Челябинский физико-математический журнал. 2019. Т. 4, вып. 2. С. 179–194.

УДК 517.956; 517.958; 517.986.7 DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14205

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ДИНАМИКЕ СИСТЕМЫ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Д. О. Цветков

Крымский федеральный университет, Таврическая академия, Симферополь, Россия
tsvetdo@gmail.com

Рассматривается линеаризованная задача о колебаниях системы слоёв несжимаемой идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой упругим льдом, который моделируется упругой пластиной. С использованием метода ортогонального проектирования граничных условий на движущуюся поверхность исходная начально-краевая задача редуцирована к эквивалентной задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию исходной гидросистемы.

Ключевые слова: *стратифицированная жидкость, упругий лёд, дифференциально-операторное уравнение, задача Коши в гильбертовом пространстве, сильное решение.*

Введение

В связи с новыми потребностями прикладных наук возрос интерес к изучению динамических характеристик жидкостей, обладающих разными специфическими свойствами. К таким жидкостям, в частности, относятся стратифицированные жидкости. Возникающие при этом начально-краевые задачи оказываются чрезвычайно своеобразными. В представленной работе рассматривается начально-краевая задача, которая описывает линейные колебания системы из двух идеальных стратифицированных жидкостей в ограниченном сосуде со свободной поверхностью, полностью покрытой упругим льдом.

Вопросы, связанные с численным анализом колебания плавающей упругой пластины (частным случаем является упругий лёд на поверхности жидкости), к настоящему времени сравнительно хорошо разработаны. Подробную библиографию по этому кругу вопросов можно найти в монографиях [1; 2].

Работа является продолжением исследований, начатых в работе [3], в которой изучалась задача о малых движениях системы идеальных стратифицированных жидкостей, полностью покрытой крошеным льдом. При этом был модифицирован изложенный в монографии [4] общий подход к задачам о колебаниях системы из несмешивающихся идеальных жидкостей, заполняющих произвольный сосуд. А именно: исходные объекты рассматривались не «наборами», а по отдельности, с исключением по ходу рассуждений тривиальных составляющих. В данной работе исходная задача, после исключения полей плотностей жидкости, сводится к дифференциально-операторному уравнению второго порядка в некотором гильбертовом пространстве, при этом структура операторных коэффициентов имеет более сложную структуру, чем в работе [3], что приводит к усложнению получения итоговой теоремы о разрешимости.

1. Математическая формулировка задачи

Рассмотрим неподвижный сосуд, частично заполненный системой из двух идеальных стратифицированных несжимаемых жидкостей, расположенных одна над другой (наподобие слоёного пирога) таким образом, что жидкость большей плотности занимает низшее (по отношению к ускорению силы тяжести) положение, выше располагается жидкость меньшей плотности. Жидкости предполагаются тяжёлыми и в силу этого действие капиллярных сил в задаче не учитывается. Обозначим через Ω_i $(i = 1, 2)$ область, занимаемую в состоянии покоя жидкостью плотности ρ_{0i} $(i = 1, 2)$, соответствующий участок твёрдой стенки — через S_i $(i = 1, 2)$. Представим $\Gamma = \partial\Omega_2 \setminus \overline{S_2} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 — это нижняя и верхняя границы области Ω_2 соответственно, причём Γ_2 полностью покрыта упругим льдом. Введём систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на поверхности раздела Γ_1. Обозначим через $\vec{n}_i$ $(i = 1, 2)$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_i$ $(i = 1, 2)$ и направленный вне Ω_i.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкостей по плотностям $\rho_{0i} = \rho_{0i}(x_3)$ $(i = 1, 2)$:

$$0 < N^2_{i,\min} \leq N^2_i(x_3) \leq N^2_{i,\max} =: N^2_{0,i} < \infty, \quad N^2_i(x_3) := -\frac{g\rho'_{0i}(x_3)}{\rho_{0i}(x_3)}.$$

Функции $N_i(x_3)$ $(i = 1, 2)$ называют частотами Вяйсяля — Брента или частотами плавучести. Физически $N_i(x_3)$ равна частоте колебаний, с которой частица жидкости, находящаяся на уровне $x_3 = \mathrm{const}$, будет колебаться в стратифицированной жидкости, если сместится с этого уровня.

Рассмотрим малые движения изучаемой гидросистемы, близкие к состоянию покоя. Пусть $\vec{u}_i$ $(i = 1, 2)$ — поля скоростей в жидкостях, а $\zeta_i = \zeta_i(t, \hat{x})$, $\hat{x} \in \Gamma_i$ представляют собой отклонение свободно движущихся поверхностей жидкостей $\Gamma_i(t)$ от Γ_i $(i = 1, 2)$ по нормали $\vec{n}_i$; $p_i = p_i(t, x)$, $x \in \Omega_i$ $(i = 1, 2)$ — отклонение полей давлений от равновесных; $\rho_i = \rho_i(t, x)$, $x \in \Omega_i$ $(i = 1, 2)$ — отклонения полей плотности от исходных $\rho_{0i}(x_3)$.

Линейная постановка начально-краевой задачи о колебаниях рассматриваемой гидросистемы выглядит следующим образом (см., например, [3; 5]):

$$\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} = \rho^{-1}_{0i}(x_3)(-\nabla p_i - \rho_i g \vec{e}_3) + \vec{f}_i \quad (\text{в } \Omega_i), \tag{1}$$

$$\begin{gathered}
\operatorname{div} \vec{u}_i = 0, \qquad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \rho_{0i} \cdot \vec{u}_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i), \\
\vec{u}_i \cdot \vec{n}_i = 0 \quad (\text{на } S_i), \qquad \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \\
p_1 - p_2 = \Delta\rho g \zeta_1, \quad \Delta\rho := \rho_{01} - \rho_{02} > 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \int_{\Gamma_i} \zeta_i d\Gamma_i = 0,
\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad p_2 = K\zeta_2 + \rho_0 \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial t^2} \quad (\text{на } \Gamma_2), \\
\vec{u}_i(0, x) = \vec{u}^0_i(x), \quad \rho_i(0, x) = \rho^0_i(x), \quad \zeta_i(0, \hat{x}) = \zeta^0_i(\hat{x}).
\end{gathered} \tag{3}$$

Последние три условия — это начальные условия, которые добавлены к задаче для полноты её формулировки, $\int_{\Gamma_i} \zeta_i \, d\Gamma_i = 0$ есть условия сохранения объёма. Линейный дифференциальный оператор K, задается дифференциальным выражением $K\zeta_2 := d\triangle_2^2\zeta_2 + \rho_{02}g\zeta_2$ на области определения

$$\mathcal{D}(K) = \left\{\zeta_2 \in C^4\left(\overline{\Gamma}_2\right) \mid \zeta_2 = \frac{\partial\zeta_2}{\partial\nu} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma_2)\right\},$$

где $\vec{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Gamma_2$, $d > 0$ — коэффициент жёсткости льда, ρ_0 — поверхностная плотность льда (см. подробнее [5]).

2. Вспомогательные утверждения

Приведённые ниже в этом пункте утверждения заимствованы из работ [3; 5].

2.1. Свойства оператора потенциальной энергии упругой части системы

Свяжем с поверхностью Γ_2 гильбертово пространство $L_2(\Gamma_2)$ со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{\Gamma_2} := \int_{\Gamma_2} \varphi(\hat{x})\,\psi(\hat{x})\, d\Gamma_2.$$

Лемма 1. *Оператор $K : \mathcal{D}(K) \subset L_2(\Gamma_2) \to L_2(\Gamma_2)$ является неограниченным симметричным положительно определённым оператором, действующим в $L_2(\Gamma_2)$.*

Замечание 1. Как известно, симметричный положительно определённый оператор, действующий в (вещественном) гильбертовом пространстве и заданный на плотном в этом пространстве множестве, допускает расширение по Фридрихсу до самосопряжённого положительно определённого оператора с той же нижней гранью. Поэтому далее будем считать, в силу леммы 1, что оператор K уже расширен по Фридрихсу на более широкое множество, обеспечивающее самосопряжённость расширенного оператора, который снова будем обозначать через K. Кроме того, $\mathcal{D}(K) \subset H_K$, где H_K — энергетическое пространство оператора K.

