, t_{n+1}) - 2u(x_m, t_{n+1}) + u(x_{m-1}, t_{n+1}))}{h^2} \\ - \frac{1}{x_m} \frac{u(x_{m+1}, t_{n+1}) - u(x_{m-1}, t_{n+1}))}{2h}, \quad m = 1, 2, \dots, M-1, n = 1, \dots, N-1, \\ u(x_m, t_0), \quad m = 0, 1, \dots, M, \\ \frac{u(x_m, t_1) - u(x_m, t_0)}{\tau} - f(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, M, \\ u(x_0, t_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ u(x_M, t_n), \quad n = 0, 1, \dots, N. \end{cases}$$

Будем говорить, что разностная схема (4) аппроксимирует задачу (1)–(3) с порядком  $l$ , если существует такая константа  $C$ , не зависящая от  $h$ , что  $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq Ch^l$ , и при этом  $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ , где  $F_h$  — линейное нормированное пространство функций  $f^{(h)}$  с нормой  $\|\cdot\|_{F_h}$ .

**Лемма 1.** Пусть точное решение  $u(x, t)$  задачи (1)–(3) таково, что функция  $u(x, t)$  трижды непрерывно дифференцируема по  $t$  и четырежды непрерывно дифференцируема по  $x$ . Тогда разностная схема (4) аппроксимирует задачу (1)–(3) с первым порядком по времени и со вторым по координате.

*Доказательство.* Пользуясь разложением функции  $u(x, t)$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $(x_m, t_{n+1})$ , получаем

$$\delta f^{(h)} = \begin{cases} -\varepsilon\tau \frac{\partial^3 u(x_m, \tilde{t})}{\partial t^3} + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u(x_m, \tilde{t})}{\partial t^3} - \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_m, \tilde{t})}{\partial t^2} - \\ - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(\tilde{x}, t_{n+1})}{\partial x^4} - M \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u(\tilde{x}, t_{n+1})}{\partial x^3}, \quad \tilde{t} \in [t_{n-1}, t_{n+1}], \tilde{x} \in [x_{n-1}, x_{n+1}]; \\ 0; \\ \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_m, \tilde{t}_3)}{\partial t^2}; \\ 0; \\ 0. \end{cases}$$

Для

$$f^{(h)} = \begin{cases} f_1(x_m, t_n), \quad m = 1, 2, \dots, M-1, n = 1, 2, \dots, N-1; \\ f_2(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, M; \\ f_3(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, M; \\ f_4(t_n), \quad n = 0, 1, \dots, N; \\ f_5(t_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \end{cases}$$

введём норму

$$\|f^{(h)}\|_{F_h} = \max_{m,n} |f_1(x_m, t_n)| + \max_m |f_2(x_m)| + \max_m |f_3(x_m)| + \max_n |f_4(t_n)| + \max_n |f_5(t_n)|.$$

Если

$$\left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right| \leq M_t^{(3)}, \quad \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right| \leq M_x^{(4)}, \quad \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right| \leq M_x^{(3)}, \quad \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right| \leq M_t^{(2)} \quad \forall (x, t) \in \bar{Q},$$

то

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq \varepsilon \tau M_t^{(3)} + \frac{\tau^2}{6} M_t^{(3)} + \frac{h^2}{12} M_x^{(4)} + M \frac{h^2}{6} M_x^{(3)} + \frac{\tau}{2} M_t^{(2)} + \frac{\tau^2}{2} M_t^{(2)}.$$

Отсюда следует, что при  $\tau, h \rightarrow 0$  имеем  $\delta f^{(h)} \rightarrow 0$ . В итоге получаем, что порядок аппроксимации задачи (4)–(6) равен  $O(\tau + h^2)$ .  $\square$

### 3. Исследование разностной схемы на устойчивость

Существование и единственность решения разностной задачи (4)–(6) следуют из того, что она представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с невырожденной трёхдиагональной квадратной матрицей, имеющей диагональное преобладание.

**Теорема 1.** Пусть для параметров разностной задачи (4)–(6) выполнены неравенства  $h^2 \leq 16\varepsilon$ ,  $h > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ . Тогда решение задачи (4)–(6)  $u(x_m, t_n) \in \bar{\omega}_{h\tau}$  при  $\tau, h \rightarrow 0$  сходится к точному решению  $u(x, t)$  задачи (1)–(3).

