

## ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ ЯНГА — БАКСТЕРА И СООТВЕТСТВУЮЩЕМ ИНВАРИАНТЕ УЗЛОВ

К. С. Асаулко<sup>1,a</sup>, Ф. Г. Кораблёв<sup>1,2,b</sup>

<sup>1</sup>Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

<sup>2</sup>Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

<sup>a</sup>kristyaas@mail.ru, <sup>b</sup>korablev@csu.ru

Работа посвящена построению одного оператора Янга — Бакстера на двумерном векторном пространстве и изучению свойств соответствующего инварианта ориентированных узлов и зацеплений. Найден явный вид скейн-соотношения, которому удовлетворяет этот инвариант, и доказано, что этот инвариант не является следствием полинома HOMFLY. В конце работы приводится таблица значений инварианта для всех ориентированных узлов и зацеплений, допускающих диаграммы с не более чем семью двойными точками.

**Ключевые слова:** оператор Янга — Бакстера, группа кос, полином HOMFLY, инвариант узлов.

### Введение

В 1988 г. в статье [1] В. Тураев предложил способ построения инвариантов ориентированных узлов и зацеплений с помощью так называемых оснащённых операторов Янга — Бакстера. Его подход основан на использовании представлений групп кос (см., например, [2]). В этой же статье [1] было показано, что полином HOMFLY [3] и полином Джонса [4] являются частными реализациями предложенного способа.

В настоящей работе строится один конкретный оснащённый оператор Янга — Бакстера. Этот оператор задан на двумерном векторном пространстве и имеет два комплексных параметра. Изучаются некоторые свойства соответствующего инварианта узлов и зацеплений. В частности, доказывается, что этот инвариант не является следствием полинома HOMFLY. В конце приводится таблица с результатами вычислений значений инварианта для узлов и зацеплений, допускающих диаграммы с не более чем семью двойными точками.

### 1. Оператор Янга — Бакстера $\mathcal{R}$

**Определение 1.** Пусть  $V$  —  $n$ -мерное векторное пространство над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ . Линейный оператор  $R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  называется *оператором*

---

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 17-01-00690) и фонда перспективных научных исследований ЧелГУ.

Янга — Бакстера на пространстве  $V$ , если он обратим и удовлетворяет условию

$$(R \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes R) \circ (R \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes R) \circ (R \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes R),$$

где  $\text{id}: V \rightarrow V$  — тождественное отображение.

Для определённости будем считать, что суперпозиция линейных операторов записывается в алгебраической форме, то есть читается слева направо: если  $\varphi, \psi$  — два линейных оператора на векторном пространстве, то  $(\varphi \circ \psi)(x) = \psi(\varphi(x))$ .

Пусть на векторном пространстве  $V$  фиксирован базис  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Как это принято в линейной алгебре, матрицу линейного оператора  $\varphi: V \rightarrow V$  в этом фиксированном базисе будем обозначать  $[\varphi]$ . Векторное пространство  $V \otimes V$  обладает естественным базисом

$$\{e_1 \otimes e_1, \dots, e_1 \otimes e_n, e_2 \otimes e_1, \dots, e_2 \otimes e_n, \dots, e_n \otimes e_n\}.$$

В этом базисе оператор Янга — Бакстера  $R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  задаётся матрицей  $[R]$  размера  $n^2 \times n^2$ .

Пусть  $\mathcal{V}$  — двумерное векторное пространство, и пусть  $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$  — его некоторый фиксированный базис. Обозначим  $\mathcal{R}: \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$  линейный оператор, заданный матрицей

$$[\mathcal{R}] = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ b & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & b & a & 0 \end{pmatrix},$$

где  $a, b \in \mathbb{C}$ .

**Теорема 1.** При  $a \neq b$  оператор  $\mathcal{R}$  является оператором Янга — Бакстера на двумерном векторном пространстве  $\mathcal{V}$ .

