

МОДЕЛИ РАСКРЫТИЯ ПЛОСКИХ ТРЕЩИН

С. В. Хабиров^a, С. С. Хабиров^b

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

^ahabirov@anrb.ru, ^bsalavat.s.khabirov@gmail.com

Выводятся приближённые модели раскрытия трещины в пласте под действием фильтрующейся жидкости. Сечения трещины предполагаются плоскопараллельными и имеют малую толщину. Модели строятся на точных решениях уравнений движения вязкой жидкости, в том числе и на инвариантных решениях. Учитываются фильтрация жидкости через двигающуюся границу, отсутствие касательного движения на границе и сжимающие трещину упругие силы.

Ключевые слова: *фильтрация, подвижная граница, вязкая жидкость, точные решения, раскрытие трещины.*

Введение

При интенсивной закачке жидкости в нагнетательную скважину в пласте образуются трещины. В раскрывающейся трещине течёт вязкая жидкость, которая фильтруется в пласт через границу этой трещины. Трещину сжимают упругие силы скелета порового пространства. Математическая модель образования трещины в точной постановке трудноразрешима. Она основана на упруго-пластической теории пласта, теории движения вязкой жидкости, теории фильтрации жидкости в поровом пространстве, теории краевых задач с подвижной границей [1]. Необходимо использовать приближённые математические модели [2]. Есть два пути приближённого описания раскрытия (схлопывания) трещины. Первый путь — решение упруго-пластической задачи с заданным давлением в трещине [3–6]. Второй путь — решение задачи со свободной границей для вязкой жидкости в трещине, которую сжимает пласт силой Гука, пропорциональной полуширине трещины [7–10]. В основе второго пути лежит закон сохранения массы вдоль трещины, точные решения уравнений Навье — Стокса, закон фильтрации на границе трещины [11], закон Гука упругой силы.

Проникающая в поры пласта жидкость вытесняет нефть, добываемую в других скважинах. Закачивание жидкости в нагнетательную скважину должно проводиться таким образом, чтобы: 1) границы трещины не достигали добывающих скважин; 2) появлялись новые трещины, распространяющиеся в перпендикулярном направлении; 3) установился устойчивый режим фильтрации через нагнетательную скважину с объёмом, равным объёму нефти, добываемой из других скважин.

В работе выводятся приближённые модели для плоскопараллельных вертикальных трещин по второму пути. Из закона сохранения массы вдоль трещины выводятся уравнения мгновенного схлопывания сечения при понижении давления. Эти уравнения определяют изменение длины трещины. Раскрытие трещины, давление и

расход в сечении определяются по точному простому решению уравнений движения вязкой жидкости, из условий на подвижной границе: отсутствие касательных движений, закон фильтрации Дарси и закон Гука упругой силы. В качестве простого решения выбрана линейная зависимость поперечной скорости от ширины трещины. Рассмотрена инвариантная задача относительно группы, допускаемой уравнениями Навье — Стокса, что приводит к более простым моделям.

1. Законы сохранения и краевые условия

Трещина в пласте — это беспорый объём фиксированной высоты, малой меняющейся толщины $2a(t, x)$ и изменяющейся длины $l(t)$ в направлении оси x . Сечения по высоте одинаковые [3; 6]. Решается плоская задача в области Ω (рис. 1), которая начинается с границы скважины радиуса r . Предполагаем симметричность трещины относительно оси x . Вектор \vec{n} — единичная нормаль к границе трещины $y = a(t, x)$. Закон сохранения массы жидкости через сечение $x = \text{const}$ на единицу

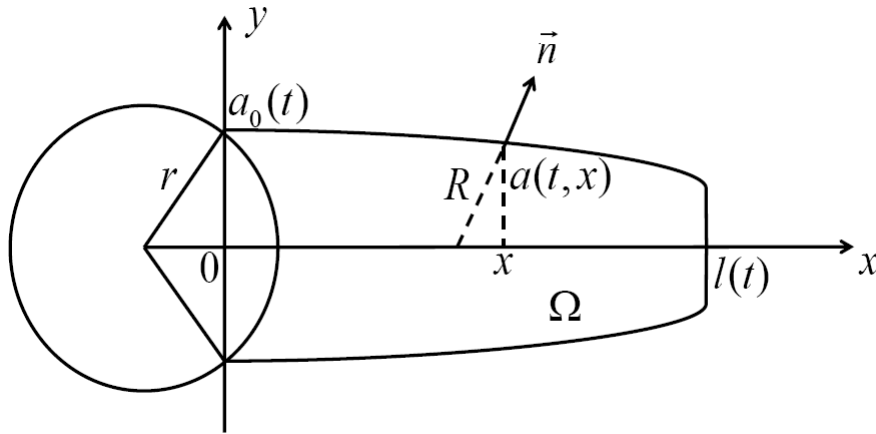


Рис. 1. Плоская трещина

высоты, перпендикулярной плоскости x, y , записывается в виде [10]