*Доказательство.* Обозначим через  $U_h$  линейное нормированное пространство функций  $u^{(h)}$  с нормой  $\|\cdot\|_{U_h}$ . Для устойчивости (4) необходимо доказать неравенство  $\|u^{(h)}\|_{U_h} \leq C_1 \|f^{(h)}\|_{F_h}$  при некотором выборе норм. Перепишем начальные условия (6) в виде  $u_m^0 = 0$ ,  $u_m^1 = \tau f_m$  или же  $u^0(x) = 0$ ,  $u^1(x) = \tau f(x)$ , где  $x \in \bar{\omega}_h$ .

Воспользуемся принципом замороженных коэффициентов [5], выбирая на сетке произвольную точку  $\tilde{x} \in \bar{\omega}_h : 0 \leq \tilde{x} \leq 1$ . Решение (4)–(6) будем искать в виде  $u_m^n = X_m T_n \neq 0$ , подставляя его в (4), имеем

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{X_m T_{n+1} - 2X_m T_n + X_m T_{n-1}}{\tau^2} + \frac{X_m T_{n+1} - X_m T_n}{\tau} = \\ & = \frac{X_{m+1} T_{n+1} - 2X_m T_n + X_{m-1} T_{n+1}}{h^2} + \frac{1}{\tilde{x}} \frac{X_{m+1} T_{n+1} - X_{m-1} T_{n+1}}{2h}. \end{aligned}$$

Разделяя обе части равенства на  $X_m T_{n+1}$ , получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{T_{n+1} - 2T_n + T_{n-1}}{\tau^2 T_{n+1}} + \frac{T_{n+1} - T_n}{\tau T_{n+1}} = \\ & = \frac{X_{m+1} - 2X_m + X_{m-1}}{h^2 X_m} + \frac{1}{\tilde{x}} \frac{X_{m+1} - X_{m-1}}{2h X_m} = -\lambda. \end{aligned} \quad (7)$$

Принимая во внимание условия (5), для нахождения  $X_m$  воспользуемся вспомогательной краевой задачей

$$\begin{aligned} & (2\tilde{x} + h) X_{m+1} + (2\lambda h^2 \tilde{x} - 4\tilde{x}) X_m + (2\tilde{x} - h) X_{m-1} = 0; \\ & X_0 = X_M = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Частные решения ищем в виде  $X_m = q^m$ . После подстановки в уравнение (8) получим  $(2\tilde{x} + h) q^2 + (2\lambda h^2 \tilde{x} - 4\tilde{x}) q + (2\tilde{x} - h) = 0$ . Дискриминант этого квадратного уравнения есть  $D = 4\lambda^2 h^4 \tilde{x}^2 + 4h^2 - 16\lambda h^2 \tilde{x}^2$ . Пусть  $D < 0$ , тогда

$$q_{1,2} = \frac{-(2\lambda h^2 \tilde{x} - 4\tilde{x}) \pm 2i \sqrt{-\lambda^2 h^4 \tilde{x}^2 - h^2 + 4\lambda h^2 \tilde{x}^2}}{2(2\tilde{x} + h)}.$$

Общее решение (8) имеет вид  $X_m = c_1 q_1^m + c_2 q_2^m$ . Имеем  $\phi = \arg q_1$ ,

$$\sin \phi = \frac{\sqrt{-\lambda^2 h^4 \tilde{x}^2 - h^2 + 4\lambda h^2 \tilde{x}^2}}{\sqrt{2\tilde{x} - h}\sqrt{2\tilde{x} + h}}, \quad \cos \phi = \frac{2\tilde{x} - \lambda h^2 \tilde{x}}{\sqrt{2\tilde{x} - h}\sqrt{2\tilde{x} + h}}, \quad |q_{1,2}| = \sqrt{\frac{2\tilde{x} - h}{2\tilde{x} + h}},$$

$$q_1^m = |q_1|^m (\cos m\phi + i \sin m\phi), \quad q_2^m = |q_2|^m (\cos m\phi - i \sin m\phi).$$

Таким образом,  $X_m = \bar{c}_1 \cos m\phi + \bar{c}_2 \sin m\phi$ . В силу граничных условий в (8) получаем  $\bar{c}_1 = 0$ ,  $\bar{c}_2 \sin M\phi = 0$ . Поскольку  $X_m \neq 0$ , то  $\bar{c}_2 \neq 0$ ,  $\sin M\phi = 0$ , откуда  $M\phi = \pi k$ ,  $k = 1, \dots, M-1$ . В итоге  $\phi_k = \pi k/M = \pi kh$ . Поскольку  $\bar{c}_2 \neq 0$  произвольно, то для простоты запишем  $X_m^{(k)} = \sin m\pi kh$ .