*Доказательство.* Покажем сначала, что матрица  $[\mathcal{R}]$  обратима, явно вычислив обратную к ней:

$$[\mathcal{R}]^{-1} = \frac{1}{a^2 - b^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -b & a & 0 \\ a & 0 & 0 & -b \\ -b & 0 & 0 & a \\ 0 & a & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Для проверки того, что оператор  $\mathcal{R}$  действительно является оператором Янга — Бакстера, достаточно вычислить две матрицы  $A = [\mathcal{R} \otimes \text{id}]$  и  $B = [\text{id} \otimes \mathcal{R}]$ , а потом проверить, что  $A \cdot B \cdot A = B \cdot A \cdot B$ . Вычисляем:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & a & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
& A \cdot B \cdot A = B \cdot A \cdot B = \\
& = \begin{pmatrix} 0 & a^2b + ab^2 & a^3 + b^3 & 0 & a^2b + ab^2 & 0 & 0 & a^2b + ab^2 \\ a^2b + ab^2 & 0 & 0 & a^2b + ab^2 & 0 & a^2b + ab^2 & a^3 + b^3 & 0 \\ a^3 + b^3 & 0 & 0 & a^2b + ab^2 & 0 & a^2b + ab^2 & a^2b + ab^2 & 0 \\ 0 & a^2b + ab^2 & a^2b + ab^2 & 0 & a^3 + b^3 & 0 & 0 & a^2b + ab^2 \\ a^2b + ab^2 & 0 & 0 & a^3 + b^3 & 0 & a^2b + ab^2 & a^2b + ab^2 & 0 \\ 0 & a^2b + ab^2 & a^2b + ab^2 & 0 & a^2b + ab^2 & 0 & 0 & a^3 + b^3 \\ 0 & a^3 + b^3 & a^2b + ab^2 & 0 & a^2b + ab^2 & 0 & 0 & a^2b + ab^2 \\ a^2b + ab^2 & 0 & 0 & a^2b + ab^2 & 0 & a^3 + b^3 & a^2b + ab^2 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Основной нетривиальный момент в теореме 1 состоит не в доказательстве (оно довольно простое), а в том, чтобы найти явный вид матрицы  $[\mathcal{R}]$ . Общего или универсального способа нахождения таких операторов не известно.

## 2. Инвариант $\mathcal{I}$

Пусть  $V$  —  $n$ -мерное векторное пространство,  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — его базис,  $s \in \mathbb{N}$ , и пусть  $\text{Hom}_s(V)$  — множество всех линейных операторов на пространстве

$$V^{\otimes s} = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{s \text{ раз}}.$$

**Определение 2.** Операторным следом называется отображение  $\text{OTr}: \text{Hom}_2(V) \rightarrow \text{Hom}_1(V)$ , которое каждому линейному оператору  $\varphi: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  сопоставляет линейный оператор  $\text{OTr}(\varphi): V \rightarrow V$  по следующему правилу:

$$\text{OTr}(\varphi)(e_i) = \sum_{j,s=1}^n \varphi_{is}^{js} e_j,$$

где  $\varphi_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}$  — коэффициент перед вектором  $e_{j_1} \otimes e_{j_2}$  в разложении образа  $\varphi(e_{i_1} \otimes e_{i_2})$  по естественному базису пространства  $V \otimes V$ .

**Определение 3.** Пусть  $R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  — оператор Янга — Бакстера на векторном пространстве  $V$ ,  $t: V \rightarrow V$  — линейный оператор, и  $c \in \mathbb{C}, c \neq 0$ . Тройка  $(R, t, c)$  называется *оснащённым оператором Янга — Бакстера* на векторном пространстве  $V$ , если выполняются следующие условия:

- 1)  $t \otimes t \circ R = R \circ t \otimes t$ ;
- 2)  $\text{OTr}(R \circ t \otimes t) = c \cdot t$ ;
- 3)  $\text{OTr}(R^{-1} \circ t \otimes t) = c^{-1} \cdot t$ .

Обозначим через  $\mu: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  линейный оператор на двумерном векторном пространстве  $\mathcal{V}$ , который в фиксированном базисе  $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$  этого пространства задаётся матрицей

$$[\mu] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 2.** Тройка  $(\mathcal{R}, \mu, a + b)$  является *оснащённым оператором Янга — Бакстера* на двумерном векторном пространстве  $\mathcal{V}$ .