$$2a_t + Q_x + 2q = 0, \quad (1.1)$$

где $Q(t, x)$ — объём жидкости, проходящий через сечение $x = \text{const}$, q — поток фильтрующейся жидкости через боковую поверхность трещины за единицу времени через единицу площади. Если p — давление в жидкости, то условие образования трещины — $p > \sigma_0$, условие схлопывания трещины — $p \leq \sigma_0$, где σ_0 — точечный предел прочности порового пространства; фильтрующее давление на границе трещины — $p_f = mp > p_\infty$; давление, уравновешивающее упругую силу раздвинутого скелета, есть $p_a = (1 - m)p = E'a\sqrt{1 + a_x^2}$, где $E' = E(1 - \nu^2)^{-1}$, $0 < \nu < 1/2$, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, p_∞ — пластовое давление, m — пористость.

Функции $l(t)$, $a(t, x)$ определяются из уравнения (1.1) с учётом расхода и давления в начальном сечении $x = 0$: $Q(t, 0) = Q_0(t)$, $p(t, 0) = p_0(t)$. Начальные данные $l(0) = l_0$, $a(0, 0) = a_{00}$ образуются при раскрытии трещины за время Δt интенсивной закачки. Эти величины определяются через $Q_0(0)$, $p_0(0)$ и σ_0 .

Предположим, что начальная полость имеет границу $y = a_0(x)$ с нормалью $\mathbf{n} = (-a_{0x}, 1)(1 + a_{0x}^2)^{-1/2}$ и элементом длины дуги $ds = (1 + a_{0x}^2)^{1/2} dx$ (рис. 2). За время Δt интенсивной закачки расход жидкости на единицу высоты равен $Q_0(0)\pi r^2 \Delta t$, $a_0(0) = a_{00} = r \sin \varphi$. Жидкость занимает объём $2 \int_0^{l_0} a_0(x) dx - \frac{1}{2} r^2 (2\varphi - \sin 2\varphi)$.

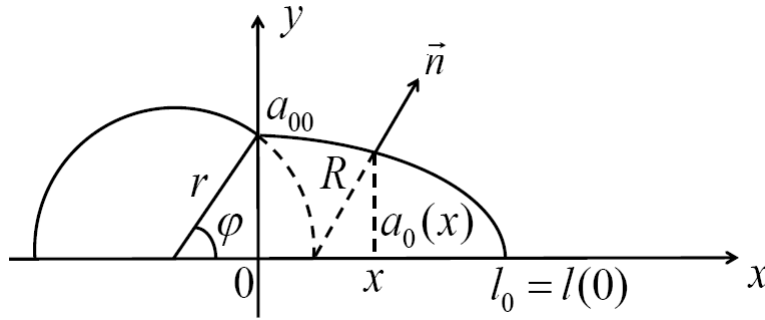


Рис. 2. Начальная полость

Сила давления на поверхность равна $p_0(0) 2 \int_0^{l_0} (1 + a_{0x}^2)^{1/2} dx$. Она уравновешивается пределом прочности $2\varphi r \sigma_0$ и упругой силой раздвинутого порового пространства [9]

$$2E' \int_0^{l_0} R ds = 2E' \int_0^{l_0} a_0 (1 + a_{0x}^2)^{1/2} dx,$$

где $R = a_0 (1 + a_{0x}^2)^{1/2}$ — расстояние от точки границы до оси x по нормали (рис. 2). Таким образом, выполняются соотношения

$$Q_0(0) \pi r^2 \Delta t = 2 \int_0^{l_0} a_0(x) dx - \frac{1}{2} r^2 (2\varphi - \sin 2\varphi),$$

$$p_0(0) \int_0^{l_0} (1 + a_{0x}^2)^{1/2} dx = \varphi r \sigma_0 + E' \int_0^{l_0} a_0 (1 + a_{0x}^2) dx. \tag{1.2}$$

Отсюда определяются a_{00} , l_0 по заданной функции $a_0(x)$.