Обозначая  $x = mh$ , можно принять  $X^{(k)}(x) = \sin \pi kx \in H$ , где  $H$  — гильбертово пространство размерности  $M-1$ , и при всех  $u, v \in H$   $(u, v) = \sum_{i=1}^{M-1} u_i v_i h$ . Поэтому система функций  $X^{(k)}(x)$  является в пространстве  $H$  ортогональной (см. [6]), причём  $\|X^{(k)}\|_H = 1/\sqrt{2}$ , поэтому система функций  $X^{(k)}(x) = \sqrt{2} \sin \pi kx$  в  $H$  является ортонормированной и образует базис.

Заметим, что при  $D \geq 0$  задача (8) имеет лишь тривиальное решение.

Найдём собственные значения  $\lambda_k$ , используя равенство

$$\sin^2 \pi kh = \frac{-\lambda^2 h^4 \tilde{x}^2 - h^2 + 4\lambda h^2 \tilde{x}^2}{(2\tilde{x} - h)(2\tilde{x} + h)},$$

которое можно переписать в виде квадратного уравнения

$$\lambda_k^2 h^4 \tilde{x}^2 - 4\lambda_k h^2 \tilde{x}^2 + h^2 + (2\tilde{x} + h)(2\tilde{x} - h) \sin^2 \pi kh = 0.$$

Принимая во внимание, что  $2\tilde{x} > h$ , получим  $D = 4\tilde{x}^2 h^4 (4\tilde{x}^2 - h^2) \cos^2 \pi kh \geq 0$  и, кроме того, по теореме Виета

$$\lambda_k = \frac{2\tilde{x} - \sqrt{4\tilde{x}^2 - h^2} \cos \pi kh}{\tilde{x} h^2} > 0.$$

Решение разностной схемы (4) представимо в виде ряда Фурье по системе  $X^{(k)}(x) = \sqrt{2} \sin \pi kx$  в форме

$$u^n(x) = \sum_{k=1}^{M-1} T_n^{(k)} X^{(k)}(x).$$

Для нахождения  $T_n^{(k)}$ , используя (7), запишем разностное уравнение второго порядка  $(\varepsilon + \tau + \tau^2 \lambda_k) T_{n+1}^{(k)} - (2\varepsilon + \tau) T_n^{(k)} + \varepsilon T_{n-1}^{(k)} = 0$ . Его общее решение будет иметь вид  $T_n^{(k)} = d_1^{(k)} q_1^n + d_2^{(k)} q_2^n$ .

Частное решение этого уравнения будем искать с помощью подстановки  $T_n^{(k)} = q^n$ , которая приводит к квадратному уравнению  $(\varepsilon + \tau + \tau^2 \lambda_k) q^2 - (2\varepsilon + \tau) q + \varepsilon = 0$ , откуда получаем

$$q_{1,2} = \frac{2\varepsilon + \tau \pm \tau \sqrt{1 - 4\lambda_k \varepsilon}}{2(\varepsilon + \tau + \tau^2 \lambda_k)} = \frac{2\varepsilon + \tau \pm i\tau \sqrt{4\lambda_k \varepsilon - 1}}{2(\varepsilon + \tau + \tau^2 \lambda_k)}.$$

Как и раньше, аналогичным образом находим, что

$$|q_{1,2}| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \tau + \tau^2 \lambda_k}}, \quad \psi = \arg q_1, \quad \sin \psi = \frac{\tau \sqrt{\varepsilon \sqrt{4\lambda_k \varepsilon - 1}}}{\sqrt{\varepsilon + \tau + \tau^2 \lambda_k}}, \quad \cos \psi = \frac{(2\varepsilon + \tau) \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon + \tau + \tau^2 \lambda_k}},$$

$q_1^n = |q_1|^n (\cos n\psi + i \sin n\psi)$ ,  $q_2^n = |q_2|^n (\cos n\psi - i \sin n\psi)$ . При этом  $T_n^{(k)} = \bar{d}_1^{(k)} \cos n\psi_k + \bar{d}_2^{(k)} \sin n\psi_k$ .

