Челябинский физико-математический журнал. 2019. Т. 4, вып. 3. С. 276–284.

УДК 517.9 DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14303

ГРАНИЦА УСТОЙЧИВОСТИ В ОДНОМ ПРОСТОМ КЛАССЕ МОНОДРОМНЫХ РОСТКОВ

Н. Б. Медведева[a], **В. А. Викторова**[b]

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
[a]*medv@csu.ru*, [b]*valeriaviktorova4@gmail.com*

Построено двухпараметрическое семейство векторных полей с монодромной особой точкой и с диаграммой Ньютона, состоящей из одного ребра. Для данного семейства выполняются условия «невырожденности», позволяющие отнести его к классу с простой монодромной особой точкой. Построена асимптотика границы устойчивости в данном семействе, которая содержит члены с логарифмом, откуда следует аналитическая неразрешимость проблемы устойчивости в замыкании данного класса векторных полей с простой монодромной особой точкой.

Ключевые слова: *монодромная особая точка, фокус, центр, преобразование монодромии, диаграмма Ньютона, граница устойчивости, аналитическая разрешимость.*

Введение

1. Монодромные особые точки. Известно [1], что вещественно-изолированная особая точка аналитического векторного поля на плоскости либо имеет характеристическую траекторию (входящую в особую точку с определённой касательной), либо *монодромна*, т. е. каждая траектория в окрестности этой особой точки топологически является либо спиралью, либо окружностью. Для монодромной особой точки определено *преобразование монодромии*, переводящее некоторую гладкую кривую с началом в особой точке (полутрансверсаль) в себя вдоль траекторий векторного поля. Образ и прообраз при этом отображении лежат на одном отрезке траектории, делающем один оборот вокруг особой точки. Строгое определение монодромной особой точки и преобразования монодромии дано в [1].

Из теоремы о конечности числа предельных циклов [2] следует, что монодромная особая точка аналитического векторного поля на плоскости является либо центром, либо фокусом.

Будем различать «простые» монодромные особые точки и «сложные». Упрощённо говоря, простые монодромные особые точки имеют диаграмму Ньютона, состоящую из одного ребра, а сложные — из многих рёбер.

2. Диаграмма Ньютона. Рассмотрим аналитическое векторное поле V в окрестности изолированной особой точки ноль на вещественной плоскости. Оно определяет динамическую систему

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y), \tag{1}$$

где $X(0, 0) = 0$, $Y(0, 0) = 0$.

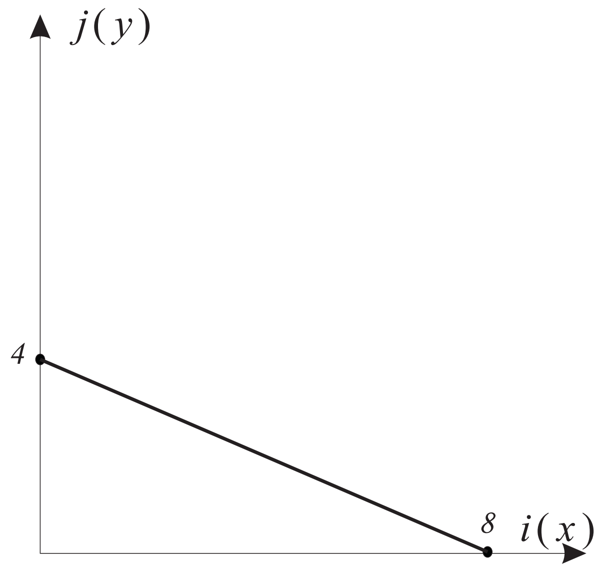
Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 17-01-00739а).

Рассмотрим разложения Тейлора

$$yX(x,y) = \sum_{\substack{i\geq 0, j\geq 1\\ i+j\geq 2}} a_{ij}x^i y^j, \quad xY(x,y) = \sum_{\substack{i\geq 1, j\geq 0\\ i+j\geq 2}} b_{ij}x^i y^j. \tag{2}$$

Определения. 1. *Векторным коэффициентом* точки (i,j) называется вектор (a_{ij}, b_{ij}). *Носителем* системы (1), а также векторного поля V называется множество таких пар (i,j), что $(a_{ij}, b_{ij}) \neq (0,0)$.