*Доказательство.* Проверим первое свойство определения 3. Для этого вычисляем:

$$[\mu \otimes \mu] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathcal{R}] \cdot [\mu \otimes \mu] = [\mu \otimes \mu] \cdot [\mathcal{R}] = \begin{pmatrix} 0 & b & a & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & a & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Для проверки второго свойства определения 3 вычисляем

$$[\text{OTr}(\mathcal{R} \circ \mu \otimes \mu)] = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a+b & 0 \end{pmatrix} = (a+b) \cdot [\mu].$$

Третье свойство определения 3 проверяется аналогично:

$$[\text{OTr}(\mathcal{R}^{-1} \circ \mu \otimes \mu)] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a-b}{a^2-b^2} \\ \frac{a-b}{a^2-b^2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a+b} \cdot [\mu].$$

□

Аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 2, можно проверить, что оснащёнными операторами Янга — Бакстера на пространстве  $\mathcal{V}$  также являются наборы  $(-\mathcal{R}, -\mu, a+b)$ ,  $(\mathcal{R}, \frac{1}{2} \cdot (\mu + \text{id}), a+b)$ ,  $(\mathcal{R}, -\frac{1}{2}(\mu + \text{id}), a+b)$ ,  $(\mathcal{R}, \frac{1}{2} \cdot (\mu - \text{id}), a+b)$  и  $(\mathcal{R}, \frac{1}{2} \cdot (\text{id} - \mu), a+b)$ .

Опишем способ из работы [1], с помощью которого каждый оснащённый оператор Янга — Бакстера порождает инвариант ориентированных узлов и зацеплений. Пусть  $B_k$  — группа кос на  $k$  нитях. Стандартное копредставление этой группы имеет следующий вид:

$$B_k = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \text{ если } |i-j| \geq 2, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \text{ для всех } i \in \{1, \dots, k-2\} \rangle.$$

Каждому оператору Янга — Бакстера  $R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  на векторном пространстве  $V$  сопоставим представление  $\rho_R: B_k \rightarrow \text{Hom}_k(V)$ . Для этого каждой образующей  $\sigma_i$  группы  $B_k$  сопоставим линейный оператор  $\rho_i: V^{\otimes k} \rightarrow V^{\otimes k}$  по правилу

$$\rho_i = \underbrace{\text{id} \otimes \dots \otimes \text{id}}_{i-1 \text{ раз}} \otimes R \otimes \underbrace{\text{id} \otimes \dots \otimes \text{id}}_{k-i-1 \text{ раз}}.$$

Для косы  $\xi = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots \sigma_{i_s}^{\varepsilon_s} \in B_k$ , где  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s \in \{-1, 1\}$ , образом представления является линейный оператор

$$\rho_R(\xi) = \rho_{i_1}^{\varepsilon_1} \circ \dots \circ \rho_{i_s}^{\varepsilon_s} \in \text{Hom}_k(V).$$

Так как  $R$  является оператором Янга — Бакстера, то линейный оператор  $\rho_R(\xi)$  корректно определён.

Элементы группы кос  $B_k$  и операторы  $\rho_i$ ,  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ , допускают наглядную геометрическую интерпретацию. Каждую образующую  $\sigma_i$  группы  $B_k$  можно представлять в виде набора из  $k$  монотонных нитей в трёхмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Нижний конец нити с номером  $s$ ,  $s = 1, \dots, k$ , имеет координату  $(s, 0, 0)$ . Верхний конец всех нитей с номерами  $s \neq i, i+1$  имеет координату  $(s, 0, 1)$ , и эти нити являются прямолинейными отрезками. Нити с номерами  $i$  и  $i+1$  образуют перекрёсток, в котором верхней дугой является нить с нижним концом в точке с координатами  $(i, 0, 0)$  и верхним концом в точке с координатами  $(i+1, 0, 1)$ , а нижней дугой

является нить с нижним концом в точке с координатами  $(i + 1, 0, 0)$  и верхним концом в точке с координатами  $(i, 0, 1)$  (рис. 1, слева). Элемент  $\sigma_i^{-1}$  группы  $B_k$  допускает аналогичную геометрическую интерпретацию, которая отличается тем, что в ней верхняя дуга образована нитью, нижний конец которой имеет координаты  $(i + 1, 0, 0)$ , а верхний конец — координаты  $(i, 0, 1)$  (рис. 1, справа). С этой геометрической точки зрения результат умножения  $\xi_1 \cdot \xi_2$  состоит в приставлении второй косы  $\xi_2$  к первой косе  $\xi_1$  сверху.