Поскольку  $u^0(x) = \sum_{k=1}^{M-1} T_0^{(k)} X^{(k)}(x)$ , то  $T_0^{(k)}$  — коэффициенты Фурье разложения  $u^0(x) = 0$  по системе собственных функций  $X^{(k)}(x)$ , откуда  $T_0^{(k)} = 0$ , поэтому  $\bar{d}_1^{(k)} = 0$ .

Аналогично, для  $u^1(x) = \sum_{k=1}^{M-1} T_1^{(k)} X^{(k)}(x) = \tau f(x)$  коэффициенты Фурье

$$T_1^{(k)} = (\tau f(x), X^{(k)}(x)) = \tau (f(x), X^{(k)}(x)) = \tau \tilde{f}^{(k)}.$$

Поэтому

$$\bar{d}_2^{(k)} = \frac{\tau \tilde{f}^{(k)}}{\sin \psi_k} = \frac{\tilde{f}^{(k)} \sqrt{\varepsilon + \tau + \tau^2 \lambda_k}}{\sqrt{\varepsilon} \sqrt{4\lambda_k \varepsilon - 1}}, \quad T_n^{(k)} = \frac{\tilde{f}^{(k)} \sqrt{\varepsilon + \tau + \tau^2 \lambda_k}}{\sqrt{\varepsilon} \sqrt{4\lambda_k \varepsilon - 1}} \sin n\psi_k.$$

В итоге решение разностной схемы имеет вид

$$u^n(x) = \sum_{k=1}^{M-1} \frac{\tilde{f}^{(k)} \sqrt{\varepsilon + \tau + \tau^2 \lambda_k}}{\sqrt{\varepsilon} \sqrt{4\lambda_k \varepsilon - 1}} \sin n\psi_k X^{(k)}(x).$$

Поскольку  $u^n(x)$  представлена рядом Фурье по ортонормированной системе собственных функций, то в  $\|\cdot\|_H = \|\cdot\|$  имеет место равенство Парсеваля

$$\|u^n\|^2 = \sum_{k=1}^{M-1} \frac{\left(\tilde{f}^{(k)}\right)^2 (\varepsilon + \tau + \tau^2 \lambda_k)}{\varepsilon (4\lambda_k \varepsilon - 1)} \sin^2 n\psi_k \leq \sum_{k=1}^{M-1} \frac{\left(\tilde{f}^{(k)}\right)^2 (\varepsilon + \tau + \tau^2 \lambda_k)}{\varepsilon (4\lambda_k \varepsilon - 1)}.$$

Верно, что  $2\tilde{x} \geq \sqrt{(2\tilde{x} + h)(2\tilde{x} - h)}$ , поэтому

$$\lambda_k = \frac{2\tilde{x} - \sqrt{4\tilde{x}^2 - h^2} \cos \pi kh}{\tilde{x} h^2} \geq \frac{2\sqrt{4\tilde{x}^2 - h^2}}{\tilde{x} h^2} \sin^2 \frac{\pi kh}{2}.$$

Обозначая

$$\bar{\lambda}_k = \frac{2}{h^2} \sin^2 \frac{\pi kh}{2},$$

имеем, что

$$\|u^n\|^2 \leq \sum_{k=1}^{M-1} \frac{\left(\tilde{f}^{(k)}\right)^2 (\varepsilon + \tau + \tau^2 \lambda_k)}{\varepsilon \lambda_k \left(4\varepsilon - \frac{1}{\lambda_k}\right)} = \sum_{k=1}^{M-1} \frac{\left(\tilde{f}^{(k)}\right)^2 \tilde{x} \lambda_k (\varepsilon + \tau + \tau^2 \lambda_k)}{\varepsilon \bar{\lambda}_k \sqrt{4\tilde{x}^2 - h^2} (4\varepsilon \lambda_k - 1)}.$$

Поскольку  $\lambda_k > 0$ , то

$$\lambda_k = |\lambda_k| \leq \frac{2\tilde{x} - \sqrt{4\tilde{x}^2 - h^2} \cos \pi kh}{\tilde{x} h^2} \leq \frac{4}{h^2},$$

откуда следует, что

$$\|u^n\|^2 \leq \sum_{k=1}^{M-1} \frac{\left(\tilde{f}^{(k)}\right)^2}{\bar{\lambda}_k} \frac{\tilde{x} \frac{4}{h^2} (\varepsilon + \tau + \tau^2 \frac{4}{h^2})}{\varepsilon \sqrt{4\tilde{x}^2 - h^2} (4\varepsilon \frac{4}{h^2} - 1)}.$$