Теорема 1. *Оператор $K : \mathcal{D}(K) \subset L_2(\Gamma_2) \to L_2(\Gamma_2)$ (после расширения по Фридрихсу) — неограниченный самосопряжённый положительно определённый оператор. Энергетическое пространство $H_K \subset L_2(\Gamma_2)$ оператора K состоит из тех элементов из $L_2(\Gamma_2)$, для которых конечна квадратичная форма*

$$\|u\|_K^2 = (Ku, u) = \rho_{02}g\int_{\Gamma_2} |u|^2\, d\Gamma_2 + \\ + d\int_{\Gamma_2}\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2 + 2(1-\sigma)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right|^2 + 2\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right] d\Gamma_2\,,$$

причём $\mathcal{D}(K^{1/2}) = H_K$.

Замечание 2. Отметим, что если функция ζ_2 удовлетворяет условиям

$$\zeta_2 \in C^2(\overline{\Gamma}_2), \qquad \int_{\Gamma_2} \zeta_2 d\Gamma_2 = 0, \qquad \zeta_2 = \frac{\partial\zeta_2}{\partial\nu} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma_2), \tag{4}$$

то, как следует из доказанной теоремы, $\zeta_2 \in H_K$. Множество элементов, удовлетворяющих условиям (4), образуют множество гладких функций, всюду плотное в H_K.

2.2. Исключение полей плотностей

В начально-краевой задаче (1)–(3) можно исключить поля плотностей $\rho_i(t,x)$, если ввести взамен поля скорости $\vec{u}_i(t,x)$ поле малых смещений частиц жидкости $\vec{v}_i(t,x)$, связанных с $\vec{u}_i(t,x)$ соотношениями

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = \vec{u}_i, \quad \operatorname{div} \vec{v}_i = 0 \quad (i=1,2) \quad (\text{в}\, \Omega).$$

Тогда вместо (1) придём к связи

$$\begin{aligned}
&\rho_i(t,x) = -\nabla \rho_{0i} \cdot \vec{v}_i(t,x) + f_{i,0}(x) = -\rho_{0i}'(x_3) v_{i,3}(t,x) + f_{i,0}(x),\\
&f_{i,0}(x) := \rho_i(0,x) + \rho_{0i}'(x_3) v_{i,3}(0,x), \quad v_{i,3} := \vec{v}_i \cdot \vec{e}_3,
\end{aligned}$$

и к уравнениям для $\vec{v}_i(t,x)$ и $p_i(t,x)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \vec{v}_i}{\partial t^2} = -\rho_{0i}^{-1}(x_3) \nabla p_i - N_i^2(x_3) v_{i,3} \vec{e}_3 + \psi_{i,0}(x), \quad \operatorname{div} \vec{v}_i = 0 \quad (\text{в}\, \Omega_i),\\
&\psi_{i,0}(x) = \vec{f}_i(t,x) - g f_{i,0}(x) \vec{e}_3 / \rho_{0i}(x_3).
\end{aligned}$$

С учётом сказанного перепишем исходную задачу (1)–(3) в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \vec{v}_i}{\partial t^2} = -\rho_{0i}^{-1}(x_3) \nabla p_i - N_i^2(x_3) v_{i,3} \vec{e}_3 + \psi_{i,0}(x), \quad \operatorname{div} \vec{v}_i = 0 \quad (\text{в}\, \Omega_i),\\
&\vec{v} \cdot \vec{n} =: v_n = 0 \quad (\text{на}\, S), \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 \quad (\text{на}\, \Gamma_2), \quad \int_{\Gamma_i} v_{i,3} d\Gamma_i = 0,\\
&p_1 - p_2 = \Delta \rho g v_{1,3} \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad p_2 = K v_{2,3} + \rho_0 \frac{\partial^2 v_{2,3}}{\partial t^2} \quad (\text{на}\, \Gamma_2),\\
&\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t}(0,x) = \vec{u}_i(0,x) = \vec{u}_i^0(x), \quad \vec{v}_i(0,x) = \vec{v}_i^0(x),\\
&v_{i,3}(0,\hat{x}) = \zeta_i(0,\hat{x}) = \zeta_i^0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma_i), \quad i=1,2.
\end{aligned} \tag{5}$$

3. Метод ортогонального проектирования

Для области Ω_1 введём разложение пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_1, \rho_{01})$ в ортогональную сумму (см. [5]):

$$\vec{L}_2(\Omega_1, \rho_{01}) = \vec{J}_0(\Omega_1, \rho_{01}) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_{01}) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1, \rho_{01}), \tag{6}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_1, \rho_{01}) := \{\vec{u}_1 \,|\, \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \ (\text{в } \ \Omega_1), \ \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0 \ (\text{на } \ \partial\Omega_1)\},$$

$$\begin{aligned}
\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_{01}) : &= \{\vec{v}_1 \,|\, \vec{v}_1 = \rho_{01}^{-1}(x_3) \nabla p_1, \ \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0 \ (\text{на } \ S_1),\\
&\qquad \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0 \ (\text{в } \ \Omega_1), \ \int_{\Gamma_1} p_1 \, d\Gamma_1 = 0\},\\
\vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1, \rho_{01}) : &= \{\vec{w}_1 \,|\, \vec{w}_1 = \rho_{01}^{-1}(x_3) \nabla \varphi_1, \ \varphi_1 = 0 \ (\text{на } \ \Gamma_1)\}.
\end{aligned}$$

Будем считать $\vec{u}_1(t,x)$ и $\rho_{01}^{-1} \nabla p_1(t,x)$ функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega, \rho_{01})$, тогда в силу уравнений и граничных условий (5), ортогонального разложения (6) имеем

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1(t,x) &\in \vec{J}_0(\Omega_1, \rho_{01}) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_{01}) =: \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_{01}),\\
\rho_{01}^{-1} \nabla p_1(t,x) &\in \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1, \rho_{01}) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_{01}) =: \vec{G}(\Omega_1, \rho_{01}).
\end{aligned} \tag{7}$$

Поэтому при каждом t будем разыскивать их в виде

$$\begin{gathered}\vec{v}_1(t,x) = \vec{w}_1(t,x) + \rho_{01}^{-1}\nabla\Phi_1(t,x),\\ \vec{w}_1(t,x) \in \vec{J}_0(\Omega_1,\rho_{01}), \quad \rho_{01}^{-1}\nabla\Phi_1(t,x) \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1,\rho_{01}),\\ \rho_{01}^{-1}\nabla p_1(t,x) = \rho_{01}^{-1}\nabla p_{1,1}(t,x) + \rho_{01}^{-1}\nabla p_{1,2}(t,x),\\ \rho_{01}^{-1}\nabla p_{1,1}(x,t) \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1,\rho_{01}), \quad \rho_{01}^{-1}\nabla p_{1,2}(t,x) \in \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1,\rho_{01}).\end{gathered} \tag{8}$$

Обозначим через $P_{0,1}$, P_{h,S_1} и P_{0,Γ_1} ортопроекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega_1,\rho_{01})$, $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1,\rho_{01})$, $\vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1,\rho_{01})$ соответственно. Тогда, подставляя (8) в первое уравнение (5) для $i=1$ и применяя ортопроекторы, получаем

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\vec{w}_1}{\partial t^2} + P_{0,1}\left[N_1^2(x_3)\left(\rho_{01}^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3} + w_{1,3}\right)\vec{e}_3\right] = P_{0,1}\psi_{1,0}, &(9)\\ &\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_{01}^{-1}\nabla\Phi_1\right) + \rho_{01}^{-1}\nabla p_{1,1} + P_{h,S_1}\left[N_1^2(x_3)\left(\rho_{01}^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3} + w_{1,3}\right)\vec{e}_3\right] = P_{h,S_1}\psi_{1,0},&\\ &\rho_{01}^{-1}\nabla p_{1,2} + P_{0,\Gamma_1}\left[N_1^2(x_3)\left(\rho_{01}^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3} + w_{1,3}\right)\vec{e}_3\right] = P_{0,\Gamma_1}\psi_{1,0}. &(10)\end{aligned}$$

Замечание 3. Из (10) следует, что составляющая поля давлений, обусловленная слагаемым $\rho_{01}^{-1}\nabla p_{1,2}$, определяется лишь полем вертикального смещения $v_{1,3}$ и начальными условиями. Следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением первых двух соотношений, а также граничных условий и начальных данных с соответствующей заменой $p_1 \to p_{1,2}$, так как $p_1 = p_{1,1} + p_{1,2}$, $p_{1,2} = 0$ (на Γ_1).