2. Рассмотрим множество $\bigcup_{(i,j)}\{(i,j) + \mathbb{R}^2_+\}$, где $\mathbb{R}^2_+$ — положительный квадрант, объединение берётся по всем точкам (i,j), принадлежащим носителю. Граница выпуклой оболочки этого множества состоит из двух открытых лучей и ломаной, которая может состоять и из одной точки. Эта ломаная называется *диаграммой Ньютона* векторного поля V (рисунок). Звенья ломаной называются *рёбрами* диаграммы Ньютона, а их концы — её *вершинами*.



3. *Показателем* ребра диаграммы Ньютона называется положительное рациональное число, равное тангенсу угла между ребром и осью ординат.

4. Рассмотрим ребро ℓ диаграммы Ньютона системы (1) с показателем $\alpha = m/n$, где m/n — несократимая дробь. Члены разложения (2) сгруппируем таким образом, что

$$yX(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x,y), \quad xY(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(x,y),$$

где

$$X_k(x,y) = \sum_{ni+mj=k+k_0} a_{ij}x^i y^j, \quad Y_k(x,y) = \sum_{ni+mj=k+k_0} b_{ij}x^i y^j$$

есть квазиоднородные полиномы степени $k+k_0$ с весами n и m переменных x и y соответственно, $k_0 > 0$. Обозначим $F_k(x,y) = nY_k(x,y) - mX_k(x,y)$, $k \geq 0$.

5. Для любого ненулевого квазиоднородного полинома $R(x,y)$ с весами n и m переменных x и y справедливо разложение

$$R(x,y) = Ax^{s_1}y^{s_2}\prod_i (y^n - b_i x^m)^{k_i},$$

где b_i — различные ненулевые комплексные числа, $k_i \geq 0$, $s_1 \geq 0, s_1 \geq 0$ — целые числа, $A \neq 0$. Многочлен вида $y^n - b_i x^m$ (при $k_i > 0$) будем называть *простым делителем* многочлена $R(x,y)$, k_i — его кратностью. Простой делитель называется *вещественным*, если $b_i \in \mathbb{R}$.

Ребро ℓ диаграммы Ньютона называется *невырожденным*, если многочлен $F_0(x,y) = nY_0(x,y) - mX_0(x,y)$ не имеет вещественных простых делителей.

3. Алгебраическая и аналитическая разрешимость локальных задач.

Определение. Ростком векторного поля в особой точке называется класс эквивалентности векторных полей, совпадающих в некоторой окрестности особой точки.

Понятие алгебраически разрешимой локальной задачи введено В. И. Арнольдом в [3]. Согласно В. И. Арнольду под *задачей* понимается разбиение пространства ростков W_0 на непересекающиеся подмножества $W_0 = \bigcup_i S_i$, где $i \in I$, I — некоторое множество индексов. Если, например, рассматривается задача об устойчивости по Ляпунову, то таких подмножеств всего два: S_1, состоящее из устойчивых ростков (т. е. ростков, имеющих устойчивую особую точку), и S_2, состоящее из неустойчивых ростков.

Алгебраическая разрешимость задачи означает, что ответ в задаче (принадлежность к одному из классов S_i) может быть получен с помощью конечного числа арифметических операций над тейлоровскими коэффициентами ростка и решений алгебраических уравнений за исключением ростков из некоторого исключительного множества коразмерности бесконечность.

В случае когда задача не является алгебраически разрешимой, было предложено ввести понятие аналитической разрешимости (В. И. Арнольд, Ю. С. Ильяшенко [1; 4]). Аналитическая разрешимость задачи означает, что ответ в задаче может быть получен с помощью вычисления конечного числа значений аналитических функций от тейлоровских коэффициентов ростка за исключением ростков из некоторого множества бесконечной коразмерности. Отсутствие аналитической разрешимости может привести, например, к таким патологиям, как накопление бесконечного числа связных компонент различных множеств S_i в окрестности одной точки пространства ростков.

4. Проблема различения центра и фокуса и проблема устойчивости на плоскости. Как было доказано в [5], множество всех монодромных ростков (ростков с монодромной особой точкой) представляет собой счётное объединение «простейших монодромных классов», каждый из которых является полуалгебраическим множеством, то есть задаётся конечным числом полиномиальных уравнений и неравенств относительно тейлоровских коэффициентов ростка.

Проблему устойчивости в любом классе монодромных ростков будем, отдавая дань традиции, называть *проблемой различения центра и фокуса*, хотя в контексте алгебраической и аналитической разрешимости реально имеет место различение между устойчивым и неустойчивым фокусом.