Рис. 1. Геометрическая интерпретация образующей  $\sigma_i \in B_k$  (слева) и  $\sigma_i^{-1} \in B_k$  (справа)

Сопоставим каждой точке с координатами  $(1, 0, 0), \dots, (k, 0, 0)$  векторное пространство  $V$ , а всему набору этих точек — тензорное произведение  $V^{\otimes k}$  этих пространств. Точно так же сопоставим векторное пространство  $V$  каждой точке с координатами  $(1, 0, 1), \dots, (1, 0, k)$ , а всему набору этих точек — пространство  $V^{\otimes k}$ . Тогда оператор  $\rho_i: V^{\otimes k} \rightarrow V^{\otimes k}$  действует следующим образом: на экземплярах пространства  $V$ , которые соответствуют вертикальным нитям, он тождественен, а на пространстве  $V \otimes V$ , которое соответствует паре перекрещенных нитей, он действует с помощью оператора  $R$  (рис. 2).

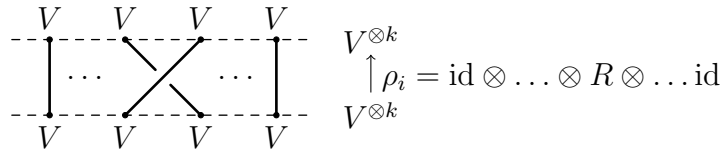


Рис. 2. Геометрическая интерпретация оператора  $\rho_i$

Пусть  $\xi \in B_k$  — коса на  $k$  нитях. Её замыканием называется зацепление  $\bar{\xi}$ , которое получается из геометрической интерпретации косы  $\xi$  добавлением  $k$  незацеплённых дуг, соединяющих верхние и нижние точки косы. Естественная ориентация компонент замыкания косы определяется ориентацией всех нитей этой косы снизу вверх. Хорошо известно, что каждое ориентированное зацепление можно представить в виде замыкания косы (см. например [2, Теорема 2.3] или [5]). На рис. 3 изображён пример косы, замыкание которой является узлом «восьмёрка». Идея построения инварианта состоит в том, чтобы каждой косе сопоставить комплексное число так, чтобы эти числа совпадали для любой пары кос, замыкания которых являются эквивалентными зацеплениями.

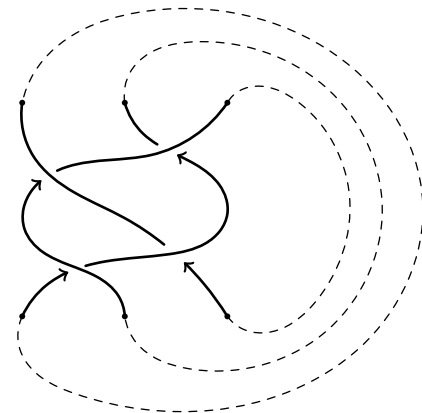


Рис. 3. Коса на трёх нитях, замыкание которой является узлом «восьмёрка»

**Определение 4.** Пусть  $(R, m, c)$  — оснащённый оператор Янга — Бакстера на векторном пространстве  $V$ , и пусть  $\xi = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{i_s}^{\varepsilon_s} \in B_k$  — коса. Положим  $I_{(R, m, c)}(\bar{\xi}) = c^{-\omega(\xi)} \cdot \text{Tr}(\rho_R(\xi) \circ m^{\otimes k})$ , где

$$m^{\otimes k} = \underbrace{m \otimes \dots \otimes m}_{k \text{ раз}}$$

$\text{Tr}: \text{Hom}_1(V) \rightarrow \mathbb{C}$  — обычный след линейного оператора, т. е. сумма диагональных элементов матрицы этого оператора,  $\omega(\xi) = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s$ .

В работе [1] доказано, что свойства оснащённого оператора Янга — Бакстера  $(R, m, c)$  являются достаточными для корректности инварианта  $I_{(R, m, c)}$ . Обозначим  $\mathcal{I} = I_{(\mathcal{R}, \mu, a+b)}$ . Значением инварианта  $\mathcal{I}$  для произвольного ориентированного зацепления является дробно рациональная функция от двух комплексных переменных  $a$  и  $b$ .