Для области Ω_2 введём разложение пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_2,\rho_{02})$ в ортогональную сумму

$$\vec{L}_2(\Omega_2,\rho_{02}) = \vec{J}_0(\Omega_2,\rho_{02}) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2,\rho_{02}) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2,\rho_{02}). \tag{11}$$

Подпространство $\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2,\rho_{02})$ из (11) состоит из квазипотенциальных гармонических полей с нулевой нормальной составляющей на твёрдой стенке S_2, для которых также выполнено условие сохранения объёма по всей границе $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. В изучаемой задаче в силу несжимаемости жидкостей условие сохранения объёма должно выполняться на каждой из границ Γ_1 и Γ_2 в отдельности. Отсюда следует, что подпространство $\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2,\rho_{02})$ шире, чем требуется. В связи с этим воспользуемся разложением этого подпространства в ортогональную сумму двух подпространств, естественным образом приспособленных к данной задаче (см. подробнее в работе [6]):

$$G_{h,S_2}(\Omega_2,\rho_{02}) = \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02}) \oplus \{\alpha\,\rho^{-1}\nabla\varphi_0\}, \tag{12}$$

где $\{\alpha\,\varphi_0\}$ — одномерное подпространство, а функция φ_0 является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered}\nabla\cdot(\rho^{-1}\nabla\varphi_0) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho^{-1}\nabla\varphi_0\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } S),\\ \varphi_0 = \operatorname{mes}\Gamma_1 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \varphi_0 = -\operatorname{mes}\Gamma_2 \quad (\text{на } \Gamma_1);\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}&\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02}) := \{\vec{v}_2|\,\vec{v}_2 = \rho_{02}^{-1}(x_3)\nabla p,\ \nabla\cdot\vec{v}_2 = 0 \ (\text{в } \Omega),\\ &\qquad \vec{v}_2\cdot\vec{n}_1 = 0 \ (\text{на } S_2), \quad \int_{\Gamma_1}\frac{\partial p}{\partial n}\,d\Gamma_1 = 0, \quad \int_{\Gamma_2}\frac{\partial p}{\partial n}\,d\Gamma_2 = 0, \quad \int_{\Gamma} p\,d\Gamma = 0\}.\end{aligned}$$

Учитывая (12) и (11), введём ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega_2,\rho_{02}) = \vec{J}_0(\Omega_2,\rho_{02}) \oplus \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02}) \oplus \{\alpha\,\rho_{02}^{-1}\nabla\varphi_0\} \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2,\rho_{02}), \tag{13}$$

где $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Введём также ортопроекторы на соответствующие подпространства: $P_{0,2}$, $P_{\widehat{h,S_2}}$, P_φ, $P_{0,\Gamma}$.

Как и прежде, в силу условия соленоидальности и условия непротекания на твёрдой стенке S_2 считаем, что $\vec{v}_2 \in \vec{J}_0(\Omega_2,\rho_{02}) \oplus \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02}) = \vec{J}_{\widehat{0,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02})$.

Поле $\rho_2^{-1}\nabla p_2$ квазипотенциально, поэтому

$$\rho_{02}^{-1}\nabla p_2 \in \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02}) \oplus \{\alpha\rho_{02}^{-1}\,\nabla\varphi_0\} \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2,\rho_{02}) =: \vec{G}(\Omega_2,\rho_{02}).$$

Представим поля $\vec{v}_2$ и $\rho_2^{-1}\nabla p_2$ в виде:

$$\vec{v}_2 = \vec{w}_2 + \rho_{02}^{-1}\nabla\Phi_2, \qquad \vec{w}_2 \in \vec{J}_0(\Omega_2,\rho_{02}), \quad \rho_{02}^{-1}\nabla\Phi_2 \in \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02}),$$
$$\rho_{02}^{-1}\nabla p_2 = \rho_{02}^{-1}\nabla p_{2,1} + \rho_{02}^{-1}\nabla p_{2,2} + \alpha(t)\,\rho_{02}^{-1}\nabla\varphi_0,$$
$$\rho_{02}^{-1}\nabla p_{2,1} \in \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02}), \quad \rho_{02}^{-1}\nabla p_{2,2} \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2,\rho_{02}).$$

Подставим эти представления в уравнение движения для идеальной жидкости из Ω_2 и применим к нему ортопроекторы, отвечающие разложению (13). Получим:

$$\frac{\partial^2\vec{w}_2}{\partial t^2} + P_{0,2}\left[N_2^2(x_3)\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3} + w_{2,3}\right)\vec{e}_3\right] = P_{0,2}\psi_{2,0}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{02}^{-1}\nabla\Phi_2) + \rho_{02}^{-1}\nabla p_{2,1} + P_{\widehat{h,S_2}}\left[N_2^2(x_3)\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3} + w_{2,3}\right)\vec{e}_3\right] = P_{\widehat{h,S_2}}\psi_{2,0}, \tag{15}$$

$$\alpha(t)\rho_{02}^{-1}\nabla\varphi_0 + P_\varphi\left[N_2^2(x_3)\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3} + w_{2,3}\right)\vec{e}_3\right] = P_\varphi\psi_{2,0}, \tag{16}$$

$$\rho_{02}^{-1}\nabla p_{2,2} = -P_{0,\Gamma}\left[N_2^2(x_3)\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3} + w_{2,3}\right)\vec{e}_3\right] + P_{0,\Gamma}\psi_{2,0}. \tag{17}$$

Соотношения (16) и (17) показывают, что $\alpha\,\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0$ и $\rho_2^{-1}\nabla p_{2,2}$ определяется лишь полем вертикального смещения $v_{2,3}$ и начальными условиями. В то же время эти поля не входят в (14), (15). Отметим также, что для элементов подпространства $\{\alpha\,\rho_{02}^{-1}\nabla\varphi_0\}$ выполнены условия

$$\nabla\cdot(\rho_{02}^{-1}\nabla\varphi_0) = 0 \ \ (\text{в } \Omega_2), \quad \rho_{02}^{-1}\nabla\varphi_0\cdot\vec{n} = 0 \ \ (\text{на } S_2),$$
$$\varphi_0 = \alpha\,\mathrm{mes}\,\Gamma_1 \ \ (\text{на } \Gamma_2), \quad \varphi_0 = -\alpha\,\mathrm{mes}\,\Gamma_2 \ \ (\text{на } \Gamma_1),$$

поэтому из (16) находятся все коэффициенты α и тем самым — составляющая $\{\alpha\rho_{02}^{-1}\nabla\varphi_0\}$.

Замечание 4. Учитывая тривиальные соотношения (16), (17), в дальнейшем будем рассматривать для идеальной жидкости из Ω_2 уравнения (14), (15).

Перейдём к окончательной формулировке задачи с учётом проведённых выше преобразований. После отделения тривиальных соотношений начально-краевая задача (5) формулируется следующим образом (где $\vec{w}_i(t,x)$, $\Phi_i(t,x)$ и $p_{i,1}(t,x)$ —

искомые функции):

$$\frac{\partial^2 \vec{w}_i}{\partial t^2} + P_{0,i}\left[N_i^2(x_3)\left(\rho_{0i}^{-1}\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_3} + w_{i,3}\right)\vec{e}_3\right] = P_{0,i}\psi_{i,0} \quad (\text{в}\,\Omega_i), \tag{18}$$

$$\operatorname{div}\vec{w}_i = 0 \quad (\text{в}\,\Omega_i), \quad \vec{w}_i\cdot\vec{n}_i = 0 \quad (\text{на}\ \partial\Omega_i) \quad (i=1,2),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_{01}^{-1}\nabla\Phi_1\right) + \rho_{01}^{-1}\nabla p_{1,1} + P_{h,S_1}\left[N_1^2(x_3)\left(\rho_{01}^{-1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} + w_{1,3}\right)\vec{e}_3\right] = P_{h,S_1}\psi_{1,0}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_{02}^{-1}\nabla\Phi_2\right) + \rho_{02}^{-1}\nabla p_{2,1} + P_{\widehat{h,S_2}}\left[N_2^2(x_3)\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} + w_{2,3}\right)\vec{e}_3\right] = P_{\widehat{h,S_i}}\psi_{2,0}, \tag{20}$$

$$\nabla\cdot(\rho_{0i}^{-1}(x)\nabla\Phi_i) = 0 \quad (\text{в}\ \Omega_i), \quad \rho_{0i}^{-1}(x)\nabla\Phi_i\cdot\vec{n}_i = 0 \quad (\text{на}\ S_i) \quad (i=1,2),$$