Если эта функция линейна, $y = a_{00} (1 - x l_0^{-1})$, $a_{0x} = -a_{00} l_0^{-1}$, то получим два уравнения для l_0 и a_{00} :

$$\pi r^2 \Delta t Q_0(0) + \frac{1}{2} r^2 (2\varphi - \sin 2\varphi) = a_{00} l_0,$$

$$p_0(0) l_0 (1 + l_0^{-2} a_{00}^2)^{1/2} = \varphi r \sigma_0 + \frac{1}{2} E' a_{00} (1 + l_0^{-2} a_{00}^2) l_0.$$

Если начальная полость ограничена эллипсом $a_0(x) = a_{00} (1 - l_0^{-2} x^2)^{1/2}$, то уравнения (1.2) для l_0 , a_{00} принимают вид

$$Q_0(0) \pi r^2 \Delta t + \frac{1}{2} r^2 (2\varphi - \sin 2\varphi) = \frac{1}{2} \pi l_0 a_{00},$$

$$p_0(0) l_0 \int_0^{\pi/2} (1 + (n^2 - 1) \sin^2 \psi)^{1/2} d\psi = \varphi r \sigma_0 + \frac{1}{4} \pi E' l_0 a_{00} (n^2 + 1),$$

где $n = a_{00} l_0^{-1}$.

С течением времени давление падает по длине трещины, и на расстоянии $l(t)$ трещина может непрерывно исчезнуть $a(t, l(t)) = 0$ или мгновенно схлопнуться скачком, если давление в жидкости при $x = l(t)$ сравняется с точечным пределом прочности $p \leq \sigma_0$.

Условие на скачке имеет вид [10]

$$[Q] = l'[2a], \quad (1.3)$$

где $[C] = C_2 - C_1$ — символ скачка. За скачком раскрытие трещины можно считать равным величине пор $2ma$, где m — пористость. Расход за скачком определяется потоком фильтрации $2q_l am$. Таким образом, соотношение (1.3) при $x = l(t)$ принимает вид $Q = 2a(q_l + l'(1 - m))$, где q_l — поток фильтрации в сечении $x = l(t)$, который можно определить по закону Дарси:

$$q_l = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial x}, \quad p_f = mp,$$

где μ — динамическая вязкость, k — проницаемость. При $a = 0$ поток жидкости Q через сечение равен нулю и соотношение (1.3) выполнено.

Скорость жидкости в трещине $\mathbf{u} = (u, v)$ определяет расход в сечении и поток фильтрации через границу $y = a(t, x)$:

$$Q = 2 \int_0^a u dy, \quad q = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - D_n, \quad (1.4)$$

где $\mathbf{n} = (-a_x, 1)(1 + a_x^2)^{-1/2}$ — единичная нормаль к границе, $D_n = a_t(1 + a_x^2)^{-1/2}$ — скорость границы в направлении нормали.

Для вязкой жидкости на границе фильтрации $y = a(t, x)$ отсутствует касательная составляющая скорости:

$$u + a_x v = 0. \quad (1.5)$$

Давление жидкости в трещине задаёт граничные условия при $y = a(t, x)$, $p_f = mp$, $p_a = (1 - m)p$,

$$(1 - m)p = E'a(1 + a_x^2)^{1/2}, \quad q = -D_n + v(1 + a_x^2) = -m \frac{k}{\mu} \mathbf{n} \cdot \nabla p. \quad (1.6)$$

Если $a_x = 0$ в начальном сечении $x = 0$, то должны выполняться следующие равенства для решения уравнений Навье — Стокса:

$$v = -\frac{mk}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{при } x = 0, \quad y = a_0(t),$$

$$Q_0(t) = 2 \int_0^{a_0(t)} u dy, \quad p_0(t) = a_0^{-1} \int_0^{a_0} p dy, \quad (1.7)$$

где $Q_0(t)$ — расход, $p_0(t)$ — среднее давление в сечении $x = 0$. Соотношения (1.7) будут определять произвольные элементы в семействах точных решений уравнений Навье — Стокса.

2. Инвариантные движения вязкой жидкости в трещине

В области Ω (рис. 1) вязкая жидкость движется согласно плоским уравнениям Навье — Стокса

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y + \rho^{-1} p_x &= \nu(u_{xx} + u_{yy}), \\ v_t + uv_x + vv_y + \rho^{-1} p_y &= \nu(v_{xx} + v_{yy}), \\ u_x + v_y &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\nu = \rho^{-1}\mu$ — кинематическая вязкость, ρ — плотность жидкости.