### 3. Свойства инварианта $\mathcal{I}$

**Теорема 3.** Пусть  $U_s$  — тривиальное  $s$ -компонентное зацепление. Тогда  $\mathcal{I}(U_s) = 0$ .

*Доказательство.* Имеем  $U_s = \bar{e}$ , где  $e$  — тривиальный элемент группы кос  $B_s$ . Тогда

$$\rho_{\mathcal{R}}(e) = \underbrace{\text{id} \otimes \dots \otimes \text{id}}_{s \text{ раз}}$$

и  $\omega(e) = 0$ . Так как  $\text{Tr}(m^{\otimes k}) = 0$ , окончательно находим, что

$$\mathcal{I}(U_s) = (a + b)^0 \cdot \text{Tr}(m^{\otimes k}) = 0.$$

□

**Теорема 4.** Пусть  $\eta_1, \eta_2 \in B_k$  — две произвольные косы на  $k$  нитях,  $\xi_{(2)} = \eta_1 \sigma_i^2 \eta_2$ ,  $\xi_{(-2)} = \eta_1 \sigma_i^{-2} \eta_2$ ,  $\xi_{(0)} = \eta_1 \eta_2$ , где  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Тогда

$$\frac{a+b}{a-b} \cdot \mathcal{I}(\overline{\xi_{(2)}}) - \frac{a-b}{a+b} \cdot \mathcal{I}(\overline{\xi_{(-2)}}) = \frac{4ab}{a^2 - b^2} \cdot \mathcal{I}(\overline{\xi_{(0)}}).$$

*Доказательство.* Заметим, что

$$\frac{1}{a^2 - b^2} \cdot [\mathcal{R}]^2 - (a^2 - b^2) \cdot [\mathcal{R}]^{-2} = \frac{4ab}{a^2 - b^2} \cdot E,$$

где  $E$  — единичная матрица размера  $4 \times 4$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2 - b^2} \cdot [\text{id}^{\otimes i-1} \otimes (\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) \otimes \text{id}^{\otimes k-i-1}] - \\ & - (a^2 - b^2) \cdot [\text{id}^{\otimes i-1} \otimes (\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1}) \otimes \text{id}^{\otimes k-i-1}] = \frac{4ab}{a^2 - b^2} \cdot [\text{id}^{\otimes k}], \end{aligned}$$

где  $\text{id}^{\otimes s} = \underbrace{\text{id} \otimes \dots \otimes \text{id}}_{s \text{ раз}}$  при  $s = i-1, k-i-1, k$ . Заметим, что в этом выражении

$[\text{id}^{\otimes i-1} \otimes (\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) \otimes \text{id}^{\otimes k-i-1}] = [\rho_{\mathcal{R}}(\sigma_i^2)]$ ,  $[\text{id}^{\otimes i-1} \otimes (\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1}) \otimes \text{id}^{\otimes k-i-1}] = [\rho_{\mathcal{R}}(\sigma_i^{-2})]$ . Следовательно, умножив обе части этого выражения слева на  $[\rho_{\mathcal{R}}(\eta_2)]$  и справа на  $[\rho_{\mathcal{R}}(\eta_1)]$ , получим равенство

$$\frac{1}{a^2 - b^2} \cdot [\rho_{\mathcal{R}}(\xi_{(2)})] - (a^2 - b^2) \cdot [\rho_{\mathcal{R}}(\xi_{(-2)})] = \frac{4ab}{a^2 - b^2} \cdot [\rho_{\mathcal{R}}(\xi_{(0)})].$$

Далее умножим обе части этого равенства слева на матрицу  $[\mu^{\otimes k}]$  и возьмём след от обеих частей равенства. Получим

$$\frac{1}{a^2 - b^2} \cdot \text{Tr}(\rho_{\mathcal{R}}(\xi_{(2)}) \circ \mu^{\otimes k}) - (a^2 - b^2) \cdot \text{Tr}(\rho_{\mathcal{R}}(\xi_{(-2)}) \circ \mu^{\otimes k}) = \frac{4ab}{a^2 - b^2} \cdot \text{Tr}(\rho_{\mathcal{R}}(\xi_{(0)}) \circ \mu^{\otimes k}).$$