$$\int_{\Gamma_1}\Phi_1\,d\Gamma_1 = 0, \quad \int_{\Gamma}\Phi_2\,d\Gamma = 0, \quad \rho_{01}^{-1}\nabla\Phi_1\cdot\vec{n}_1 = \rho_{02}^{-1}\nabla\Phi_2\cdot\vec{n}_1\ (\text{на}\ \Gamma_1),$$

$$P_{\Gamma_1}p_{1,1} = g\Delta\rho\left(\rho_{01}^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}\right)_{\Gamma_1} + P_{\Gamma_1}p_{2,1}\ (\text{на}\ \Gamma_1), \tag{21}$$

$$P_{\Gamma_2}p_{2,1} = P_{\Gamma_2}KP_{\Gamma_2}\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}\right)_{\Gamma_2} + \rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}\right)_{\Gamma_2} \quad (\text{на}\ \Gamma_2), \tag{22}$$

$$\int_{\Gamma_2}p_{2,1}\,d\Gamma_2 = -\alpha(t)\mathrm{mes}\Gamma_1\mathrm{mes}\Gamma_2, \quad \int_{\Gamma_1}p_{1,1}\,d\Gamma_1 = \int_{\Gamma_1}p_{2,1}\,d\Gamma_1 - \alpha(t)\mathrm{mes}\Gamma_1\mathrm{mes}\Gamma_2, \tag{23}$$

$$\vec{w}_i(0,x) = P_{0,i}\vec{v}_i^0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{w}_i(0,x) = P_{0,i}\vec{u}_i^0(x) \quad (i=1,2\,),$$
$$\rho_{01}^{-1}\nabla\Phi_1(0,x) = P_{h,S_1}\vec{v}_1^0(x), \quad \rho_{02}^{-1}\nabla\Phi_2(0,x) = P_{\widehat{h,S_2}}\vec{v}_2^0(x), \tag{24}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{01}^{-1}\nabla\Phi_1(0,x)\right) = P_{h,S_1}\vec{u}_1^0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{02}^{-1}\nabla\Phi_2(0,x)\right) = P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x).$$

Через P_{Γ_i} обозначены ортопроекторы на $L_{2,\Gamma_i} := L_2(\Gamma_i)\ominus\{1_{\Gamma_i}\}$ $(i=1,2)$. Целесообразность введения в задачу ортопроекторов P_{Γ_i}, а также нормировочных соотношений (23) подробно разобрана в работе [6].

Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим ряд вспомогательных краевых задач.

Вспомогательная задача I.

$$\nabla\cdot(\rho_{02}^{-1}\nabla\Psi_1) = 0 \quad (\text{в}\ \Omega_2), \quad \rho_{02}^{-1}\nabla\Psi_1\cdot\vec{n}_2 = 0 \quad (\text{на}\ S_2),$$
$$\rho_{02}^{-1}(b)\nabla\Psi_1\cdot\vec{n}_2 = 0\ (\text{на}\ \Gamma_2),\ \rho_{02}^{-1}(0)\nabla\Psi_1\cdot\vec{n}_2 = \eta_1\ (\text{на}\ \Gamma_1),\ \int_\Gamma\Psi_1\,d\Gamma = 0.$$

Вспомогательная задача II.

$$\nabla\cdot(\rho_{02}^{-1}\nabla\Psi_2) = 0 \quad (\text{в}\ \Omega_2), \quad \rho_{02}^{-1}\nabla\Psi_2\cdot\vec{n}_2 = 0 \quad (\text{на}\ S_2),$$
$$\rho_{02}^{-1}(0)\nabla\Psi_2\cdot\vec{n}_2 = 0\ (\text{на}\ \Gamma_1),\ \rho_{02}^{-1}(b)\nabla\Psi_2\cdot\vec{n}_2 = \eta_2\ (\text{на}\ \Gamma_2),\ \int_\Gamma\Psi_2\,d\Gamma = 0.$$

Задачи I и II — это задачи Неймана. Если $\eta_1 \in \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-\frac{1}{2}}$, то задача I имеет единственное решение $\Psi_1 \in H_\Gamma^1(\Omega_2,\rho_{02})$. Аналогично, если $\eta_2 \in \widetilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}$, то задача II имеет единственное решение $\Psi_{2,2} \in H_\Gamma^1(\Omega_2)$ (см. [4]). Символом $\widetilde{\ }$ обозначен класс функций из $H_{\Gamma_i}^{-1/2}$ $(i=1,2)$, продолженных нулём на всю границу $\partial\Omega_i$ в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_i)$ $(i=1,2)$ (см., например, [7]).

Введём по решениям задач I и II операторы:

$$\rho_{02}^{-1}(0)P_{\Gamma_1}\Psi_1|_{\Gamma_1} =: S_1\eta_1, \quad \rho_{02}^{-1}(b)P_{\Gamma_2}\Psi_1|_{\Gamma_2} =: S_2\eta_1,$$
$$\rho_{02}^{-1}(0)P_{\Gamma_1}\Psi_2|_{\Gamma_1} =: S_3\eta_2, \quad \rho_{02}^{-1}(b)P_{\Gamma_2}\Psi_2|_{\Gamma_2} =: S_4\eta_2.$$

Здесь следует отметить, что оператор S_1 — самосопряжённый, положительный и компактный в L_{2,Γ_1}, а оператор S_4 — самосопряжённый, положительный и компактный в L_{2,Γ_2}.

Вспомогательная задача III.

$$\nabla\cdot(\rho_{01}^{-1}\nabla\Phi_1)=0 \ \ (\text{в } \ \Omega_1),\quad \rho_{01}^{-1}\nabla\Phi_1\cdot\vec{n}_1=0 \quad (\text{на } \ S_1),$$
$$\rho_{01}^{-1}(0)\nabla\Phi_1\cdot\vec{n}_1=\eta_0 \quad (\text{на } \ \Gamma_1),\quad \int_{\Gamma_1}\Phi_1\,d\Gamma_1=0.$$

Это также задача Неймана. Если $\eta_0\in\widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-\frac{1}{2}}$, то задача имеет единственное решение $\Phi_1\in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1,\rho_{01})$. Введём по решению задачи III оператор:

$$\rho_{01}^{-1}(0)P_{\Gamma_1}\Phi_1|_{\Gamma_1}=:S_0\eta_0.$$

Оператор S_0 является самосопряжённым, положительным и компактным в L_{2,Γ_1}.

4. Приведение системы к дифференциально-операторному уравнению

Введём новые переменные

$$\begin{gathered}\rho_{01}^{-1}\nabla m_1=P_{h,S_1}\left[N_1^2(x_3)\left(\rho_{01}^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}\right)\vec{e}_3\right],\quad \rho_{01}^{-1}\nabla k_1=P_{h,S_1}\left(N_1^2(x_3)w_{1,3}\vec{e}_3\right),\\ \rho_{01}^{-1}\nabla F_1=P_{h,S_1}\psi_{1,0},\qquad \rho_{02}^{-1}\nabla F_2=P_{\widehat{h,S_2}}\psi_{2,0},\\ \rho_{02}^{-1}\nabla m_2=P_{\widehat{h,S_2}}\left[N_2^2(x_3)\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}\right)\vec{e}_3\right],\quad \rho_{01}^{-1}\nabla k_2=P_{\widehat{h,S_2}}\left(N_2^2(x_3)w_{2,3}\vec{e}_3\right).\end{gathered}\tag{25}$$

Тогда из уравнений (9) и (14) приходим к интегралам Коши — Лагранжа

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial t^2}+p_{i,1}+m_i+k_i=F_i+c_i(t)\quad(\text{в}\,\Omega_i)\quad(i=1,2),\tag{26}$$

где $c_i(t)$ — произвольная функция времени.

