Челябинский физико-математический журнал. 2019. Т. 4, вып. 3. С. 323–332.

УДК 517.9 DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14305

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В. Н. Павленко[a], **А. А. Асрян**[b]

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
[a]*pavlenko@csu.ru*, [b]*aramik16spartak@mail.ru*

Получена теорема существования периодического решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с разрывной нелинейностью в резонансном случае. Решения рассматриваются в смысле дифференциального включения. Предполагается, что нелинейность борелева (mod 0) и ограниченная. На бесконечности она удовлетворяет одномерному аналогу условия Ландесмана — Лазера для резонансных эллиптических краевых задач. Операторная постановка рассматриваемой задачи приводит к проблеме существования неподвижных точек у многозначного компактного отображения. Для описания овыпукливания оператора Немыцкого, порождаемого нелинейностью, используются результаты М. А. Красносельского и А. В. Покровского. Наличие неподвижной точки устанавливается с помощью многозначной версии метода Лере — Шаудера.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение второго порядка, разрывная нелинейность, периодическое решение, топологическая степень.*

Введение

Рассматривается периодическая задача

$$-x'' = f(t,x), \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

$$x(0) = x(1), \quad x'(0) = x'(1), \tag{2}$$

где нелинейность $f(t,x)$ борелева (mod 0) на $[0,1] \times \mathbb{R}$ [1], т. е. отличается от некоторой борелевой лишь в некоторых точках (t,x), первые координаты которых принадлежат множеству нулевой меры. Заметим, что если функция $f(t,x)$ борелева (mod 0), то она суперпозиционно измеримая. Последнее означает, что для любой измеримой на $[0,1]$ функции $x(t)$ композиция $f(t,x(t))$ измерима на $[0,1]$. Для $f(t,x)$ монотонной по x борелевость (mod 0) эквивалентна суперпозиционной измеримости [1]. Если $f(t,x)$ — каратеодориева (измерима по t для любого $x \in \mathbb{R}$ и непрерывна по x для почти всех $t \in [0,1]$), то она борелева (mod 0) [1]. Если $f(t,x)$ измерима по t для любого $x \in \mathbb{R}$, для почти всех $t \in [0,1]$ и любого $x \in \mathbb{R}$ существуют конечные односторонние пределы $f(t,x\pm) = \lim_{\eta\to x\pm} f(t,\eta)$, и $f(t,\cdot)$ непрерывна слева (справа) на $\mathbb{R}$, то $f(t,x)$ суперпозиционно измерима [2]. Введём следующие обозначения: $f_+(t,x) = \limsup_{\eta\to x} f(t,\eta)$, $f_-(t,x) = \liminf_{\eta\to x} f(t,\eta)$. Заметим, что $f_+(t,x) = \max\{f(t,x-), f(t,x+)\}$, $f_-(t,x) = \min\{f(t,x-), f(t,x+)\}$. Будем также предполагать, что $f(t,x) \in [f_-(t,x), f_+(t,x)]$.

Определение 1. *Обобщённым решением* задачи (1), (2) называется функция $x \in W_2^2[0,1]$, удовлетворяющая включению $-x'' \in [f_-(t,x(t)), f_+(t,x(t))]$ для почти всех $t \in [0,1]$ и условиям периодичности (2).

Замечание 1. Так как $W_2^2[0,1]$ компактно вложно в $C^1[0,1]$, то для $x \in W_2^2[0,1]$ условия (2) имеют смысл.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1. *Предположим, что*

1) *функция* $f(t,x)$ *борелева* (mod 0) *на* $[0,1]\times\mathbb{R}$, *для почти всех* $t\in[0,1]$ *существуют конечные односторонние пределы* $f(t,x\pm)$ *для любого* $x\in\mathbb{R}$ *и* $f(t,x)\in[f_-(t,x),f_+(t,x)]$;

2) *существует функция* $a\in L_2[0,1]$ *такая, что для почти всех* $t\in[0,1]$

$$|f(t,x)|\le a(t) \quad \forall x\in\mathbb{R}; \tag{3}$$

3) *выполняются условия*

$$\int_0^1 \underline{f}_+(t)dt>0, \quad \int_0^1 \overline{f}_-(t)dt<0 \tag{4}$$

либо

$$\int_0^1 \overline{f}_+(t)dt<0, \quad \int_0^1 \underline{f}_-(t)dt>0, \tag{5}$$

где $\overline{f}_\pm(t)=\limsup_{x\to\pm\infty} f(t,x)$, $\underline{f}_\pm(t)=\liminf_{x\to\pm\infty} f(t,x)$.