Как было доказано Ю. С. Ильяшенко [6], проблема различения центра и фокуса, а следовательно, и проблема устойчивости не является алгебраически разрешимой.

Теорема 1. [5; 7]. *Проблема различения центра и фокуса аналитически разрешима в любом простейшем монодромном классе.*

Утверждение этой теоремы означает, что множество ростков, имеющих в нуле особую точку типа центр, имеет коразмерность ∞, а наличие фокуса (устойчивого или неустойчивого) может быть установлено путём вычисления конечного числа аналитических функций от тейлоровских коэффициентов ростка.

Теорема 2. [8]. *Проблема устойчивости особой точки аналитического векторного поля на плоскости аналитически неразрешима.*

Пример семейства, приведённый в статье [8], в котором была обнаружена потеря аналитичности границы устойчивости, относится к классу сложных монодромных особых точек, причём при наличии резонанса в седловой особой точке, полученной в результате раздутия по диаграмме Ньютона. Интересен ответ на вопрос: встречаются ли подобные патологии в классах простых монодромных особых точек? В данной работе даётся положительный ответ на этот вопрос. Более точно: построено двухпараметрическое семейство векторных полей с монодромной особой точкой и с диаграммой Ньютона, состоящей из одного ребра. Для данного семейства выполняется условие невырожденности, позволяющее отнести его к классу с простой монодромной особой точкой. Граница устойчивости задаётся графиком функции $\alpha = \mu(\varepsilon)$ (α и ε — параметры семейства) и при $\varepsilon \to 0$ выходит на границу монодромного класса. Построенная асимптотика функции $\mu(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, как и в примере [8], содержит члены с логарифмом, откуда следует аналитическая неразрешимость проблемы устойчивости в замыкании данного простейшего монодромного класса с простой монодромной особой точкой.

1. Асимптотика границы устойчивости

Простейшие монодромные классы, описанные в [8], характеризуются определённым ходом процесса раздутия особенностей, связанного с диаграммами Ньютона.

Рассмотрим простейший монодромный класс M_1, состоящий из ростков векторных полей, имеющих в особой точке $(0,0)$ диаграмму Ньютона, состоящую из одного невырожденного ребра с концами $(0,4)$ и $(8,0)$ (рисунок). Условие невырожденности ребра гарантирует, что в результате раздутия особой точки по диаграмме Ньютона на вклеенной кривой не образуются новые особые точки.

Рассмотрим семейство векторных полей из класса M_1

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{2}y^3 - \alpha x^7 + x^3y^2, \\ \dot{y} &= \varepsilon^2 x^7 + \varepsilon^2 x^3 y^2 - 2\alpha y x^6 + x^3y^2 + 2x^2y^3, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\varepsilon > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. В данном семействе многочлен $F_0(x,y) = (y^2+x^4)(y^2+\varepsilon^2x^4)$ не имеет вещественных простых делителей. Предельный переход при $\varepsilon \to 0$ означает выход на границу класса M_1, так как при $\varepsilon = 0$ диаграмма Ньютона меняется.

Согласно [9; 10] граница устойчивости в семействе (3) задаётся уравнением

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(w) \exp \int\limits_0^w \Phi_0(\xi)d\xi dw = 0, \tag{4}$$

где

$$\Phi_0(\xi) = -\frac{\xi^3}{2F_0(1,\xi)}, \quad \Phi_1(w) = \frac{w^2-\alpha}{F_0(1,w)}.$$

Вычисляя первообразную под знаком экспоненты и подставляя в (4), получим уравнение

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{(w^2-\alpha)dw}{(1+w^2)^{\frac{5}{4}+\gamma}(w^2+c)^{1-\gamma}} = 0, \quad \gamma = \frac{c}{4(1-c)}, \quad c = \varepsilon^2. \tag{5}$$

Уравнение (5) запишем в виде $\alpha = \mu(\varepsilon)$, где $\mu(\varepsilon) = \frac{K_2(\varepsilon)}{K_0(\varepsilon)}$,

$$K_n(\varepsilon) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{w^n dw}{(1+w^2)^{\frac{5}{4}+\gamma}(w^2+c)^{1-\gamma}}, \quad n = 0, 2.$$