После преобразований получаем

$$\|u^n\|^2 \leq \left( \frac{4\tilde{x} (\varepsilon h^2 + \tau h^2 + 4\tau^2)}{h^2 \varepsilon \sqrt{4\tilde{x}^2 - h^2} (16\varepsilon - h^2)} \right) \sum_{k=1}^{M-1} \frac{\left(\tilde{f}^{(k)}\right)^2}{\bar{\lambda}_k}.$$

Здесь сумма

$$\sum_{k=1}^{M-1} \frac{\left(\tilde{f}^{(k)}\right)^2}{\bar{\lambda}_k}$$

задаёт норму, которая определяется следующим образом (см. [7]). Пусть  $v(x) = v_m : v_0 = v_M = 0$  — сеточная функция на  $\bar{\omega}_h$ , и

$$\Lambda v = \frac{v_{m+1} - 2v_m + v_{m-1}}{h^2}.$$

Тогда  $Av = -\Lambda v$  — линейный ограниченный положительно определённый самосопряжённый сеточный оператор [8], который имеет обратный. Определим норму  $\|v\|_{A^{-1}} = \sqrt{(A^{-1}v(x), v(x))}$ . Краевая задача  $Av = -\Lambda v$ ,  $v_0 = v_M = 0$  имеет решения  $X^{(k)}(x) = \sqrt{2} \sin \pi k x$  при  $\lambda = \lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, M-1$  [8].

Представим  $v(x) = \sum_{k=1}^{M-1} \tilde{v}_k X^{(k)}(x)$ , откуда  $A^{-1}v(x) = \sum_{k=1}^{M-1} \tilde{v}_k A^{-1}X^{(k)}(x)$ . Поскольку  $AX^{(k)}(x) = \lambda_k X^{(k)}(x)$ , то  $X^{(k)}(x) = \bar{\lambda}_k A^{-1}X^{(k)}(x)$ , следовательно,  $A^{-1}X^{(k)}(x) = X^{(k)}(x) \bar{\lambda}_k^{-1}$ . Тогда получим, что  $A^{-1}v(x) = \sum_{k=1}^{M-1} \tilde{v}_k \bar{\lambda}_k^{-1} X^{(k)}(x)$ , поэтому

$$\begin{aligned} \|v\|_{A^{-1}}^2 &= (A^{-1}v, v) = \left( \sum_{k=1}^{M-1} \frac{\tilde{v}_k}{\bar{\lambda}_k} X^{(k)}(x), \sum_{s=1}^{M-1} \tilde{v}_s X^{(s)}(x) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{s=1}^{M-1} \frac{\tilde{v}_k}{\bar{\lambda}_k} \tilde{v}_s (X^{(k)}(x), X^{(s)}(x)) = \sum_{k=1}^{M-1} \frac{(\tilde{v}_k)^2}{\bar{\lambda}_k}. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\|u^n\|^2 \leq \left( \frac{4\tilde{x}(\varepsilon h^2 + \tau h^2 + 4\tau^2)}{h^2 \varepsilon \sqrt{4\tilde{x}^2 - h^2} (16\varepsilon - h^2)} \right) \|f\|_{A^{-1}}^2.$$

Далее, поскольку  $\|\Lambda\| = \bar{\lambda}_{M-1}$  [9], то

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\bar{\lambda}_1} = \frac{h^2}{2 \sin^2 \frac{\pi h}{2}}.$$

В силу монотонного возрастания функции

$$\frac{h^2}{2 \sin^2 \frac{\pi h}{2}}$$

как функции переменной  $0 < h < 1$  имеем, что  $\|A^{-1}\| \leq 1/2$ . Это позволяет согласовать нормы  $\|f\|_{A^{-1}}$  и  $\|f\|_C = \max_{m=1,2,\dots,M} |f_m|$ .