Умножив обе части равенства на  $(a + b)^{-\omega(\eta_1) - \omega(\eta_2)}$  и заметив, что

$$(a + b)^{-\omega(\eta_1) - \omega(\eta_2)} \cdot \text{Tr}(\rho_{\mathcal{R}}(\xi_{(2)})) = (a + b)^2 \cdot \mathcal{I}(\overline{\xi_{(2)}}),$$

$$(a + b)^{-\omega(\eta_1) - \omega(\eta_2)} \cdot \text{Tr}(\rho_{\mathcal{R}}(\xi_{(-2)})) = \frac{1}{(a + b)^2} \cdot \mathcal{I}(\overline{\xi_{(-2)}}),$$

$$(a + b)^{-\omega(\eta_1) - \omega(\eta_2)} \cdot \text{Tr}(\rho_{\mathcal{R}}(\xi_{(0)})) = \mathcal{I}(\overline{\xi_{(0)}}),$$

получим

$$\frac{(a + b)^2}{a^2 - b^2} \cdot \mathcal{I}(\overline{\xi_{(2)}}) - \frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2} \cdot \mathcal{I}(\overline{\xi_{(-2)}}) = \frac{4ab}{a^2 - b^2} \cdot \mathcal{I}(\overline{\xi_{(0)}}).$$

□

Соотношение в формулировке теоремы 4 фактически связывает между собой значения инварианта  $\mathcal{I}$  для трёх зацеплений  $L_{++}$ ,  $L_{--}$  и  $L_0$ . Диаграммы этих зацеплений совпадают всюду, кроме одной локальной области, в которой у зацепления  $L_{++}$  содержатся две положительные двойные точки, у зацепления  $L_{--}$  содержатся две отрицательные двойные точки, а у зацепления  $L_0$  в этой области двойных точек вообще нет (см. рис. 4).

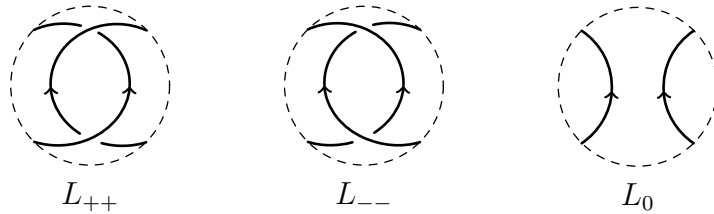


Рис. 4. Диаграммы трёх зацеплений  $L_{++}$ ,  $L_{--}$  и  $L_0$  совпадают всюду, кроме одной локальной области, внутри которой они выглядят так, как изображено слева, в центре и справа соответственно

Многие известные полиномиальные инварианты узлов и зацеплений (такие как полином Джонса, полином HOMFLY, полином Александера) удовлетворяют аналогичному, но более простому соотношению, в котором участвуют три зацепления  $L_+$ ,  $L_-$  и  $L_0$ . Диаграммы этих зацеплений отличаются только одной двойной точкой ([6, § 8.3], рис. 5). Например, наиболее сильный полином HOMFLY — это полином  $P$  двух неизвестных  $a, z$ , удовлетворяющий следующему соотношению (см. [7, § 2.7.1]):  $a \cdot P(L_+) - a^{-1} \cdot P(L_-) = z \cdot P(L_0)$ .

Это показывает, в частности, что инвариант  $\mathcal{I}$  не является следствием полинома HOMFLY.

В таблице приведены результаты вычисления значений инварианта  $\mathcal{I}$  для всех узлов и зацеплений, допускающих диаграммы с не более чем семью двойными точками. Наименования узлов и зацеплений, а также косы, задающие их, взяты из таблиц инвариантов узлов и зацеплений [8; 9]. Значение инварианта  $\mathcal{I}$  в общем случае меняется при смене ориентации одной из компонент зацепления, поэтому в таблице каждому зацеплению сопоставлено несколько значений инварианта, которые вычислены для всех различных выборов ориентаций компонент.