Для приближённого определения потока жидкости Q через сечение $x = \text{const}$ выбирают простое решение уравнений (2.1), удовлетворяющее некоторым краевым условиям (1.4)–(1.7). Простые решения можно разыскивать в инвариантных подмоделях.

Уравнения (2.1) допускают бесконечную алгебру Ли операторов с базисом, продолженным на ∇p и на производные a_x, a_{xx} [12]:

$$\begin{aligned}\langle \varphi(t) \rangle_1 &= \varphi \partial_x + \dot{\varphi} \partial_u - x \ddot{\varphi} \rho \partial_p - \ddot{\varphi} \rho \partial_{p_x}, \\ \langle \psi(t) \rangle_2 &= \psi \partial_y + \dot{\psi} \partial_v - y \ddot{\psi} \rho \partial_p - \ddot{\psi} \rho \partial_{p_y}, \\ \langle \sigma(t) \rangle_0 &= \sigma \partial_p, \quad X_2 = \partial_t, \\ X_1 &= y \partial_x - x \partial_y + v \partial_u - u \partial_v + p_y \partial_{p_x} - p_x \partial_{p_y} - (1 + a_x^2) \partial_{a_x} - 3a_x a_{xx} \partial_{a_{xx}}, \\ X_3 &= 2t \partial_t + x \partial_x + y \partial_y - u \partial_u - v \partial_v - 2p \partial_p - 3p_x \partial_{p_x} - 3p_y \partial_{p_y} - a_{xx} \partial_{a_{xx}}.\end{aligned}$$

Произвольный элемент алгебры имеет вид

$$Y = x^1 X_1 + x^2 X_2 + x^3 X_3 + \langle \varphi \rangle_1 + \langle \psi \rangle_2 + \langle \sigma \rangle_0.$$

Выясним, относительно каких операторов Y будут инвариантны краевые условия.

Пусть движение жидкости в трещине симметрично относительно оси x : $v = 0$ при $y = 0$. Условия инвариантности этих уравнений относительно оператора Y приводят к соотношениям $x^1 = \psi = 0$. Условия инвариантности равенства (1.5) относительно Y заданы равенствами

$$\dot{\varphi} = 0, \quad x^3 a = a_t (x^2 + 2tx^3) + a_x (x^3 x + \varphi).$$

Если $x^3 \neq 0$, то, полагая $x^2 = \alpha x^3$, $\varphi = -x_0 x^3$, получим

$$\begin{aligned}a &= (2t + \alpha)^{1/2} \tilde{a}(x_1), \quad x_1 = (x - x_0) (2t + \alpha)^{-1/2}, \\ Y &= (2t + \alpha) \partial_t + (x - x_0) \partial_x + y \partial_y - u \partial_u - v \partial_v - 2p \partial_p.\end{aligned}$$

Инварианты оператора Y таковы:

$$x_1, y_1 = y (2t + \alpha)^{-1/2}, u_1 = u (2t + \alpha)^{1/2}, v_1 = v (2t + \alpha)^{1/2}, p_1 = p (2t + \alpha).$$

Инвариантное решение уравнений (2.1) получается, если величины u_1, v_1, p_1 назначить функциями переменных x_1, y_1 . Уравнения (2.1) становятся инвариантной подмоделью ранга 2 [12]:

$$\begin{aligned}u_{1x_1} + v_{1y_1} &= 0, \\ (u_1 - x_1)u_{1x_1} + (v_1 - y_1)u_{1y_1} + \rho^{-1}p_{1x_1} &= \nu (u_{1x_1x_1} + u_{1y_1y_1}) + u_1, \\ (u_1 - x_1)v_{1x_1} + (v_1 - y_1)v_{1y_1} + \rho^{-1}p_{1y_1} &= \nu (v_{1x_1x_1} + v_{1y_1y_1}) + v_1.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Условия симметричности движения относительно оси x и условие (1.5) записываются в инвариантах как краевые условия

$$\begin{aligned}v_1 &= 0 \quad \text{при} \quad y_1 = 0, \\ u_1 + \tilde{a}' v_1 &= 0 \quad \text{при} \quad y_1 = \tilde{a}(x_1).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Рассмотрим простое решение задачи (2.2), (2.3):

$$v_1 = y_1 V'(x_1), \quad u_1 = U(y_1) - V(x_1).$$

Уравнения (2.2) принимают вид

$$\begin{aligned}\rho^{-1}p_{1x_1} &= -\nu V'' - V - (V + x_1)V' + \nu U'' + U + y_1 U' + V'(U - y_1 U'), \\ \rho^{-1}p_{1y_1} &= y_1 \left[\nu V''' + (V + x_1)V'' - V'^2 + 2V' - UV'' \right].\end{aligned}$$