Тогда задача (1), (2) *имеет обобщённое решение.*

Замечание 2. Условие 3) теоремы 1 является аналогом условий Ландесмана — Лазера для резонансных эллиптических краевых задач [3].

Периодические задачи для дифференциальных уравнений второго порядка и систем таких уравнений активно изучаются. Укажем на ряд таких работ. В статье чешских математиков [4] исследуется задача (1), (2) с нелинейностью $f(t,x)$, удовлетворяющей условиям Каратеодори. Методом нижних и верхних функций получены теорема существования положительных и отрицательных решений. При этом используются свойства топологической степени Лере — Шаудера. В [5] левая часть уравнения (1) имеет вид $-x''-a(t)x(t)$, причём рассматривается нерезонансный случай, когда с помощью функции Грина задача существования периодического решения сводится к проблеме наличия неподвижной точки у интегрального оператора (предполагается, что нелинейность удовлетворяет условиям Каратеодори). Теорема существования периодического решения получается из теоремы Шаудера о неподвижной точке. В [6] для уравнения (1) устанавливается существование периодических решений одного знака на $[0,1]$ комбинированием теоремы Красносельского о неподвижной точке [7, с. 148] с новыми свойствами функции Грина для нерезонансной задачи. Предварительно исходная задача преобразуется к нерезонансной. Предполагается, что нелинейность $f(t,x)$ каратеодориева. В [8] исследуется вопрос о существовании положительных периодических решений для уравнения со скалярным p-лапласианом и негладким потенциалом в нерезонансном случае. При $p=2$ уравнение в [8] совпадает с (1). Доказательство теоремы существования положительного периодического решения базируется на многозначной версии теории степени для $(S)_+$-операторов. В [9] рассматривается периодическая задача для системы из n дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностью, не зависящей от t, сингулярной в точках $0<\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_m$ и непрерывной в интервалах $(0,\beta_1),(\beta_1,\beta_2),\ldots,(\beta_{m-1},\beta_m),(\beta_m,+\infty)$. При $n=1$ получаем скалярный случай. Получены теоремы существования положительных периодических решений с оценками их числа в нерезонансном случае. Доказательства базируются на хорошо известной векторной версии теоремы Красносельского о неподвижной точке [10, теорема 2.3.4]. В [9] говорят, что $f(t,x)$ сингулярна в точке x_0, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Предположения теоремы 1 отличны от условий доказанных утверждений в перечисленных работах. Её доказательство проводится по той же схеме, что и в статьях [11; 12], где получены теоремы существования периодических решений для уравнений гиперболичекого типа с разрывными нелинейностями.

1. Операторная постановка задачи в пространстве $L_2[0,1]$

Левая часть уравнения (1) порождает линейный, плотно определённый оператор B в $L_2[0,1]$ со значениями в $L_2[0,1]$. Его область определения $D(B) = \{x \in W_2^2[0,1] : x(0) = x(1), x'(0) = x'(1)\}$. Для любого $x \in D(B)$ действие оператора B определяется равенством $Bx = -x''(t)$. Так как $D(B) \supset C_0^\infty[0,1]$, то $\overline{D(B)} = L_2[0,1]$. Далее через $(\cdot\,,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ обозначим скалярное произведение и норму в $L_2[0,1]$. Покажем, что оператор B — самосопряжённый. Пусть $v \in D(B^*)$. Тогда $(Bx,v) = (x,z)$ при $x \in D(B)$, где $z \in L_2[0,1]$. Отсюда следует, что

$$\int_0^1 -x''(t)v(t)dt = \int_0^1 x(t)z(t)dt \quad \forall x \in D(B). \tag{6}$$