Построим асимптотическое разложение функции $\mu(\varepsilon) = \frac{K_2(\varepsilon)}{K_0(\varepsilon)}$ при $\varepsilon \to 0$. Сначала рассмотрим интеграл $K_0(\varepsilon)$. Представим $K_0(\varepsilon) = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{dw}{(1+w^2)^{\frac{5}{4}+\gamma}(w^2+c)^{1-\gamma}}, \quad I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dw}{(1+w^2)^{\frac{5}{4}+\gamma}(w^2+c)^{1-\gamma}}.$$

После замены $u = 1/w$ получаем

$$I_2 = \int_0^1 \frac{u^{\frac{5}{2}}du}{(1+u^2)^{\frac{5}{4}+\gamma}(1+cu^2)^{1-\gamma}} = C_1 + c\int_0^1 h_0(u,\tilde{c})du,$$

где $0 < \tilde{c} < c$, $h_0(u,\tilde{c})$ — ограниченная функция при $u \in [0,1]$, $\tilde{c} \to 0$,

$$C_1 = \int_0^1 \frac{u^{\frac{5}{2}}du}{(1+u^2)^{\frac{5}{4}}}. \tag{6}$$

Таким образом,

$$I_2 = C_1 + O(\varepsilon^2). \tag{7}$$

Рассмотрим теперь интеграл I_1. Пользуясь разложением

$$\frac{1}{(1+w^2)^{\frac{5}{4}+\gamma}} = 1 - \left(\frac{5}{4}+\gamma\right)w^2 + w^4 g_1(w,\gamma),$$

получим

$$I_1 = J_0 - \left(\frac{5}{4}+\gamma\right)J_1 + J_2, \tag{8}$$

где

$$J_0 = \int_0^1 \frac{dw}{(w^2+c)^{1-\gamma}}, \quad J_1 = \int_0^1 \frac{w^2dw}{(w^2+c)^{1-\gamma}}, \quad J_2 = \int_0^1 \frac{w^4 g_1(w,\gamma)dw}{(w^2+c)^{1-\gamma}}, \tag{9}$$

$g_1(w,\gamma)$ — ограниченная функция при $w \in [0,1]$, $\gamma \to 0$.

Разложим подынтегральную функцию в J_2 по теореме Лагранжа: $J_2 = C_0 + R_1 c$, где

$$C_0 = \int_0^1 w^2 g_1(w,0)dw = \int_0^1 w^{-2}\left(\frac{1}{(1+w^2)^{\frac{5}{4}}} - 1 + \frac{5}{4}w^2\right)dw, \ R_1 = \int_0^1 h(w,\tilde{c})dw, \tag{10}$$

$$h(w,\tilde{c}) = \frac{w^2 h_1(w,\tilde{c})}{(w^2+\tilde{c})^{1-\tilde{\gamma}}} + \frac{w^4 h_2(w,\tilde{c})\ln(w^2+\tilde{c})}{(w^2+\tilde{c})^{1-\tilde{\gamma}}} + \frac{w^4 h_3(w,\tilde{c})}{(w^2+\tilde{c})^{2-\tilde{\gamma}}},$$

$0 < \tilde{c} < c$, $0 < \tilde{\gamma} < \gamma$, $h_i(w,\tilde{c})$, $i = 1,2,3$, ограничены при $w \in [0,1]$, $\tilde{c} \to 0$. Отсюда следует ограниченность R_1 при $c \to 0$ и, следовательно,

$$J_2 = C_0 + O(\varepsilon^2). \tag{11}$$

Исследуем интеграл J_0 из (9). После замены $w = \varepsilon y$ получаем $J_0 = \varepsilon^{-1+2\gamma}J_{00}$, где

$$J_{00} = \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{dy}{(1+y^2)^{1-\gamma}}.$$

Раскладывая подынтегральную функцию в J_{00} по γ, получаем

$$J_{00} = \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{dy}{1+y^2} + \gamma\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\ln(1+y^2)dy}{(1+y^2)^{1-\tilde{\gamma}}} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Отсюда
$$J_0 = \varepsilon^{-1}\left(\varepsilon^{2\gamma} J_{00}\right) = \varepsilon^{-1}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon + \frac{\pi}{4}\varepsilon^2 \ln(\varepsilon) + O(\varepsilon^2)\right). \tag{12}$$