Условие совместности приводит к равенству

$$y_1^{-1}(\nu U''' + 2U') + U''(1 - V') = \nu V^{IV} + (V + x_1 - U)V''' + (3 - V')V'', \quad (2.4)$$

в котором надо разделить переменные x_1 и y_1 . Дифференцирование по x_1 и y_1 приводит к уравнению с разделяющимися переменными при $V'' \neq 0$, $U' \neq 0$:

$$\frac{U'''}{U'} = \frac{V^{IV}}{V''} = \kappa,$$

где κ — постоянная. Отсюда следуют равенства

$$V'' = \kappa V + \kappa_1 x_1 + \kappa_0, \quad U'' = \kappa U + c. \quad (2.5)$$

В уравнении (2.4) в силу (2.5) переменные разделяются:

$$\begin{aligned}(\nu\kappa + 2)y_1^{-1}U' + (\kappa + \kappa_1)U &= V'((\kappa - \kappa_1)x_1 + c - \kappa_0) + V(\nu\kappa^2 + \kappa_1 + 3\kappa) + \\ &+ x_1(\nu\kappa + 4)\kappa_1 + \nu\kappa\kappa_0 + 3\kappa_0 - c = c_0,\end{aligned} \quad (2.6)$$

где c_0, c, κ, κ_0 — постоянные.

Если $\kappa \neq 0$, то из (2.5) следует решение $U = -\frac{c}{\kappa} + C_1 e^{\sqrt{\kappa}y_1} + C_2 e^{-\sqrt{\kappa}y_1}$. Подстановка в (2.6) и приравнивание нулю коэффициентов при линейно независимых функциях даёт равенства

$$c_0 = -c \left(1 + \frac{\kappa_1}{\kappa} \right), \quad \kappa = -\frac{2}{\nu} < 0, \quad \kappa_1 = \frac{2}{\nu}.$$

Из (2.5) получим решение $V = x_1 + \frac{1}{2}\nu\kappa_0 + V_0 \sin\left(\sqrt{\frac{2}{\nu}}x_1 + \psi\right)$, где V_0, ψ — постоянные. Подстановка в (2.6) приводит к противоречию. Следовательно, $\kappa = 0$ и

$$V = \frac{1}{6}\kappa_1 x_1^3 + \frac{1}{2}\kappa_0 x_1^2 + V_1 x_1, \quad U = \frac{1}{2}c y_1^2 + U_1 y_1 + U_0.$$

Из (2.6) следуют соотношения

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= 0, \quad c_0 = 2c, \quad c = \kappa_0 \neq 0, \quad U_1 = 0, \\ V &= \frac{1}{2}c x_1^2 + V_1 x_1, \quad U = \frac{1}{2}c y_1^2 + U_0, \\ \rho^{-1}p_1 &= \frac{1}{2}y_1^2 \left(-\frac{1}{4}c^2 y_1^2 - \frac{1}{2}c^2 x_1^2 + c(3 - V_1)x_1 - cU_0 - V_1^2 + 2V_1 \right) - \\ &- \frac{1}{8}c x_1^4 - \frac{1}{2}c x_1^3 (V_1 + 1) + \frac{1}{2}x_1^2 (cU_0 - V_1(V_1 + 2)) + x_1 U_0 (V_1 + 1) + P_0.\end{aligned}$$

Из краевого условия (2.3) получим уравнение для $\tilde{a}(x_1)$:

$$\tilde{a}\tilde{a}'(c x_1 + V_1) + \frac{1}{2}c\tilde{a}^2 - \frac{1}{2}c x_1^2 - V_1 x_1 + U_0 = 0.$$

Решение этого уравнения

$$y_1^2 = \frac{1}{3} \left(x_1 + \frac{V_1}{c} \right)^2 - \left(\frac{V_1}{c} \right)^2 - 2 \frac{U_0}{c} + \frac{D}{cx_1 + V_1} \quad (2.7)$$

задаёт движение границы трещины.

Итак, получили инвариантное решение уравнений (2.1)

$$u = (2t + \alpha)^{-1/2} \left[\frac{1}{2} c (y_1^2 - x_1^2) - V_1 x_1 + U_0 \right],$$

$$v = (2t + \alpha)^{-1/2} y_1 (cx_1 + V_1), \quad p = (2t + \alpha)^{-1} p_1,$$

где $x_1 = (x - x_0)(2t + \alpha)^{-1/2}$, $y_1 = y(2t + \alpha)^{-1/2}$.