Используя неравенство Коши — Буняковского и тот факт, что  $f_M = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \|f\|_A^2 &= (Af(x), f(x)) \leq \|Af\| \|f\| \leq \|A\| \|f\|^2 = \|A\| \sum_{m=1}^{M-1} f_m^2 h = \|A\| \sum_{m=1}^M f_m^2 h \leq \\ &\leq \|A\| \sum_{m=1}^M \max_{m=1,2,\dots,M} f_m^2 h = \|A\| \max_{m=1,2,\dots,M} f_m^2 h M = \|A\| \left( \max_{m=1,2,\dots,M} |f_m| \right)^2 = \|A\| \|f\|_C^2. \end{aligned}$$

Разморозим  $\tilde{x} \in \bar{\omega}_h$ , заменяя его на максимальное значение  $hM = 1$ . В результате получаем, что

$$\|u^n\| \leq \sqrt{\frac{4(\varepsilon h^2 + \tau h^2 + 4\tau^2)}{h^2 \varepsilon \sqrt{4 - h^2} (16\varepsilon - h^2)}} \sqrt{\|A^{-1}\|} \|f\|_C.$$

Принимая во внимание найденную ранее оценку  $\|A^{-1}\| \leq 1/2$ , окончательно получим, что

$$\|u^n\| \leq \sqrt{\frac{2(\varepsilon h^2 + \tau h^2 + 4\tau^2)}{h^2 \varepsilon \sqrt{4 - h^2} (16\varepsilon - h^2)}} \|f\|_C.$$

Из последнего неравенства и теоремы Лакса [6] получаем утверждение теоремы.  $\square$

#### 4. Численный эксперимент

Выполнена программная реализация метода (4)–(6) для  $\varepsilon = 0.1$ ,  $f(x) = x+1$  при  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq 0.5$ . Решение будем находить на равномерной сетке. На рис. 1 представлена визуализация решения задачи при  $M = 2N = 2000$ . Визуализация производится при помощи программного компонента InteractiveDataDisplay v.1.0.0 [10].