Рассмотрим (26) на Γ_i $(i=1,2)$ и перепишем условия на Γ_1 и Γ_2 в следующем виде ($\widetilde{K}:=P_{\Gamma_2}KP_{\Gamma_2}$):

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Phi_1|_{\Gamma_1}-\Phi_2|_{\Gamma_1}\right)+g\Delta\rho\left(\rho_{01}^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}\right)_{\Gamma_1}+\\ +P_{\Gamma_1}m_1+P_{\Gamma_1}k_1-P_{\Gamma_1}m_2-P_{\Gamma_1}k_2=P_{\Gamma_1}F_1-P_{\Gamma_1}F_2\quad(\text{на } \ \Gamma_1),\\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Phi_2|_{\Gamma_2}+\rho_0\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}\right)_{\Gamma_2}\right)+\widetilde{K}\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}\right)_{\Gamma_2}+P_{\Gamma_2}m_2+P_{\Gamma_2}k_2=P_{\Gamma_2}F_2\ (\text{на } \ \Gamma_2).\end{gathered}\tag{27}$$

В силу принадлежности $\rho_{02}^{-1}\nabla\Phi_2$ пространству $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02})$ и определения пространства $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02})$ потенциал Φ_2 с помощью решений I и II вспомогательных задач можно представить в виде $\Phi_2=\Psi_1+\Psi_2$, при этом разложим пространство $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_2)$ в виде следующей прямой суммы:

$$\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02})=\vec{G}_1(\Omega_2,\rho_{02})\oplus\vec{G}_2(\Omega_2,\rho_{02}),\tag{28}$$

где

$$\vec{G}_1(\Omega_2,\rho_{02}) := \{\rho_{02}^{-1}\nabla p \mid \nabla(\rho_{02}^{-1}\nabla p)=0 \text{ (в } \Omega_2),\ \rho_{02}^{-1}\nabla p\cdot\vec{n}_2=0 \text{ (на } S_2),$$
$$\rho_2^{-1}\nabla p\cdot\vec{n}_2=0 \text{ (на } \Gamma_2),\ \int_\Gamma p\,d\Gamma=0\},$$
$$\vec{G}_2(\Omega_2,\rho_{02}) =: \{\rho_{02}^{-1}\nabla p \mid \nabla(\rho_{02}^{-1}\nabla p)=0 \text{ (в } \Omega_2\,),\ \rho_{02}^{-1}\nabla p\cdot\vec{n}_2=0 \text{ (на } S_2),$$
$$\rho_{02}^{-1}\nabla p\cdot\vec{n}_2=0 \text{ (на } \Gamma_1),\ \int_\Gamma p\,d\Gamma=0\}.$$

Выразив $P_{\Gamma_i}(\Phi_i)$ $(i=1,2)$ с помощью операторов S_j $(j=0,1,\ldots,4)$ с учётом равенств

$$\eta_0=\left(\rho_{01}^{-1}(\partial\Phi_1/\partial x_3)\right)_{\Gamma_1}=-\left(\rho_{02}^{-1}(\partial\Phi_2/\partial x_3)\right)_{\Gamma_1}=-\eta_1,$$

приходим вместо (27) к системе уравнений

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left((\rho_{01}S_0+\rho_{02}S_1)\eta_0-\rho_{02}S_3\right)+g\Delta\rho\eta_0+$$
$$+P_{\Gamma_1}m_1+P_{\Gamma_1}k_1-P_{\Gamma_1}m_2-P_{\Gamma_1}k_2=P_{\Gamma_1}F_1-P_{\Gamma_1}F_2:=\widehat{F}_1,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\rho_{02}S_2\eta_0+(\rho_{02}S_4+\rho_0I_2)\eta_2\right)+\widetilde{K}\eta_2+P_{\Gamma_2}m_2+P_{\Gamma_2}k_2=P_{\Gamma_2}F_2:=\widehat{F}_2.$$

В дальнейшем все искомые функции и заданные функции переменной t и пространственных переменных будем считать функциями одной переменной t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах, что уже и было учтено в проведённых выше построениях. В связи с этим далее все производные $\partial/\partial t$ будем заменять на d/dt.

Начально-краевую задачу (5) перепишем в виде задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H}:=\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus H,\quad \vec{J}_0(\Omega,\rho_0)=\vec{J}_0(\Omega_1,\rho_{01})\oplus\vec{J}_0(\Omega_2,\rho_{02}),$$
$$H:=H_1\oplus H_2,\quad H_i=L_2(\Gamma_i)\ominus\{1_i\}\quad(i=1,2\,),$$

а именно, в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{A}\mathcal{X}+\mathcal{B}_K\mathcal{X}=\mathcal{F},\quad \mathcal{X}(0)=\mathcal{X}^0,\quad \mathcal{X}'(0)=\mathcal{X}^1, \tag{29}$$
$$\mathcal{A}:=\begin{pmatrix} I_0 & 0\\ 0 & M\end{pmatrix},\quad \mathcal{B}_K:=\mathcal{I}_K+\mathcal{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&I_K\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}, \tag{30}$$

$I_0=\operatorname{diag}(I_{01},I_{02})$, I_{0i} — единичные операторы в $\vec{J}_0(\Omega_i,\rho_{0i})$, $I_K=\operatorname{diag}(g\Delta\rho I_1,\widetilde{K})$, I_i — единичные операторы в H_i, $\mathcal{X}:=(\vec{w};\eta)^t$, $\mathcal{F}:=(F_\psi,F)^t$, $F=(\widehat{F}_1;\widehat{F}_2)^t$, $F_\psi=(P_{h,S_1}\psi_{1,0},P_{\widehat{h,S_1}}\psi_{2,0})^t$, $\vec{w}=(\vec{w}_1;\vec{w}_2)^t$, $\eta=(\eta_0;\eta_2)^t$, $\widetilde{K}:=P_{\Gamma_2}KP_{\Gamma_2}$,

$$M:=\begin{pmatrix}\rho_{01}S_0+\rho_{02}S_1 & -\rho_{02}S_3\\ -\rho_{02}S_2 & \rho_{02}S_4+\rho_0I_2\end{pmatrix},\quad B_{11}:=\begin{pmatrix}B_{11}^1&0\\0&B_{11}^2\end{pmatrix}, \tag{31}$$
$$B_{12}:=\begin{pmatrix}B_{12}^1&0\\0&B_{12}^2\end{pmatrix},\quad B_{21}:=\begin{pmatrix}B_{21}^1&\widehat{B}_{21}^1\\0&B_{21}^2\end{pmatrix},\quad B_{22}:=\begin{pmatrix}B_{22}^1&\widehat{B}_{22}^1\\0&B_{22}^2\end{pmatrix};$$

$$B_{11}^i\vec{w}_i:=P_{0,i}\left(N_i^2(x_3)w_{i,3}\vec{e}_3\right),\quad B_{12}^i\eta_i:=P_{0,i}\left(N_i^2(x_3)(U_i\eta_i)\vec{e}_3\right),$$
$$B_{21}^i\vec{w}_i:=P_{\Gamma_i}k_i,\ \widehat{B}_{21}^1\vec{w}_2:=-P_{\Gamma_1}k_2,\ B_{22}^i\vec{\eta}_i:=P_{\Gamma_i}m_i,\ \widehat{B}_{22}^1\vec{\eta}_2:=-P_{\Gamma_1}m_2,$$

где $i = 1$ соответствует η_0 и через $U_1 : \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2} \to \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_{01})$ обозначен оператор, который посредством решения вспомогательной задачи III ставит в соответствие элементу $\eta_0 \in \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$ функцию $\rho_{01}^{-1}\nabla\Phi_1 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_{01})$, аналогично $U_2 : \widetilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2} \to \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_{02})$.

Начальные данные в (29) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^0 = \left(\vec{w}^0; \eta^0\right)^t, \quad \vec{w}^0 = \left(P_{01}\vec{v}_1^0; P_{02}\vec{v}_2^0\right)^2, \quad \eta^0 = \left(\eta_0^0(\hat{x}), \eta_2^0(\hat{x})\right)^t, \\ \mathcal{X}^1 = \left(\vec{w}^1; \eta^1\right)^t, \quad \vec{w}^1 = \left(P_{01}\vec{u}_1^0; P_{02}\vec{u}_2^0\right)^2, \quad \eta^1 = \left(\eta_0^1(\hat{x}), \eta_2^1(\hat{x})\right)^t, \end{aligned} \tag{32}$$

где $\eta_0^1(\hat{x}) = [(P_{h,S_1}\vec{u}_1^0(x)) \cdot \vec{n}_1]_{\Gamma_1}$, $\eta_2^1(\hat{x}) = \left[\left(P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x)\right) \cdot \vec{n}_2\right]_{\Gamma_2}$, причём для начальных данных в силу разложения (28) должно выполняться следующее кинематическое условие:

$$\gamma_1 P_{h,S_1}\vec{u}_1^0(x) = -\gamma_2 \Pi_1 P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x) \quad (\text{на } \Gamma_1). \tag{33}$$

Здесь через Π_1 обозначен проектор на подпространство $\vec{G}_1(\Omega_2, \rho_{02})$, через символы γ_i — операция взятия нормального следа на Γ_1 для полей, заданных в области Ω_i $(i = 1, 2)$.