Поскольку $C_0^\infty[0,1] \subset D(B)$, то $v \in W_2^2[0,1]$ и $z = -v''$. Покажем, что $v \in D(B)$. Имеем

$$\int_0^1 -x''(t)v(t)dt = \int_0^1 x'(t)v'(t)dt - x'(t)v(t)\Big|_0^1 =$$

$$= \int_0^1 x(t)(-v''(t))dt - x'(t)v(t)\Big|_0^1 + +v'(t)x(t)\Big|_0^1 =$$

$$= \int_0^1 x(t)(-v''(t))dt - x'(0)(v(1)-v(0)) + x(0)(v'(1)-v'(0)) \quad \forall x \in D(B). \tag{7}$$

В силу (6)

$$\int_0^1 -x''(t)v(t)dt = \int_0^1 x(t)(-v''(t))dt \quad \forall x \in D(B).$$

Поэтому (7) влечёт равенство $-x'(0)(v(1)-v(0)) + x(0)(v'(1)-v'(0)) = 0$ при всех $x \in D(B)$. Взяв $x(t) \equiv 1$, получим $v'(1) = v'(0)$, а если $x(t) = \sin 2\pi t$, то $v(1) = v(0)$. Таким образом, $v \in D(B)$ и, значит, $D(B^*) = D(B)$. Кроме того, $B^*v = Bv$ при всех $v \in D(B^*)$. Следовательно, $B^* = B$, т. е. B — самосопряжённый оператор.

Собственные значения оператора B — это те $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых уравнение $Bx = \lambda x$ имеет ненулевые решения. Они образуют точечный спектр σ оператора B. Легко показать, что $\sigma = \{4n^2\pi^2 : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Для $\lambda = 0$ собственное подпространство одномерно и базисная функция $l_0 \equiv 1$. Для $\lambda = 4n^2\pi^2$, $n \in \mathbb{N}$, собственное подпространство двумерное, а базисные функции $l_{n1} = 2^{-1/2}\sin 2n\pi t$, $l_{n2} = 2^{-1/2}\cos 2n\pi t$. Заметим, что система $\{l_0, l_{n1}, l_{n2}, n \in \mathbb{N}\}$ образует ортонормированный базис в $L_2[0,1]$. Его элементы будем обозначать $l_0, l_1, l_2, \ldots$, где $l_{2n-1} = l_{n1}$,

$l_{2n} = l_{n2}$, а собственные значения $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, где $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{2n-1} = \lambda_{2n} = 4\pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим оператор

$$A : D(A) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad D(A) = \left\{ x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j l_j \in L_2[0,1] : \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^2 x_j^2 < +\infty \right\},$$

действие которого определяется равенством

$$Ax := \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j x_j l_j \quad \forall x \in D(A).$$

Этот оператор самосопряжённый и на $D(A)$ совпадает с B. Действительно, если $x \in D(A)$, то $x^{(n)} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j l_j \to x$ в $L_2[0,1]$, $x^{(n)} \in D(B)$, $Ax^{(n)} = Bx^{(n)}$ и $Ax^{(n)} \to x$ в $L_2[0,1]$. Так как B замкнутый, то отсюда следует, что $x \in D(B)$ и $Bx = Ax$. Следовательно, B — расширение A ($A \subset B$), но тогда A^* расширение B^*. Поскольку A и B самосопряжённые, то отсюда следует, что $A = B$.

Пусть $\lambda \notin \sigma$. Тогда для любого $y = \sum\limits_{j=0}^{\infty} y_j l_j \in L_2[0,1]$ уравнение $(A - \lambda I)x = y$ имеет единственное решение $x = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\frac{y_j}{\lambda_j - \lambda}\right) l_j \in D(A)$ и, следовательно, существует $(A - \lambda I)^{-1}$, причём $(A - \lambda I)^{-1} y = \sum\limits_{j=0}^{\infty} (\lambda_j - \lambda)^{-1} y_j l_j$. Поскольку $(\lambda_j - \lambda)^{-1} \to 0$ при $j \to \infty$, то оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ компактный в $L_2[0,1]$. Таким образом, для любого $\lambda \notin \sigma$ резольвента $(B - \lambda I)^{-1}$ — компактный линейный оператор в $L_2[0,1]$.