При $V'' = 0$ решение уравнений (2.2) имеет вид

$$v_1 = \kappa y_1, \quad \rho^{-1} p_1 = \frac{1}{2} \kappa (2 - \kappa) y_1^2 - \frac{1}{2} \kappa (\kappa + 2) x_1^2 + (c - \kappa_0 (\kappa + 1)) x_1 + P_0,$$

$$u_1 = U(y_1) - \kappa x_1 - \kappa_0,$$

где P_0 , κ , κ_0 , c — постоянные, а функция $U(y_1)$ удовлетворяет уравнению Вебера [13]

$$\nu U'' - (\kappa - 1) y_1 U' + (\kappa + 1) U = c.$$

При $\kappa = -1$ имеем решение

$$U = c \int e^{-y_1^2/\nu} \left(\int e^{y_1^2/\nu} dy_1 \right) dy_1 + C_0 \int e^{-y_1^2/\nu} dy_1 + D_0.$$

Условия (2.3) задают уравнение для границы трещины

$$\kappa \tilde{a} \tilde{a}' + U(\tilde{a}) = \kappa x_1 + \kappa_0.$$

При $U' = 0$ получим решение уравнений (2.2)

$$u_1 = U - V(x_1), \quad v_1 = y_1 V'$$

$$\rho^{-1} p_1 = \frac{1}{2} c y_1^2 - \nu V' - x_1 V - \frac{1}{2} V^2 + UV + P_0,$$

где U , c , P_0 — постоянные, а функция $V(x_1)$ удовлетворяет уравнению

$$\nu V''' + (V + x_1 - U) V'' - V'^2 + 2V' = c.$$

Из условий (2.3) следует уравнение для границы трещины $V' \tilde{a} \tilde{a}' = V - U$.

3. Неинвариантные движения вязкой жидкости в трещине

Рассмотрим решения системы (2.1) с линейной поперечной скоростью:

$$v = y V_x, \quad u = u_0(t, y) - V(t, x), \quad (3.1)$$

$$\rho^{-1} p = -\frac{1}{2} y^2 \alpha - V_{xx} U(t, y) + P_0(t, x),$$

$$\alpha = -\nu V_{xxx} + V_{xt} - V V_{xx} + V_x^2, \quad U_y = y u_0,$$

$$\begin{aligned}
& y^{-1}U_{ty} - V_t + VV_x - 2y^{-1}U_yV_x + U_{yy}V_x + \\
& + \nu (V_{xx} - y^{-1}U_{yyy} + 2y^{-2}U_{yy} - 2y^{-3}U_y) = -P_{0x} + V_{xxx}U + \frac{1}{2}y^2\alpha_x.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

В (3.2) надо разделить переменные. Дифференцируем уравнение (3.2) по x и по y и получаем равенство

$$\left(-2(y^{-1}U_y)_y + U_{yyy}\right)V'' = V^{IV}U_y + y\alpha''. \tag{3.3}$$

Если $V'' \neq 0$, то деление на yV'' и дифференцирование по y приводит к разделению переменных

$$\left(y^{-1}U_{yyy} - 2y^{-1}(y^{-1}U_y)_y\right)_y = (y^{-1}U_y)_y V''^{-1}V^{IV}.$$

Если $(y^{-1}U_y)_y \neq 0$, то

$$\begin{aligned}
V^{IV} = c(t)V'' & \Rightarrow V'' = cV + c_1(t)x + c_0(t), \quad c \neq 0, \\
U_{yy} = 2y^{-1}U_y + cU + b(t)y^2 + b_1(t).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Из (3.3) в силу (3.4) следует равенство

$$\alpha = 2bV + c_2(t)x + c_3(t) = -\nu(cV' + c_1) + V_t' + V'^2 - V(cV + c_1x + c_0). \tag{3.5}$$

В равенстве (3.2) в силу (3.4) переменные разделяются:

$$\begin{aligned}
& y^{-1}U_{ty} - \nu(cy^{-1}U_y + 2b) - c_1U - \frac{1}{2}c_2y^2 = m(t) = \\
& = V_t - VV_x' - b_1V' - \nu(cV + c_1x + c_0) - P_{0x}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Получили два уравнения (3.4) и (3.6) для функции $U(t, y)$. Дифференцирование по t уравнения (3.4) в силу (3.6) приводит к соотношению

$$cU_t = c_1yU_y + U(\nu c^2 - c' - c_1) + y^2\left(\frac{1}{2}c_2 + \nu cb - b'\right) - b_1' - m - 2\nu b + \nu cb_1. \tag{3.7}$$