Итог проведённых рассуждений:

Лемма 2. *Классическое решение задачи* (5) *является решением задачи Коши* (29), (32) *в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$.

Лемма 3. *Оператор* M *из* (31), *действующий в пространстве* H, *самосопряжён, ограничен и положителен.*

Доказательство. Свойство ограниченности следует из того, что ограничены все операторные коэффициенты матрицы M.

Найдём квадратичную форму оператора M, для любого $\eta \in H$ имеем

$$(M\eta, \eta) = \left(\begin{pmatrix} (\rho_{01}S_0 + \rho_{02}S_1)\eta_0 - \rho_{02}S_3\eta_2 \\ -\rho_{02}S_2\eta_0 + (\rho_{02}S_4 + \rho_0 I_2)\eta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_2 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= (\rho_{01}S_0\eta_0, \eta_0) + (\rho_{02}S_1\eta_0 - \rho_{02}S_3\eta_2, \eta_0) + (-\rho_{02}S_2\eta_0 + \rho_{02}S_4\eta_2, \eta_2) +$$
$$+\rho_0(\eta_2, \eta_2) = (\rho_{01}S_0\eta_0, \eta_0) + (-\rho_{02}P_{\Gamma_1}\Phi_2, \eta_0) + (\rho_{02}P_{\Gamma_2}\Phi_2, \eta_2) + \rho_0(\eta_2, \eta_2).$$

Так как

$$(\rho_{01}S_0\eta_0, \eta_0) = \int_{\Gamma_1} P_{\Gamma_1}\Phi_1 \; \rho_{01}^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}\; d\Gamma_1 = \int_{\partial\Omega_1} \Phi_1 \; (\rho_{01}^{-1}\nabla\Phi_1 \cdot \vec{n}_1)\; dS_1 =$$
$$= \int_{\Omega_1} \rho_{01}^{-1}(x_3)\; \nabla\Phi_1\; \nabla\Phi_1\, d\Omega_1 = \int_{\Omega_1} \rho_{01}^{-1}(x_3)\; |\nabla\Phi_1|^2\, d\Omega_1\,,$$
$$(-\rho_{02}P_{\Gamma_1}\Phi_2, \eta_0) + (\rho_{02}P_{\Gamma_2}\Phi_2, \eta_2) = \int_{\Gamma_1} P_{\Gamma_1}\Phi_2\; \rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_3}\; d\Gamma_1 +$$
$$+ \int_{\Gamma_2} P_{\Gamma_2}\Phi_2\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_3}d\Gamma_2 = \int_{\partial\Omega_2} \Phi_2(\rho_{02}^{-1}\nabla\Phi_2 \cdot \vec{n}_2)dS_2 = \int_{\Omega_2} \rho_{02}^{-1}(x_3)|\nabla\Phi_2|^2 d\Omega_2,$$

окончательно получаем

$$(M\eta, \eta) = \int_{\Omega_1} \rho_{01}^{-1}(x_3)|\nabla\Phi_1|^2\, d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{02}^{-1}(x_3)|\nabla\Phi_2|^2\, d\Omega_2 + \rho_0 \int_{\Gamma_2} |\eta_2|^2\, d\Gamma_2.$$

С учётом ограниченности оператора M из последнего видно, что он самосопряжён и положителен. □

Лемма 4. *Оператор $\mathcal{B}$ из* (30), *действующий в пространстве $\mathcal{H}$, самосопряжён, ограничен и неотрицателен.*

Доказательство следует из равенства

$$(B\mathcal{X},\mathcal{X})_{\mathcal{H}} = (B_{11}\vec{w},\vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} + (B_{12}\eta,\vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} + (B_{21}\vec{w},\eta)_H + (B_{22}\eta,\eta)_H =$$
$$= \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i} N_i^2(x_3)\rho_{0i}(x_3)\left|w_{i,3} + \left(\rho_{0,i}^{-1}\nabla\Phi_i\cdot\vec{e}_3\right)\right|^2 d\Omega_i.$$

Докажем его. С учётом определения (31), а также обозначений (25) имеем:

$$(B_{11}\vec{w},\vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} = \sum_{i=1}^{2}(B_{11}^i\vec{w}_i,\vec{w}_i)_{\vec{J}_0(\Omega_i,\rho_{0i})} =$$
$$= \sum_{i=1}^{2}\left(P_{0,i}\left[N_i^2(x_3)w_{i,3}\vec{e}_3\right],\vec{w}_i\right)_{\vec{J}_0(\Omega_i,\rho_{0i})} = \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i} N_i^2(x_3)\,\rho_{0i}(x_3)\,|w_{i,3}|^2\,d\Omega_i,$$

$$(B_{12}\eta,\vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} = \sum_{i=1}^{2}(B_{12}^i\vec{\eta}_i,\vec{w}_i)_{\vec{J}_0(\Omega_i,\rho_{0i})} =$$
$$= \sum_{i=1}^{2}\left(P_{0,i}\left(N_i^2(x_3)(U_i\eta_i)\vec{e}_3\right),\vec{w}_i\right) = \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i} N_i^2\rho_{0i}\left(\rho_{0i}^{-1}\nabla\Phi_i\cdot\vec{e}_3\right)w_{i,3}\,d\Omega_i,$$

$$(B_{21}\vec{w},\eta)_H = \sum_{i=1}^{2}(B_{21}^i\vec{w}_i,\eta_i)_{H_i} + (\widehat{B}_{21}^1\vec{w}_2,\eta_0)_{H_1} = \int_{\Gamma_1} P_{\Gamma_1}k_1\left(\rho_{01}^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}\right)d\Gamma_1+$$
$$+\int_{\Gamma_1} P_{\Gamma_1}k_2\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_3}\right)d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} P_{\Gamma_2}k_2\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_3}\right)d\Gamma_2 = \sum_{i=1}^{2}\int_{\partial\Omega_i} k_i\left(\rho_{0i}^{-1}\nabla\Phi_i\cdot\vec{n}_i\right)dS_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\rho_{0i}\left(\rho_{0i}^{-1}\nabla k_i\right)\left(\rho_{0i}^{-1}\nabla\Phi_i\right)d\Omega_i = \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i} N_i^2\rho_{0i}\left(\rho_{0i}^{-1}\nabla\Phi_i\cdot\vec{e}_3\right)w_{i,3}\,d\Omega_i,$$

$$(B_{22}\eta,\eta)_H = \sum_{i=1}^{2}(B_{22}^i\eta_i,\eta_i)_{H_i} + (\widehat{B}_{22}^1\eta_2,\eta_0)_{H_1} = \int_{\Gamma_1} P_{\Gamma_1}m_1\left(\rho_{01}^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}\right)d\Gamma_1+$$
$$+\int_{\Gamma_1} P_{\Gamma_1}m_2\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_3}\right)d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} P_{\Gamma_2}m_2\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_3}\right)d\Gamma_2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{2}\int_{\partial\Omega_i} m_i\left(\rho_{0i}^{-1}\nabla\Phi_i\cdot\vec{n}_i\right)dS_i = \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\rho_{0i}\left(\rho_{0i}^{-1}\nabla m_i\right)\left(\rho_{0i}^{-1}\nabla\Phi_i\right)d\Omega_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i} N_i^2\rho_{0i}|\rho_{0i}^{-1}\nabla\Phi_i\cdot\vec{e}_3|^2\,d\Omega_i.$$

Лемма 5. *Оператор $\widetilde{K} := P_{\Gamma_2}KP_{\Gamma_2}$ из* (30) *является положительно определённым и неограниченным в H_2.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1.

Замечание 5. Прежде чем перейти к дальнейшим рассуждениям, отметим ряд фактов:

1. В уравнении (29) оператор M с учётом его определения и леммы 3 удовлетворяет следующим свойствам: $0 < M = M^* \in \mathcal{L}(H)$, $\mathcal{L}(H)$ — пространство линейных

ограниченных операторов, действующих в H. Однако операторный коэффициент при искомой функции не является положительно определённым оператором. Данный факт не позволяет воспользоваться известной теоремой о существовании и единственности сильного решения (см., например, [8]), в связи с этим требуются дополнительные построения.