Рассмотрим оператор Немыцкого $F : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, порождённый функцией $f(t,x) : F(x)(t) = f(t, x(t))$, для любого $x \in L_2[0,1]$. Из суперпозиционной измеримости $f(t,x)$ и неравенства (3) следует, что для любого $x \in L_2[0,1]$ выполняется включение $F(x)(t) \in L_2[0,1]$ и

$$\|F(x)\| \leq \|a\| \quad \forall x \in L_2[0,1]. \tag{8}$$

Обозначим через $F^\diamond(x)$ овыпукливание оператора $F(x)$: для любого $x \in L_2[0,1]$

$$F^\diamond(x) = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{\mathrm{co}} \{ y = F(z) : \|x - z\| < \epsilon \},$$

где $\overline{\mathrm{co}}\, G$ — замкнутая выпуклая оболочка множества $G \subset L_2[0,1]$. В [1, теорема 27.1] показано, что из условий 1) и 2) теоремы 1 следует, что $F^\diamond(x) = \{ z : [0,1] \to \mathbb{R} : z$ — измеримая на [0,1] функция и $z(t) \in [f_-(t, x(t)), f_+(t, x(t))]$ для почти всех $t \in [0,1]\}$ для любого $x \in L_2[0,1]$.

Далее, если $\lambda \in \mathbb{R}$ из резольвентного множества оператора B, то, как показано выше, линейный оператор $(B - \lambda I)^{-1}$ вполне непрерывен в $L_2[0,1]$. Из чего следует компактность многозначного отображения $T_\lambda = (B - \lambda I)^{-1} \circ (F^\diamond - \lambda I)$. Легко показать, что значения T_λ — выпуклые компакты. Докажем полунепрерывность сверху на $L_2[0,1]$ отображения T_λ. Последнее означает, что для любого $x \in L_2[0,1]$ и открытого множества $G \supset T_\lambda x$ найдётся окрестность U точки x, такая, что $T_\lambda U \subset G$. Допустим противное. Тогда существуют $x \in L^2[0,1]$ и открытое множество $G \supset T_\lambda x$, такие, что для произвольного натурального $m \in \mathbb{N}$ найдутся x_m с $\|x_m - x\| < \frac{1}{m}$ и $\zeta_m \in T_\lambda x_m \setminus G$. Каждый элемент ζ_m представляется в виде $(B - \lambda I)^{-1} v_m$, где

$v_m \in F^\diamond(x_m) - \lambda x_m$. В силу оценки (8) последовательность (v_m) ограничена. Из этого факта и рефлексивности $L^2[0,1]$ следует существование подпоследовательности (v_{m_k}), слабо сходящейся к некоторому $v \in L^2[0,1]$. В силу теоремы 27.2 из [1] отображение $F^\diamond$ совпадает с $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{F}(x) = \{y \in L^2[0,1] : \exists\ (x_n) \subset L^2[0,1],\ x_n \to x,\ F(x_n) \rightharpoonup y\}$. Отсюда следует, что $v \in F^\diamond(x) - \lambda x$. Так как $(B-\lambda I)^{-1}$ — линейный вполне непрерывный оператор, то $(B-\lambda I)^{-1}v_{m_k} \to (B-\lambda I)^{-1}v$. Поскольку $(B-\lambda I)^{-1}v \in T_\lambda x \subset G$ и G — открытое множество, то $\zeta_{m_k} = (B-\lambda I)^{-1}v_{m_k}$ для достаточно больших k принадлежит G, что противоречит выбору ζ_m. Полунепрерывность сверху отображения T_λ на $L^2[0,1]$ доказана.