Согласно [8]
$$J_1 = 1 - \frac{\pi}{2}\varepsilon + O(\varepsilon^2). \tag{13}$$

Из формул (7), (8), (11)–(13) получаем
$$K_0(\varepsilon) = I_1 + I_2 = \varepsilon^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + \left(C_0 + C_1 - \frac{9}{4}\right)\varepsilon + \frac{\pi}{4}\varepsilon^2 \ln(\varepsilon) + O(\varepsilon^2)\right). \tag{14}$$

Исследуем теперь интеграл $K_2(\varepsilon) = H_1 + H_2$, где
$$H_1 = \int\limits_0^1 \frac{w^2 dw}{(1+w^2)^{\frac{5}{4}+\gamma}(w^2+c)^{1-\gamma}}, \quad H_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{w^2 dw}{(1+w^2)^{\frac{5}{4}+\gamma}(w^2+c)^{1-\gamma}}.$$

Аналогично (7) получаем
$$H_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{2}} du}{(1+u^2)^{\frac{5}{4}+\gamma}(1+cu^2)^{1-\gamma}} = C_2 + O(\varepsilon^2), \tag{15}$$

где
$$C_2 = \int\limits_0^1 \frac{u^{\frac{1}{2}} du}{(1+u^2)^{\frac{5}{4}}}. \tag{16}$$

Из разложения
$$\frac{1}{(1+w^2)^{\frac{5}{4}+\gamma}} = 1 + w^2 g_2(w,c)$$
получаем, что $H_1 = J_1 + H_{11}$, где
$$H_{11} = \int\limits_0^1 \frac{w^4 g_2(w,\gamma) dw}{(w^2+c)^{1-\gamma}}.$$

Аналогично J_2 получаем $H_{11} = C_3 + O(\varepsilon^2)$, где
$$C_3 = \int\limits_0^1 w^2 g_2(w,0) dw = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{(1+w^2)^{\frac{5}{2}}} - 1\right) dw. \tag{17}$$

С учётом (13), (15)
$$K_2(\varepsilon) = 1 + C_2 + C_3 - \frac{\pi}{2}\varepsilon + O(\varepsilon^2). \tag{18}$$

Разделив (18) на (14), получаем асимптотику $\alpha = \mu(\varepsilon)$:
$$\alpha = A\varepsilon + B\varepsilon^2 + C\ln(\varepsilon)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^3),$$

где $A = \frac{2}{\pi}(1+C_2+C_3)$, $B = -1 - \frac{4}{\pi^2}(1+C_2+C_3)\left(C_0 + C_1 - \frac{9}{4}\right)$, $C = -\frac{1}{\pi}(1+C_2+C_3)$. Вычисляя приближённо интегралы (6), (10), (16), (17), получим приближённые значения коэффициентов: $A \approx 0.7627$, $B \approx -0.1273$, $C \approx -0.3814$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Граница устойчивости $\alpha = \mu(\varepsilon)$ в классе M_1 имеет асимптотическое разложение вида $\alpha = A\varepsilon + B\varepsilon^2 + C\ln(\varepsilon)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^3)$, где $C \neq 0$.*

Следствие 1. *Проблема устойчивости в замыкании класса M_1 аналитически неразрешима.*

Следствие 2. *Проблема устойчивости особой точки аналитического векторного поля на плоскости аналитически неразрешима.*

Список литературы

1. **Арнольд, В. И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения — 1 / В. И. Арнольд, Ю. С. Ильяшенко // Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики. Фундамент. направления. — 1985. — Т. 1. — С. 7–149.
2. **Il'yashenko, Yu. S.** Finiteness Theorems for Limit Cycles / Yu. S. Il'yashenko. — Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 1991. — 289 p.
3. **Арнольд, В. И.** О локальных задачах анализа / В. И. Арнольд // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1970. — № 2. — С. 52–56.
4. **Ильяшенко, Ю. С.** Алгебраически и аналитически разрешимые локальные задачи теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. С. Ильяшенко // Тр. семинара им. И. П. Петровского. — 1987. — № 12. — С. 118–136.
5. **Медведева, Н. Б.** Об аналитической разрешимости проблемы различения центра и фокуса / Н. Б. Медведева // Тр. Ин-та математики им. В. А. Стеклова. — 2006. — № 254. — С. 11–100.
6. **Ильяшенко, Ю. С.** Алгебраическая неразрешимость и почти алгебраическая разрешимость проблемы центр — фокус / Ю. С. Ильяшенко // Функц. анализ и его приложения. — 1972. — Т. 6, № 3. — С. 30–37.
7. **Медведева, Н. Б.** Об аналитической разрешимости проблемы различения центра и фокуса / Н. Б. Медведева // Докл. Академии наук. — 2004. — Т. 394, № 6. — С. 735–738.
8. **Медведева, Н. Б.** Об аналитической неразрешимости проблемы устойчивости на плоскости / Н. Б. Медведева // Успехи мат. наук. — 2013. — Т. 68, № 5. — С. 147–176.
9. **Воронин, А. С.** Асимптотика преобразования монодромии в некоторых классах монодромных ростков / А. С. Воронин, Н. Б. Медведева // Изв. РАН. Сер. мат. — 2013. — Т. 77, № 2. — С. 35–52.
10. **Медведева, Н. Б.** Асимптотическое разложение преобразования монодромии / Н. Б. Медведева // Челяб. физ.-мат. журн. — 2016. — Т. 1, вып. 1. — С. 59–72.