Дальнейшее дифференцирование по y в силу (3.4), (3.6) даёт соотношение

$$y^{-1}U_y(2c_1 - c') = y^2\left(\frac{1}{2}cc_2 - bc_1\right) + cm + 2b' - c_1b_1 - c_2. \tag{3.8}$$

Для функции $V(t, x)$ тоже получили два уравнения (3.4) и (3.5).

Дифференцирование по x (3.5) в силу (3.4) даёт

$$cV_t + V'(c_1x + c_0 - 2b) = V(\nu c^2 + c_1 - c') + x(\nu cc_1 - c_1') + \nu cc_0 - c_0' + c_2.$$

Дальнейшее дифференцирование по x последовательно приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}
cV'^2 - c'V' & = c^2V^2 + 2cV(c_1x + c_0) + c_1^2x^2 + x(cc_2 + 2c_1c_0 - 2c_1b) + \\
& + c_1' + cc_3 + c_0(c_0 - 2b), \\
(c' + 2c_1)V'' & = 2c_1b - cc_2, \quad (cV' + c_1)(c' + 2c_1) = 0, \\
c' + 2c_1 & = 0, \quad cc_2 = 2c_1b = -bc'.
\end{aligned}$$

Мы предположили, что $(y^{-1}U_y)_y \neq 0$, тогда из (3.8) следуют равенства $c' = c_1 = c_2 = 0$, $m = -2c^{-1}b'$. И получаем интеграл уравнения (3.4)

$$cV'^2 = (cV + c_0)^2 + cc_3 - 2c_0b \quad (3.9)$$

и эволюционное уравнение

$$cV_t + V'(c_0 - 2b) = \nu c(cV + c_0) - c'_0. \quad (3.10)$$

Переопределённая система для функции V совместна, только если $c'_0 = 0$, $cc_3 = 2c_0b + Ke^{2\nu ct}$, где K , c_0 , c — постоянные.

Общее решение совместной системы (3.9), (3.10) имеет вид

$$cV + c_0 = e^{\nu ct} \begin{cases} \kappa \operatorname{sh}(\pm\sqrt{c}s + \psi), & c > 0, \quad K = \kappa^2, \\ \kappa \operatorname{ch}(\pm\sqrt{c}s + \psi), & c > 0, \quad K = -\kappa^2, \\ \kappa \sin(\pm\sqrt{|c|}s + \psi), & c < 0, \quad K = -\kappa^2, \end{cases} \quad (3.11)$$

где ψ — постоянная, $s = x - c_0c^{-1}t + 2c^{-1} \int bdt$. Общее решение уравнений (3.4), (3.7) для функции U есть $U = U_0(y)e^{\nu ct} - bc^{-1}y^2 - b_1c^{-1} + 2bc^{-2}$, где $U_0(y)$ удовлетворяет уравнению

$$U_0'' = 2y^{-1}U_0' + cU_0. \quad (3.12)$$

Функция $u_0(t, y)$ из (3.1) задаётся формулой $u_0 = \bar{u}_0(y)e^{\nu ct} - 2bc^{-1}$, $\bar{u}_0 = y^{-1}U_0'$. В силу (3.12) функция \bar{u}_0 удовлетворяет линейному уравнению $\bar{u}_0'' = c\bar{u}_0$, поэтому

$$\bar{u}_0 = D \begin{cases} \sin(\sqrt{|c|}y + \varphi), & c < 0, \\ \operatorname{sh}(\sqrt{c}y + \varphi), & c > 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

При этом из (3.1) и (3.6) следует, что

$$U_0 = D \begin{cases} -\frac{y}{\sqrt{|c|}} \cos(\sqrt{|c|}y + \varphi) + \frac{1}{|c|} \sin(\sqrt{|c|}y + \varphi), & c < 0, \\ \frac{y}{\sqrt{c}} \operatorname{ch}(\sqrt{c}y + \varphi) - \frac{1}{c} \operatorname{sh}(\sqrt{c}y + \varphi), & c > 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

где D , φ — постоянные.