Таким образом, многозначное отображение T_λ в $L^2[0,1]$ полунепрерывно сверху, компактно (ограниченные множества переводит в предкомпактные) и значения T_λ — выпуклые компакты. Оператор $I - T_\lambda$ называют компактным многозначным векторным полем [13]. Для него определяется топологическая степень $\deg(I - T_\lambda, B_r, \theta)$ на шаре $B_r = \{x \in L^2[0,1] : \|x\| < r\}$, $r > 0$, образ границы которого при отображении $I - T_\lambda$ не содержит нуля (θ — ноль пространства $L^2[0,1]$) [13]. Отображение

$$h(x,\tau) = (1-\tau)x + \tau(I - T_\lambda(x)), \quad x \in B_r, \quad \tau \in [0,1], \tag{9}$$

называется аффинной гомотопией, соединяющей I и $I - T_\lambda$, если для любых $x \in \partial B_r$ и $\tau \in [0,1]$ элемент $\theta \notin h(x,\tau)$. Если (9) является аффинной гомотопией, то $\deg(I - T_\lambda, B_r, \theta) = \deg(I, B_r, \theta) = 1$ и, значит, существует $x \in B_r$, такой, что $\theta \in (I - T_\lambda)x$ [13]. Заметим, что последнее означает, что $x \in T_\lambda x$, т. е. x — неподвижная точка отображения T_λ. Чтобы доказать, что (9) — гомотопия для некоторого $r > 0$, достаточно установить ограниченность множества $\{x \in L^2[0,1] :$ существует $\tau \in [0,1]$, для которого $\theta \in h(x,\tau)\}$, т. е. равномерную по τ на $[0,\ 1]$ ограниченность множества решений включений $\theta \in h(x,\tau)$ (многозначная версия принципа Лере — Шаудера).

Перейдём к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Фиксируем $\epsilon \in (0, 4\pi)$. Тогда $I - T_\epsilon$ и $I - T_{-\epsilon}$ — многозначные компактные векторные поля в $L^2[0,1]$ и существование обобщённого решения задачи (1), (2) равносильно наличию неподвижной точки у отображенния T_ϵ или $T_{-\epsilon}$. В случае когда выполняется условие (4), доказывается существование неподвижной точки у отображения T_ϵ, а если выполняется условие (5), то — у отображения $T_{-\epsilon}$. Доказательство проводится в соответствии с многозначной версией принципа Лере — Шаудера методом от противного.

Пусть выполняется условие (4). Для краткости обозначим T_ϵ через Т. Требуется доказать, что множество решений семейства включений

$$\theta \in [(1-\tau)I + \tau(I - T)](x), \quad \tau \in [0,1], \tag{10}$$

ограничено в $L^2[0,1]$. Заметим, что (10) равносильно включению $x \in \tau T(x)$, $\tau \in [0,1]$. Допустим противное. Тогда существуют последовательность $(\tau_n) \subset [0,1]$ и $(x_n) \subset D(B) \subset L_2[0,1]$, такие, что $\|x_n\| \mapsto +\infty$ и $x_n \in \tau_n T x_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Включение $x_n \in \tau_n T x_n$ равносильно

$$Bx_n - \epsilon x_n = \tau_n \zeta_n - \epsilon \tau_n x_n, \tag{11}$$

где измеримая на $[0,1]$ функция ζ_n удовлетворяет включению $\zeta_n(t) \in [f_-(t, x_n(t)), f_+(t, x_n(t))]$ почти всюду на $[0,1]$. Так как пространство $L_2[0,1]$ гильбертово, то ограниченная последовательность $v_n = x_n/\|x_n\|$ содержит слабо сходящуюся подпоследовательность в $L_2[0,1]$. Не теряя общности, можно считать что $v_n \rightharpoonup v$ в

$L_2[0,1]$ и $\tau_n \to \tau \in [0,1]$. Здесь $\rightharpoonup$ обозначение слабой сходимости. Поделив обе части (11) на $\|x_n\|$, получим