Поступила в редакцию 23.07.2019
После переработки 09.09.2019

Сведения об авторах

Медведева Наталия Борисовна, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной математики, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: medv@csu.ru.

Викторова Валерия Андреевна, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: valeriaviktorova4@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2019. Vol. 4, iss. 3. P. 276–284.

DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14303

THE BOUNDARY OF STABILITY IN A SIMPLE CLASS OF MONODROMIC GERMS

N.B. Medvedeva[a], **V.A. Viktorova**[b]

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
[a]*medv@csu.ru*, [b]*valeriaviktorova4@gmail.com*

A two-parameter family of vector fields is constructed with a monodromic singular point and with a Newton diagram consisting of one edge. For this family, the conditions of "nondegeneracy" are satisfied, allowing it to be assigned to a class with a simple monodromic singular point. The asymptotics of the stability boundary in this family is constructed, which contains terms with a logarithm, which implies the analytical unsolvability of the stability problem in the closure of this class of vector fields with a simple monodromic singular point.

Keywords: *monodromic singular point, focus, center, monodromy transformation, Newton diagram, stability boundary, analytic solvability.*

References

1. **Arnol'd V.I.** Obyknovennye differentsial'nye uravneniya — 1 [Ordinary differential equations — 1]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya* [Results of science and technology. Contemporary problems of mathematics. Fundamental directions], 1985, vol. 1, pp. 7–149. (In Russ.).
2. **Il'yashenko Yu.S.** *Finiteness Theorems for Limit Cycles.* Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 1991. 289 p.
3. **Arnold V.I.** O lokal'nykh zadachakh analiza [On local problems of analysis]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics], 1970, vol. 2, pp. 52–56. (In Russ.).
4. **Il'yashenko Yu.S.** Algebraicheski i analiticheski razreshimye lokal'nye zadachi teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Algebraically and analytically solvable local problems of the theory of ordinary differential equations]. *Trudy seminara imeni I.G. Petrovskogo* [Proceedings of I.G. Petrovskiy workshop], 1987, no. 12, pp. 118–136. (In Russ.).
5. **Medvedeva N.B.** On the analytic solvability of the problem of distinguishing between center and focus. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2006, vol. 254, pp. 7–93.
6. **Il'yashenko Yu.S.** Algebraic nonsolvability and almost algebraic solvability of the center — focus problem. *Functional Analysis and Its Applications*, 1972, vol. 6, no. 3, pp. 197–202.
7. **Medvedeva N.B.** On an analytic solvability of the center — focus problem. *Doklady Mathematics*, 2004, vol. 69, no. 1, pp. 120–122.
8. **Medvedeva N.B.** On analytic insolubility of the stability problem on the plane. *Russian Mathematical Surveys*, 2013, vol. 68, no. 5, pp. 923–950.
9. **Voronin A.S., Medvedeva N.B.** Asymptotics of the monodromy transformation in certain classes of monodromy germs. *Izvestiya: Mathematics*, 2013, vol. 77, no. 2, pp. 253–270.

The work is partially supported by the RFBR (grant 17-01-00739_a).

10. **Medvedeva N.B.** Asimptoticheskoye razlozheniye preobrazovaniya monodromii [Asymptotic expansion of a monodromy map]. *Chelyabinskiy fiziko-matematicheskiy zhurnal* [Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal], 2016, vol. 1, iss. 1, pp. 59–72. (In Russ.).

Accepted article received 23.07.2019
Corrections received 09.09.2019