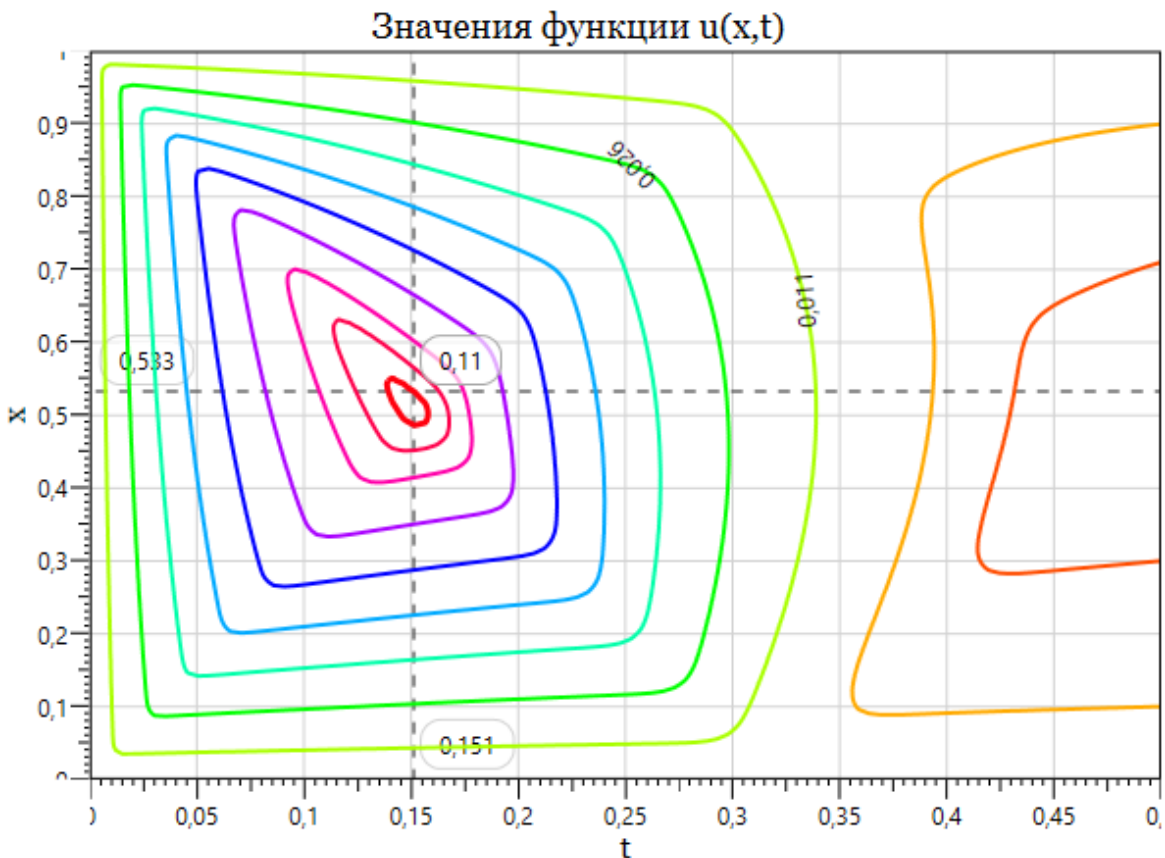


Рис. 1. Визуализация приближённого решения при  $M = 2N = 2000$

Заметим, что точное решение задачи (1)–(3) невозможно представить в виде совокупности элементарных функций [2], поэтому ограничимся рассмотрением того, как будут изменяться значения

$$\psi(M) = \max_M u(x_m, t_n), \quad M = 100 + 10k, \quad k = 0, 1, \dots, 290,$$

функции, определяющей приближённое решение в узлах сетки при изменении числа узлов в указанных пределах (рис. 2). Из графика можно предположить, что при увеличении числа узлов метод (4)–(6) сходится к некому точному решению. Аналогичные результаты можно получить, зафиксировав некоторую точку на сетке  $\bar{\omega}_{h\tau}$ .



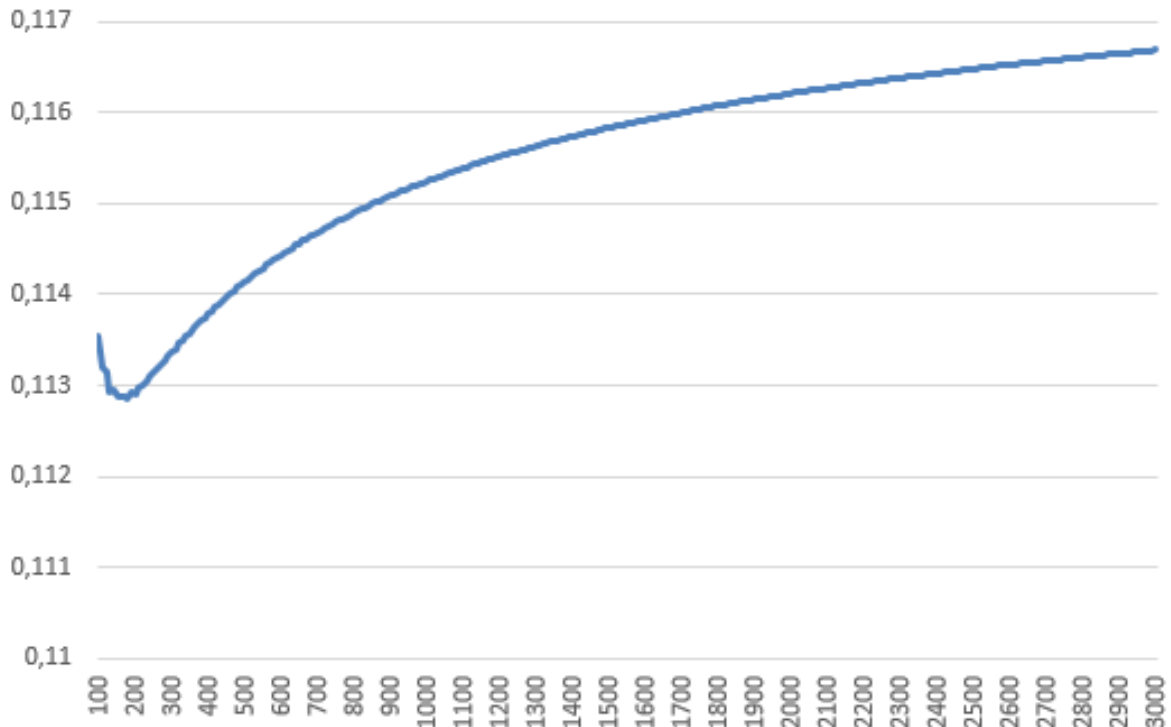


Рис. 2. График зависимости  $\psi(M)$ ,  $M = 100 + 10k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 290$