$$Bv_n - (1-\tau_n)\epsilon v_n = \tau_n \zeta_n / \|x_n\|. \tag{12}$$

В силу оценки (8) последовательности ζ_n ограничена в $L_2[0,1]$, поэтому правая часть (12) стремится к нулю при $n \to \infty$ и, значит, $Bv_n - (1-\tau_n)\epsilon v_n \to 0$ в $L_2[0,1]$. Последнее влечёт слабую сходимость Bv_n к $(1-\tau)\epsilon v$. Так как график B в $L_2[0,1] \times L_2[0,1]$ — замкнутое и выпуклое множество, то он слабо замкнут (напомним, что линейный оператор B замкнутый, что равносильно замкнутости его графика). Отсюда следует, что $v \in D(B)$ и $Bv_n \rightharpoonup Bv$. Следовательно, $Bv = (1-\tau)\epsilon v$. Так как линейный оператор $(B-\epsilon I)^{-1}$ компактный и $u_n = \tau_n \zeta_n / \|x_n\| - \epsilon \tau_n v_n \rightharpoonup \epsilon \tau v$, то $v_n = (B-\epsilon I)^{-1} u_n \to (B-\epsilon I)^{-1} \epsilon \tau v$. Так как $\|v_n\| = 1$ и (v_n) сильно сходится к v в $L_2[0,1]$, то $\|v\| = 1$. Более того, последовательность, сходящаяся в $L_2[0,1]$, всегда содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на [0, 1]. Поэтому, не теряя общности, можно считать, что $v_n(t) \to v(t)$ почти всюду на [0, 1], переходя при необходимости к подпоследовательности. Выше было показано, что $Bv = (1-\tau)\epsilon v$, $\tau \in [0,1]$. Поскольку, $v \neq \theta$, то $(1-\tau)\epsilon$ — собственное значение B. Последнее возможно только при $\tau = 1$. В противном случае $(1-\tau)\epsilon$ принадлежит резольвентному множеству оператора B (согласно выбора ϵ), что влечёт равенство нулю функции v.

Итак, v — собственная функция оператора B, соответствующая нулевому собственному значению. Поскольку $\|v\| = 1$, то либо $v = 1$, либо $v = -1$. Умножим скалярно на v (11), получим

$$(Bx_n, v) - \epsilon(1-\tau_n)(\|x_n\| v_n, v) = \tau_n(\zeta_n, v). \tag{13}$$

Так как $(Bx_n, v) = (x_n, Bv)$, то из (13) следует, что

$$(\zeta_n, v) = -\epsilon \left(\frac{1}{\tau_n} - 1 \right) \|x_n\| (v_n, v). \tag{14}$$

Поскольку $\tau_n \to 1-$, $(v_n, v) \to \|v\|^2 = 1$ и $\epsilon > 0$, из (14) следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} (\zeta_n, v) \le 0. \tag{15}$$

Пусть $v = 1$. Из условия 2 теоремы 1 и леммы Лебега — Фату [14] имеем цепочку неравенств

$$\liminf_{n\to\infty} (\zeta_n, v) \geqslant \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_-(t, x_n(t))dt \geqslant \int_0^1 \liminf_{n\to\infty} f_-(t, \|x_n\| v_n(t))dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^1 \liminf_{x\to+\infty} f(t,x)dt = \int_0^1 \underline{f}_+(t)dt > 0$$

с учётом сходимости v_n к 1 почти всюду на $[0,1]$, $\|x_n\|$ — к $+\infty$, и условия (4). Получено противоречие с (15).

Аналогично, если $v \equiv -1$ на $[0,1]$, то

$$\liminf_{n\to\infty} (\zeta_n, v) = \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 -\zeta_n(t)dt \geqslant \int_0^1 \liminf_{n\to\infty} (-\zeta_n(t))dt = -\int_0^1 \limsup_{n\to\infty} \zeta_n(t)dt \geqslant$$

$$\geqslant -\int\limits_0^1 \limsup_{n\to\infty} f_+(t,\|x_n\|v_n(t))dt \geqslant -\int\limits_0^1 \limsup_{x\to-\infty} f(t,x)dt = -\int\limits_0^1 \bar{f}\_(t)dt > 0.$$

Здесь была использована сходимость $v_n(t)$ к -1 почти всюду на $[0,1]$, сходимость $\|x_n\|$ к $+\infty$ и условие (4). Получено противоречие с (14).