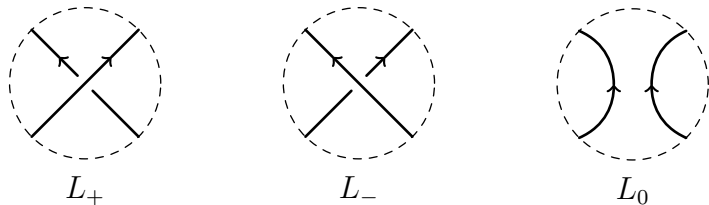


Рис. 5. Диаграммы зацеплений  $L_+$ ,  $L_-$  и  $L_0$  отличаются одной локальной областью, которая содержит положительную двойную точку (слева), отрицательную двойную точку (в центре) и вообще не содержит двойных точек (справа) соответственно

Из результатов вычислений следует, что информативность инварианта  $\mathcal{I}$  не очень высокая: его значение тривиально для всех рассмотренных узлов, а для рассмотренных зацеплений он принимает всего 6 различных значений. Причины

Значения инварианта  $\mathcal{I}$  для всех ориентированных зацеплений, допускающих диаграммы с не более чем семью двойными точками

Зацепление	Значение инварианта $\mathcal{I}$	Зацепление	Значение $\mathcal{I}$
$L2a1$	$4\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}, 4\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$	$7_1$	0
$3_1$	0	$7_2$	0
$4_1$	0	$7_3$	0
$L4a1$	$-16ab\frac{a^2+b^2}{(a-b)^4}, 16ab\frac{a^2+b^2}{(a+b)^4}$	$7_4$	0
$5_1$	0	$7_5$	0
$5_2$	0	$7_6$	0
$L5a1$	0, 0	$7_7$	0
$6_1$	0	$L7a1$	0, 0
$6_2$	0	$L7a2$	$\frac{-16ab(a^2+b^2)}{(a-b)^4}, \frac{16ab(a^2+b^2)}{(a+b)^4}$
$6_3$	0	$L7a3$	0, 0
$L6a1$	$-16ab\frac{a^2+b^2}{(a-b)^4}, 16ab\frac{a^2+b^2}{(a+b)^4}$	$L7a4$	0, 0
$L6a2$	$\frac{4(a^2+b^2)(a^4+14a^2b^2+b^4)}{(a-b)^6}, \frac{4(a^2+b^2)(a^4+14a^2b^2+b^4)}{(a+b)^6}$	$L7a5$	$4\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}, 4\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$
$L6a3$	$\frac{4(a^2+b^2)(a^4+14a^2b^2+b^4)}{(a-b)^6}, \frac{4(a^2+b^2)(a^4+14a^2b^2+b^4)}{(a+b)^6}$	$L7a6$	$4\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}, 4\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}$
$L6a4$	0, 0, 0, 0	$L7a7$	0, 0, 0, 0
$L6a5$	0, 0, 0, 0	$L7n1$	$\frac{-16ab(a^2+b^2)}{(a-b)^4}, \frac{16ab(a^2+b^2)}{(a+b)^4}$
$L6n1$	0, 0, 0, 0	$L7n2$	0, 0

этого и топологический смысл инварианта являются вопросами для дальнейшего изучения.

Хорошо известно, что преобразование диаграммы зацепления, которое меняет тип какой-нибудь одной её двойной точки, является преобразованием разузливания. Это означает, что диаграмма любого зацепления сводится к диаграмме тривиального зацепления с помощью конечной последовательности этих преобразований (см. [10]). Преобразование  $L_{++} \leftrightarrow L_{--}$ , которое состоит в одновременной замене двух соседних положительных точек диаграммы на две отрицательные двойные точки (или наоборот), не является преобразованием разузливания. Это следует из соотношения теоремы 4, из того, что  $\mathcal{I}(U_s) = 0$ , и из того, что существуют зацепления с ненулевым значением инварианта  $\mathcal{I}$ . Множество всех узлов и зацеплений разбивается на классы: два зацепления принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда от одного к другому можно перейти конечной последовательностью преобразований  $L_{++} \leftrightarrow L_{--}$ . Естественные вопросы состоят в том, сколько этих классов, какими свойствами обладают зацепления, принадлежащие одному классу, какова мощность каждого класса.