## Список литературы

1. **Кутузов, А. С.** Оценка приближённого решения одной двумерной граничной обратной задачи тепловой диагностики методом квазиобращения / А. С. Кутузов // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Математика, физика, химия. — 2009. — № 10 (143). — С. 14–21.
2. **Полянин, А. Д.** Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. — М.: Физматлит, 2001. — 576 с.
3. **Кутузов, А. С.** Моделирование процессов тепломассопереноса, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных на одно- и двумерных областях: дисс. ... канд. физ.-мат. наук / А. С. Кутузов. — Челябинск, 2013.
4. **Годунов, С. К.** Решение систем линейных уравнений / С. К. Годунов. — Новосибирск: Наука, 1980. — 177 с.
5. **Годунов, С. К.** Разностные схемы (введение в теорию): учеб. пособие / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. — М.: Наука, 1977. — 440 с.
6. **Самарский, А. А.** Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 616 с.
7. **Крылов, В. И.** Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. — Минск: Наука и техника, 1986. — 311 с.
8. **Самарский, А. А.** Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский. — М.: Наука, 1971. — 553 с.
9. **Колмогоров, А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Наука, 1972. — 496 с.
10. URL: <https://github.com/Microsoft/InteractiveDataDisplay.WPF> (дата обращения: 18.04.2019).

Поступила в редакцию 02.04.2018

После переработки 22.07.2019

**Сведения об авторе**

**Сушков Андрей Сергеевич**, аспирант математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: mesocyclon@yandex.ru.

## THE CONVERGENCE OF A DIFFERENCE SCHEME APPROXIMATING A BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE HYPERBOLIC TYPE

**A.S. Sushkov**

*Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*  
*mesocyclon@yandex.ru*

The difficulty in applying differential problems in practice lies mainly in the impossibility of obtaining their solutions in an analytical form, which makes the development of numerical methods relevant. In this paper, we constructed one implicit difference scheme approximating a boundary value problem of hyperbolic type with homogeneous boundary conditions. The order of approximation of the difference scheme is found. Particular attention is paid to the proof of its stability and convergence. In the proof, an approach similar to the method of separation of variables in mathematical physics was used. The author found the convergence condition imposed on the parameters of the difference scheme. A numerical experiment is carried out. A program has been developed to find and visualize an approximate solution.

**Keywords:** *hyperbolic type equation, boundary value problem, implicit difference scheme, approximation, difference scheme stability, difference scheme convergence.*

## References

1. **Kutuzov A.S.** Otsenka priblizhyonnogo resheniya odnoy dvumernoy granichnoy obratnoy zadachi teplovoy diagnostiki metodom kvaziobrashcheniya [Estimation of the approximate solution of a two-dimensional boundary inverse problem of the thermal diagnostics by the quasi-reversibility method]. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Matematika. Fizika. Khimiya* [Bulletin of South Ural State University. Ser.: Mathematics. Physics. Chemistry], 2009, no. 10 (143), pp. 45–51. (In Russ.).
2. **Polyanin A.D.** *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Handbook of mathematical physics linear equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 576 p. (In Russ.).
3. **Kutuzov A.S.** *Modelirovaniye protsessov teplomassoperenosa, opisyvayemykh differentsial'nymi uravneniyami v chastnykh proizvodnykh na odno- i dvumernykh oblastyakh* [Modelling of heat and mass transfer processes, described by partial differential equations on one- and two-dimensional domains. PhD thesis]. Chelyabinsk, 2013. (In Russ.).
4. **Godunov S.K.** *Resheniye sistem lineynykh uravneniy* [Solving linear equation systems]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1980. 177 p. (In Russ.).
5. **Godunov S.K., Ryaben'kii V.S.** *Raznostnye skhemy (vvedeniye v teoriyu)* [The difference schemes (introduction to the theory): a tutorial]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 440 p. (In Russ.).
6. **Samarskii A.A.** *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of difference schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 616 p. (In Russ.).
7. **Krylov V.I., Bobkov V.V., Monastyrnyi P.I.** *Nachala teorii vychislitel'nykh metodov. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [The beginning of the theory of computational methods. Partial differential equations]. Minsk, Nauka i Tekhnika Publ., 1986. 311 p. (In Russ.).

8. **Samarskii A.A.** *Vvedeniye v teoriyu raznostnykh skhem* [Introduction to the theory of difference schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 553 p. (In Russ.).
9. **Kolmogorov A.N., Fomin S.V.** *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the functions theory and functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 496 p. (In Russ.).
10. Available at <https://github.com/Microsoft/InteractiveDataDisplay.WPF>, accessed 18.04.2019.

*Accepted article received 02.04.2018*

*Corrections received 22.07.2019*