Пусть теперь выполенено условие (5). Схема доказательства остаётся прежней с заменой ε на $-\varepsilon$. В частности, теперь $T = T_{-\varepsilon}$. Равенство (11) примет вид $Bx_n + \varepsilon x_n = \tau_n\zeta_n + \varepsilon\tau_n x_n$, а неравенство (15) —

$$\liminf_{n\to\infty}(\zeta_n, v) \geq 0, \tag{16}$$

где $v \equiv 1$ или -1 на $[0,\ 1]$. При $v \equiv 1$, используя условие 2 теоремы 1 и лемму Лебега — Фату, с учётом сходимости v_n к 1 почти всюду на $[0,1]$ и сходимости $\|x_n\| \to +\infty$, имеем

$$\limsup_{n\to\infty}(\zeta_n, v) \leqslant \limsup_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_+(t,x_n(t))dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 \limsup_{n\to\infty} f_+(t,x_n(t))dt \leqslant \int\limits_0^1 \limsup_{x\to+\infty} f(t,x)dt = \int\limits_0^1 \bar{f}_+(t)dt,$$

где последний интеграл в силу условия (5) отрицателен. Получено противоречие с неравенством (16).

Аналогично, если $v \equiv -1$ на $[0,1]$, то

$$\limsup_{n\to\infty}(\zeta_n, v) = \limsup_{n\to\infty}\int\limits_0^1 -\zeta_n(t)dt \leqslant \int\limits_0^1 \limsup_{n\to\infty}(-\zeta_n(t))dt = -\int\limits_0^1 \liminf_{n\to\infty}\zeta_n(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant -\int\limits_0^1 \liminf_{n\to\infty} f_-(t,\|x_n\|v_n(t))dt \leqslant -\int\limits_0^1 \liminf_{x\to-\infty} f(t,x)dt = -\int\limits_0^1 \underline{f}\_(t)dt.$$

Но по условию (5) правая часть доказанного неравенства отрицательна, что противоречит (16). Теорема 1 доказана. □

Список литературы

1. **Красносельский, М. А.** Системы с гистерезисом / М. А. Красносельский, А. В. Покровский. — М. : Наука, 1983. — 448 с.
2. **Шрагин, И. В.** Условия измеримости суперпозиций / И. В. Шрагин // Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 197, № 2. — С. 295–298.
3. **Landesman, E. M** Nonlinear perturbations of linear e11iptic boundary value problems at resonance / E. M. Landesman, A. C. Lazer // Journal of Mathematics and Mechanics. — 1970. — Vol. 19, № 7. — P. 609–623.
4. **Rachunkova, I.** Existence of nonnegative and nonpositive solutions for second order periodic boundary value problems / I. Rachunkova, M. Tvrdy, I. Vrkoc // Journal of Differential equations. — 2001. — Vol. 176. — P. 445–469.
5. **Torres, P.** Weak singularities may help periodic solutions to exist / P. Torres // Journal of Differential equations. — 2007. —Vol. 232. — P. 277–284.

6. **Torres, P.** Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equation via a Krasnoselskii fixed point theorem / P. Torres // Journal of Differential equation. — 2003. — Vol. 190 — P. 643–662.
7. **Krasnosel'sii, M. A.** Positive Solutions of Operator Equations / M. A. Krasnoselsii. — Groningen : P. Noordhoff Ltd., 1964. — 381 p.
8. **Filippakis, M.** Positive solutions for nonlinear periodic problems / M. Filippakis, N. Papageorgion, V. Staicu // Positivity. — 2008. — Vol. 12. — P. 433–750.
9. **Wang, Y.** On positive periodic solutions of second order singular equations / Y. Wang, Y. Ru // Boundary Value Problems. — 2018. — Vol. 114. — P. 1–10.
10. **Guo, D.** Nonlinear Problems in Abstract Cones / D. Guo, V. Lakshmicantham. — New York : Academic Press, 1988. — 275 p.
11. **Галиханов, И. Ф.** Периодические решения телеграфного уравнения с разрывной не линейностью / И. Ф. Галиханов, В. Н. Павленко // Уфим. мат. журн. — 2012. — Т. 4, № 2. — С. 74–79.
12. **Павленко, В. Н.** Периодические решения уравнения колебаний струны с граничными условиями Неймана и Дирихле и разрывной нелинейностью / В. Н. Павленко, Т. А. Петраш // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2012. — Т. 18, № 2. — С. 199–204.
13. **Ma, T. W.** Topological degree for set valued compact vector fields in locally convex spaces / T. W. Ma // Rozprawy Mat. — 1972. — Vol. 92. — P. 3–47.
14. **Иосида, К.** Функциональный анализ / К. Иосида. — М. : Мир, 1967. — 624 с.