## Список литературы

1. **Turaev, V. G.** The Yang — Baxter equation and invariants of links / V. G. Turaev // *Inventiones Mathematicae*. — 1998. — Vol. 92. — P. 527–553.
2. **Kassel, C.** Braid Groups / C. Kassel, V. G. Turaev. — New York : Springer-Verlag, 2008. — X+338 p.
3. **Freyd, P.** A new polynomial invariant of knots and links / P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste [et al.] // *Bulletin of the American Mathematical Society*. — 1985. — Vol. 12. — P. 239–246.
4. **Jones, V. F. R.** A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras / V. F. R. Jones // *Bulletin of the American Mathematical Society*. — 1985. — Vol. 12. — P. 103–111.
5. **Alexander, J. W.** A lemma on systems of knotted curves / J. W. Alexander // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 1923. — Vol. 9. — P. 93–95.



6. **Матвеев, С. В.** Алгоритмические и компьютерные методы в трёхмерной топологии / С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко. — Москва : Изд-во МГУ, 1991. — 300 с.
7. **Chmutov, S.** Introduction to Vassiliev Knot Invariants / S. Chmutov, S. Duzhin, J. Mostovoy. — Cambridge University Press, 2012. — 520 p.
8. Table of Knot Invariants [Электронный ресурс]. URL: <http://www.indiana.edu/knotinfo/> (дата обращения: 01.07.2019).
9. Table of Link Invariants [Электронный ресурс]. URL: <http://www.indiana.edu/linkinfo/> (дата обращения: 01.07.2019).
10. **Murakami, H.** Some metrics on classical knots / H. Murakami // *Mathematische Annalen*. — 1985. — Vol. 270, no. 1. — P. 35–45.

*Поступила в редакцию 19.08.2019*

*После переработки 14.09.2019*

#### Сведения об авторах

**Асаулко Кристина Сергеевна**, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: [kristyaas@mail.ru](mailto:kristyaas@mail.ru).

**Кораблёв Филипп Глебович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной топологии и алгебры, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; научный сотрудник, отдел алгоритмической топологии, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия; e-mail: [korablev@csu.ru](mailto:korablev@csu.ru).

## ON A YANG — BAXTER OPERATOR AND THE CORRESPONDING KNOTS INVARIANT

**K.S. Asaulko<sup>1,a</sup>, Ph.G. Korablev<sup>1,2,b</sup>**

<sup>1</sup>*Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*

<sup>2</sup>*N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia*

<sup>a</sup>*kristyaas@mail.ru*, <sup>b</sup>*korablev@csu.ru*

The paper is devoted to construction of a Yang — Baxter operator over two-dimensional vector space. Properties of the corresponding invariant of oriented knot and links are studied. An explicit form of the skein relation of this invariant is presented. It's proved, that this invariant is not a consequence of the HOMFLY polynomial. At the end of the paper the table of invariant's values for all oriented knots and links that admit diagrams with at most seven crossing points is given.

**Keywords:** *Yang — Baxter operator, braid group, HOMFLY polynomial, knots invariant.*

## References

1. **Turaev V.G.** The Yang-Baxter equation and invariants of links. *Inventiones Mathematicae*, 1998, vol. 92, pp. 527–553.
2. **Kassel C., Turaev V.G.** Braid Groups. New York : Springer-Verlag, 2008. x+338 p.
3. **Freyd P., Yetter D., Hoste J. [et al.]**. A new polynomial invariant of knots and links. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1985, vol. 12, pp. 239–246.
4. **Jones V.F.R.** A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1985, vol. 12, pp. 103–111.
5. **Alexander J.W.** A lemma on systems of knotted curves. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1923, vol. 9, pp. 93–95.
6. **Matveev S.V., Fomenko A.T.** *Algoritmicheskiye i kompyuternyye metody v tryokhmernoy topologii* [Algorithmic and computer methods in three-dimensional topology]. Moscow, Moscow State University Publishing House, 1991. 300 p. (In Russ.).
7. **Chmutov S., Duzhin S., Mostovoy J.** *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*. Cambridge University Press, 2012. 520 p.
8. *Table of Knot Invariants*. Available at <http://www.indiana.edu/knotinfo/>, accessed 01.07.2019.
9. *Table of Link Invariants*. Available at <http://www.indiana.edu/linkinfo/>, accessed 01.07.2019.
10. **Murakami H.** Some metrics on classical knots. *Mathematische Annalen*, 1985, vol. 270, no. 1, pp. 35–45.

*Accepted article received 19.08.2019*

*Corrections received 14.09.2019*