2. В работе [3] рассматривался случай, когда свободная поверхность Γ_2 полностью покрыта крошеным льдом. В этом случае исходная начально-краевая задача была сведена к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве, при этом структура операторных коэффициентов более простая, чем в рассматриваемом здесь случае, когда на свободной поверхности — упругий лед. В частности, операторный коэффициент при искомой функции в [3] является ограниченным и положительно определённым.

5. Теорема существования сильного решения

Перепишем уравнение (29) в следующем виде:

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ M\eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 + B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & I_K + B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_\psi \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Осуществим замену $I_K^{1/2}\eta = \zeta$ в (34) и применим оператор $\operatorname{diag}(I_0; I_K^{-1/2})$ к обеим частям уравнения, в результате приходим к уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ I_K^{-1/2} M I_K^{-1/2}\zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 + B_{11} & B_{12} I_K^{-1/2} \\ I_K^{-1/2} B_{21} & I_2 + I_K^{-1/2} B_{22} I_K^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ \zeta \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} F_\psi \\ I_K^{-1/2} F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $I_K^{-1/2} M I_K^{-1/2}\zeta = y$, что равносильно

$$M_{I_K}\zeta := I_K^{-1/2} M I_K^{-1/2}\zeta = I_K^{-1/2} M I_K^{-1/2}(I_K^{1/2}\eta) = I_K^{-1/2} M\eta = y. \quad (35)$$

С учётом сказанного приходим к следующей задаче Коши:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + I_B F v = \widehat{f} + Rv, \quad v(0) = (\vec{w}(0); y(0))^t, \quad v'(0) = (\vec{w}'(0); y'(0))^t, \quad (36)$$

$$F = \operatorname{diag}(I_0; M_{I_K}^{-1}), \quad R = \operatorname{diag}(I_0; 0), \quad \widehat{f} = (F_\psi; I_K^{-1/2} F)^t,$$

$$I_B = \begin{pmatrix} I_0 + B_{11} & B_{12} I_K^{-1/2} \\ I_K^{-1/2} B_{21} & I_2 + I_K^{-1/2} B_{22} I_K^{-1/2} \end{pmatrix},$$

где I_B — самосопряжённый, ограниченный и положительно определённый оператор, $\mathcal{D}(I_B F) = \mathcal{D}(F)$.

Введём скалярное произведение, определяющее эквивалентную норму в пространстве $\mathcal{H}$: $[v_1; v_2] := (I_B^{-1} v_1; v_2)$, тогда

$$[I_B F v_1; v_2] = (F v_1; v_2) = (v_1; F v_2) = (v_1; I_B^{-1} I_B F v_2) = [v_1; I_B F v_2],$$

следовательно, $I_B F$ — самосопряжённый оператор, более того, он является неограниченным и положительно определённым оператором.

Определение 1. *Сильным* (по переменной t) *решением* задачи (36) на отрезке $[0,T]$ назовём такую функцию $v(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$, для которой выполнены следующие условия:

1) $v(t) \in \mathcal{D}(I_B F)$ при любом $t \in [0;T]$, $I_B F v \in C\left([0;T];\mathcal{H}\right)$;
2) $v \in C^2\left([0;T];\mathcal{H}\right)$;
3) выполнены уравнение (36) и начальные условия.

Замечание 6. Отметим, что введённое определение говорит о том, что все фигурируемые искомые функции переменной t и пространственных переменных, а также их производные по t, имеющиеся в условиях, являются непрерывными функциями t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах. Что касается непрерывности и даже существования всех участвующих производных по пространственным переменным, то это, вообще говоря, не требуется.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

$$v(0) \in \mathcal{D}(I_B F) = \mathcal{D}(F),\ v'(0) \in \mathcal{D}((I_B F)^{1/2}) = \mathcal{D}(F^{1/2}),\ \widehat{f}(t) \in C^1\left([0;T];\mathcal{H}\right). \quad (37)$$

Тогда задача (36) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0;T]$.

Доказательство. Теорему существования сильного решения задачи Коши (36) докажем, опираясь на преобразования из [8, с. 291–301].

Введём новые искомые функции $F^{1/2}v =: u$, $u' = F^{1/2}v' = F^{1/2}w$, $v' = w$ и перейдём к системе уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_B F^{1/2} \\ F^{1/2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f + RF^{-1/2}u \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} I_B & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -F^{1/2} \\ F^{1/2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f + RF^{-1/2}u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь оператор $\mathrm{diag}(I_B; I_2)$ ограничен и положительно определён, а оператор

$$\begin{pmatrix} 0 & -F^{1/2} \\ F^{1/2} & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & iF^{1/2} \\ -iF^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

является инфинитезимальным генератором унитарной группы операторов, действующей в пространстве $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Поэтому произведение таких операторов обладает таким же свойством в пространстве с эквивалентной нормой, определяемой оператором $\mathrm{diag}(I_B^{-1}; I_2)$.

Далее, дополнительное слагаемое, определяемое выражением $(RF^{-1/2}u; 0)^t$, соответствует ограниченному возмущению инфинитезимального генератора унитарной и потому сильно непрерывной группы операторов. Поэтому операторный коэффициент в полученной задаче Коши является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной группы операторов. Значит, если выполнены условия

$$F^{1/2}v^0 = u^0 \in \mathcal{D}(F^{1/2}) \iff v^0 \in \mathcal{D}(F),\ v^1 = w^0 \in \mathcal{D}(F^{1/2}), \quad \widehat{f}(t) \in C^1\left([0,T];\mathcal{H}\right),$$

то задача (36) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. □

Вернёмся по всем преобразованиям обратно к задаче (29). Пусть выполнены условия (37), тогда задача Коши (36) согласно теореме 2 имеет единственное сильное решение на отрезке $[0;T]$. С учётом замены (35) имеем

$$\begin{aligned}
&\left(v^0 = (\vec{w}^0; y^0)^t \in \mathcal{D}(F)\right) \iff \left(\vec{w}^0 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0),\, y^0 \in \mathcal{D}(M_{I_K}^{-1})\right) \iff \\
&\iff \left(\vec{w}^0 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0),\, M_{I_K}^{-1} y^0 = M_{I_K}^{-1} (M_{I_K}) I_K^{1/2} \eta^0 \in H\right) \iff \\
&\iff \left(\vec{w}^0 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0),\, \eta^0 \in \mathcal{D}(I_K^{1/2})\right) \iff \\
&\iff \left(\vec{w}_i^0 \in \vec{J}_0(\Omega_i, \rho_{0i})\, (i=1,2),\, \eta_0^0 \in H_1,\, \eta_2^0 \in \mathcal{D}(K^{1/2})\right).
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
&\left(v^1 = (\vec{w}^1; y^1)^t \in \mathcal{D}(F^{1/2})\right) \iff \left(\vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0),\, y^1 \in \mathcal{D}(M_{I_K}^{-1/2})\right) \iff \\
&\iff \left(\vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0),\, M_{I_K}^{-1/2} y^1 = M_{I_K}^{-1/2} M_{I_K} I_K^{1/2} \eta^1 = M_{I_K}^{1/2} I_K^{1/2} \eta^1 \in H\right) \iff \\
&\iff \left(\vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0),\, \eta^1 \in \mathcal{D}(I_K^{1/2})\right) \iff \\
&\iff \left(\vec{w}_i^1 \in \vec{J}_0(\Omega_i, \rho_{0i})\, (i=1,2),\, \eta_0^1 \in H_1,\, \eta_2^1 \in \mathcal{D}(K^{1/2})\right), \\
&\widehat{f}(t) \in C^1([0;T]; \mathcal{H}) \iff \left(F_\psi \in C^1\left([0;T]; \vec{J}_0(\Omega, \rho_0)\right),\, I_K^{-1/2} F \in C^1([0;T]; H)\right) \iff \\
&\iff \left(F_\psi \in C^1\left([0;T]; \vec{J}_0(\Omega, \rho_0)\right),\, F \in C^1([0;T]; H)\right) \iff \mathcal{F}(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{H}).
\end{aligned}$$

Здесь оператор $I_K^{-1/2}$ является ограниченным оператором.