Поступила в редакцию 18.01.2019
После переработки 21.06.2019

Сведения об авторах

Павленко Вячеслав Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: pavlenko@csu.ru.

Асрян Арам Артакович, аспирант математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: aramik16spartak@mail.ru

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2019. Vol. 4, iss. 3. P. 323–332.

DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14305

PERIODIC SOLUTIONS EXISTENCE FOR A SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH A DISCONTINUOUS NONLINEARITY

V.N. Pavlenko[a], **A.A. Asryan**[b]

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
[a]*pavlenko@csu.ru*, [b]*aramik16spartak@mail.ru*

An existence theorem is obtained for a periodic solution of an ordinary second order differential equation with discontinuous nonlinearity in the resonance case. The solutions are considered in the sense of differential inclusion. It is assumed that the non-linearity is of Borel (mod 0) and is bounded. At infinity, it satisfies the one-dimensional analogue of the Landesman — Laser condition for resonant elliptic boundary value problems. The operator statement of the problem under consideration leads to the problem of the existence of fixed points in a multi-valued compact map. To describe the convexity of Nemytskiy operator generated by nonlinearity, the results of M.A. Krasnoselsky and A.V. Pokrovsky are used. The presence of a fixed point is established using the multi-valued version of the Leray — Schauder method.

Keywords: *second order differential equation, discontinuous nonlinearity, periodic solution, topological degree.*

References

1. **Krasnosel'skii M.A., Pokrovsky A.V.** *Sistemy s gisterezisom* [Systems with hysteresis]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 448 p. (In Russ.).
2. **Shragin I.V.** Usloviya izmerimosti superpozitsiy [Conditions for the measurability of superpositions]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of USSR Academy of Science], 1971, vol. 197, no. 2, pp. 295–298. (In Russ.).
3. **Landesman E.M., Lazer A.C.** Nonlinear perturbations of linear e11iptic boundary value problems at resonance. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1970, vol. 19, no. 7, pp. 609–623.
4. **Rachunkova I., Tvrdy I., Vrkoc J.** Existence of nonnegative and nonpositive solutions for second order periodic boundary value problems. *Journal of Differential equations*, 2001, vol. 176, pp. 445–469.
5. **Torres P.** Weak singularities may help periodic solutions to exist. *Journal of Differential equations*, 2007, vol. 232, pp. 277–284.
6. **Torres P.** Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equation via a Krasnoselskii fixed point theorem. *Journal of Differential equations*, 2003, vol. 190, pp. 643–662.
7. **Krasnosel'skii M.A.** *Positive Solutions of Operator Equations.* Groningen, P. Noordhoff Ltd., 1964. 381 p.
8. **Filippakis M., Papageorgion N., Staicu V.** Positive solutions for nonlinear periodic problems. *Positivity*, 2008, vol. 12, pp. 433–750.
9. **Wang Y., Ru Y.** On positive periodic solutions of second order singular equations. *Boundary Value Problems*, 2018, vol. 114, pp. 1–10.
10. **Guo D., Lakshmicantham V.** *Nonlinear Problems in Abstract Cones.* New York, Academic Press, 1988. 275 p.
11. **Galikhanov I.F., Pavlenko V.N.** Periodic solutions of the telegraph equation with a discontinuous nonlinearity. *Ufa Mathematical Journal*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 74–79.

12. **Pavlenko V.N., Petrash T.A.** Periodicheskiye resheniya uravneniya kolebaniy struny s granichnymi usloviyami Neymana i Dirikhle s razryvnoy nelineynost'yu [Periodic solutions of the string oscillations equation with Neumann and Dirichlet boundary conditions and with a discontinuous nonlinearity]. *Trudy Instituta matematiki i mechaniiki UrO RAN* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of RAS], 2012, vol. 18, no. 2, pp. 199–204. (In Russ.).
13. **Ma T.W.** Topological degree for set valued compact vector fields in locally convex spaces. *Rozprawy Mat.*, 1972, vol. 92, pp. 3–47.
14. **Yosida K.** *Functional analysis*. Berlin — Höttingen — Geidelberg, Springer-Verlag, 1965. 501 p.

Accepted article received 18.01.2019
Corrections received 21.06.2019