Лемма 6. *Если выполнены условия*

$$\mathcal{X}^0 = (\vec{w}^0; \eta^0)^t \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathcal{D}(I_K^{1/2}) \iff \vec{w}_i^0 \in \vec{J}_0(\Omega_i, \rho_{0i}),\ \eta_0^0 \in H_1,\ \eta_2^0 \in \mathcal{D}(K^{1/2}),$$

$$\mathcal{X}^1 = (\vec{w}^1; \eta^1)^t \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathcal{D}(I_K^{1/2}) \iff \vec{w}_i^1 \in \vec{J}_0(\Omega_i, \rho_{0i}),\ \eta_0^1 \in H_1,\ \eta_2^1 \in \mathcal{D}(K^{1/2}),$$

$$\mathcal{F}(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{H}), \quad \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H,$$

то существует единственное сильное решение задачи (29).

Определение 2. *Сильным* (по переменной t) *решением* задачи (1)–(3) на промежутке $[0,T]$ назовём набор функций $\vec{u}_i(t,x)$, $p_i(t,x)$, $\rho_i(t,x)$ и $\zeta_i(t,\hat{x})$ $(i=1,2)$, для которых выполнены следующие условия:

1) $\vec{u}_i \in C^1\left([0,T]; \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_{0i})\right)$, $\rho_{0i}^{-1} \nabla p_i \in C\left([0,T]; \vec{G}(\Omega_i, \rho_{0i})\right)$, а также $\rho_i \in C^1([0,T]; \mathfrak{L}_2(\Omega_i))$ и при любом $t \in [0,T]$ справедливо первое уравнение (1), где $\mathfrak{L}_2(\Omega_i)$ — гильбертово пространство скалярных функций со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega_i)} := g^2 \int_{\Omega_i} \left[\rho_{0i}(x_3) N_i^2(x_3)\right]^{-1} \varphi(x) \overline{\psi(x)}\, d\Omega_i;$$

2) выполнены граничные условия на Γ_i: $\partial\zeta_i/\partial t \in C([0,T]; H_i)$, $p_1 = p_2 + \Delta\rho g \zeta_1 \in C([0,T]; L_2(\Gamma_1))$, $p_2 = K\zeta_2 + \rho_0(\partial^2\zeta_2/\partial t^2) \in C([0,T]; L_2(\Gamma_2))$, где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в $L_2(\Gamma_i)$;

3) выполнены начальные условия.

Возвращаясь от задачи (29) по всем преобразованиям назад, приходим к условиям существования сильного (по переменной t) решения исходной начально-краевой задачи (1)–(3).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:*

1) $\rho_i^0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega_i)$, $\vec{u_i}^0 \in \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i)$ $(i = 1, 2)$ (*см. подробнее* (7) *и после* (13)), *причём* $\gamma_1 P_{h,S_1}\vec{u}_1^0(x) = -\gamma_2 \Pi_1 P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x)$ (*на* Γ_1) (*см. подробнее* (33));

2) $\zeta_1^0 \in H_1 = L_2(\Gamma_1) \ominus \{1_{\Gamma_1}\}$, $\zeta_2^0 \in \mathcal{D}(K^{1/2})$, $\int_{\Gamma_2}\zeta_2^0 d\Gamma_2 = 0$;

3) $\zeta_1^1 = \left[\left(P_{h,S_1}\vec{u_1}^0(x)\right)\cdot\vec{n_1}\right]_{\Gamma_1} \in H_1$, $\zeta_2^1 = \left[\left(P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u_2}^0(x)\right)\cdot\vec{n_2}\right]_{\Gamma_2} \in \mathcal{D}(K^{1/2})$;

4) $\vec{f_i}(t) \in C^1\left([0,T]\,\vec{L}_2(\Omega_i, \rho_{0i})\right)$.

Тогда каждая из задач: (1)–(3); (5); (18)–(24) *и* (29) *— имеет единственное сильное по* t *решение.*

Автор благодарит рецензента за внимание к работе и уточнения.

Список литературы

1. Прикладные задачи динамики ледяного покрова / В. М. Козин, В. Д. Жёсткая, А. В. Погорелова [и др.]. — М. : Акад. Естествознания, 2008. — 329 с.
2. **Букатов, А. Е.** Волны в море с плавающим ледяным покровом / А. Е. Букатов. — Севастополь : Морск. гидрофиз. ин-т, 2017. — 360 с.
3. **Цветков, Д. О.** Малые движения системы идеальных стратифицированных жидкостей, полностью покрытой крошеным льдом / Д. О. Цветков // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер.: Математика. — 2018. — Т. 26. — С. 104–119.
4. **Kopachevsky, N. D.** Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1. Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid / N. D. Kopachevsky, S. G. Krein. — Basel ; Boston ; Berlin : Birkhauser Verlag, 2001. — 384 p.
5. **Цветков, Д. О.** Малые движения идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой упругим льдом / Д. О. Цветков // Сиб. электрон. мат. изв. — 2018. — Т. 15. — С. 422–435.
6. **Копачевский, Н. Д.** Колебания стратифицированных жидкостей / Н. Д. Копачевский, Д. О. Цветков // Соврем. математика. Фундамент. направления. — 2008. — Т. 29. — С. 103–130.
7. **Агранович, М. С.** Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей / М. С. Агронович // Успехи мат. наук. — 2002. — Т. 57, № 5. — С. 3–78.
8. **Крейн, С. Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

Поступила в редакцию 17.09.2018
После переработки 29.04.2019

Сведения об авторе

Цветков Денис Олегович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа, Крымский федеральный университет, Таврическая академия, Симферополь, Россия; e-mail: tsvetdo@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2019. Vol. 4, iss. 2. P. 179–194.

DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14205

ON AN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM ARISING IN THE DYNAMICS OF A SYSTEM OF STRATIFIED FLUIDS

D.O. Tsvetkov

Crimean Federal University, Taurida Academy, Simferopol, Russia
tsvetdo@gmail.com

A linearized problem of small motions of a system of layers of incompressible ideal stratified fluids with a free surface, covered with the elastic ice that is modeled by the elastic plate, is considered. With using the method of the orthogonal projecting the boundary conditions on the moving surface, the original initial-boundary value problem is reduced to the equivalent Cauchy problem for an ordinary differential equation of the second order in some Hilbert space. We find the conditions under which there exists a time-strong solution to the initial-boundary value problem describing the evolution of the original hydrodynamics system.

Keywords: *stratified fluid, elastic ice, differential-operator equation, the Cauchy problem in a Hilbert space, strong solution.*

References

1. **Kozin V.M., Zhyostkaya V.D., Pogorelova A.V. [et al.].** *Prikladnye zadachi dinamiki ledyanogo pokrova* [Applied problems of ice cover dynamics]. Moscow, Akademiya Estestvoznaniya Publ., 2008. 329 p. (In Russ.).
2. **Bukatov A.E.** *Volny v more s plavayushchim ledyanym pokrovom* [Waves in the sea with floating ice cover]. Sevastopol, Marine Hydrophysical Institute, 2017. 360 p. (In Russ.).
3. **Tsvetkov D.O.** Malye dvizheniya sistemy ideal'nykh stratifitsirovannykh zhidkostey, polnost'yu pokrytoy kroshenym l'dom [Small movements of a system of ideal stratified fluids completely covered with crumbled ice]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika* [Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics], 2018, vol. 26, pp. 105–120. (In Russ.).
4. **Kopachevsky N.D., Krein S.G.** *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics*. Vol. 1. *Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid.* Basel, Boston, Berlin, Birkhauser Verlag, 2001. 384 p.
5. **Tsvetkov D.O.** Malye dvizheniya ideal'noy stratifitsirovannoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu, polnost'yu pokrytoy uprugim l'dom [Small motions of an ideal stratified fluid with a free surface completely covered with the elastic ice]. *Sibirskiye elektronnye matematicheskiye izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2018, vol. 15, pp. 422–435. (In Russ.).
6. **Kopachevsky N.D., Tsvetkov D.O.** Oscillations of stratified fluids. *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 164, no. 4, pp. 574–602.
7. **Agranovich M.S.** Spectral problems for second-order strongly elliptic systems in smooth and non-smooth domains. *Russian Mathematical Surveys*, 2002, vol. 57, no. 5, pp. 847–920.
8. **Krein S.G.** *Linear Differential Equations in Banach Space.* Americam Mathematical Society, 1972. 464 p.

Accepted article received 17.09.2018
Corrections received 29.04.2019