Равенство (3.2) определяет функцию

$$P_0 = \frac{2b'}{c}x - \frac{1}{2}V^2 - V \left(\frac{c_0}{c} + b_1 - 2\frac{b}{c} \right) + p_0(t).$$

Итак, получили решение вида (3.1)

$$u = -2\frac{b}{c} + \bar{u}_0(y)e^{\nu ct} - V, \quad v = yV_x, \quad (3.15)$$

$$\rho^{-1}p = -(cV + c_0)U_0(y)e^{\nu ct} - \frac{K}{2c}y^2e^{2\nu ct} - \frac{c_0}{c} \left(V - b_1 + 2\frac{b}{c} \right) + 2\frac{b'}{c}x - \frac{1}{2}V^2 + p_0(t),$$

где функции \bar{u}_0 , V , U_0 заданы формулами (3.11), (3.13), (3.14), в которых $b(t)$, $b_1(t)$, $p_0(t)$ — произвольные функции, а c , c_0 , K , ϕ , ψ — произвольные постоянные. Произвольные величины определяются из краевых условий при $x = 0$.

Модели раскрытия трещины получаются на основе уравнения (1.1). Для этого по решению (3.15) вычисляем по формуле (1.4)

$$Q = 2 \int_0^a u dy = -4 \frac{b}{c} a + 2e^{\nu ct} \int_0^a u_0(y) dy - 2Va$$

и по формуле (1.6)

$$q = m\rho \frac{k}{\mu} (1 + a_x^2)^{-1/2} \left[a_x \left(-cV_x U_0(a) e^{\nu ct} - \frac{c_0}{c} V_x + 2 \frac{b'}{c} - VV_x \right) + (cV + c_0) U_0'(a) e^{\nu ct} + \frac{K}{c} a e^{\nu ct} \right]. \quad (3.16)$$

При нахождении решений вида (3.1) уравнений (2.1) предполагалось, что выполняется условие $V'' \neq 0$. Рассмотрим случай $V = \kappa(t)x + \kappa_1(t)$. В этом случае

$$\begin{aligned} v &= y\kappa, \quad u = u_0(t, y) - \kappa x, \\ \rho^{-1}p &= -\frac{1}{2}y^2(\kappa' + \kappa^2) + \frac{1}{2}x^2(\kappa' - \kappa^2) + c(t)x + p_0(t), \\ u_{0t} - \nu u_{0yy} + \kappa u u_{0y} + (\kappa - 2)u_0 + c &= 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где функции $\kappa(t)$, $c(t)$, $p_0(t)$ определяются из граничных условий при $x = 0$.

Модель раскрытия трещины задаётся уравнением (1.1), где Q и q вычисляются по формулам (1.4), (1.6), (3.17):

$$\begin{aligned} Q &= 2 \int_0^a u dy = 2 \int_0^a u_0 dy - \kappa xa, \\ q &= m\rho \frac{k}{\mu} (1 + a_x^2)^{-1/2} (a_x (c + x(\kappa' - \kappa^2)) + a(\kappa' + \kappa^2)), \\ a_t + a_x u_0(t, a) - \frac{1}{2}\kappa (xa)_x + m\rho \frac{k}{\mu} [a_x (c + x(\kappa' - \kappa^2)) + a(\kappa' + \kappa^2)] &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Есть ещё равенства (1.5) и (1.6) при $y = a(t, x)$:

$$\begin{aligned} u_0(t, a) + \kappa a a_x &= 0, \\ E' a (1 + a_x^2)^{1/2} &= (1 - m)\rho \left[p_0 + cx + \frac{1}{2}x^2(\kappa' - \kappa^2) - \frac{1}{2}a^2(\kappa' + \kappa^2) \right], \end{aligned}$$

которые переопределяют модель (3.17), (3.18). Эти равенства можно учесть в уравнении (3.18). Например, в (3.18) можно положить $u_0 = -\kappa a a_x$ и игнорировать уравнение (3.17).

Рассмотрим случай инвариантного решения вида (3.1), когда $u_0 = \text{const}$. В этом случае уравнения (2.1) принимают вид

$$\begin{aligned} v &= yV_x, \quad u = u_0 - V(t, x), \quad \rho^{-1}p = \frac{1}{2}y^2c(t) + P_0(t, x), \\ V_t &= \nu V_{xx} + (V - u_0)V_x + P_{0x}, \quad 2V_x^2 + P_{0xx} + c = 0. \end{aligned}$$

По формулам (1.4), (1.6) вычислим

$$Q = 2(u_0 - V)a, \quad q = m\rho \frac{k}{\mu} (1 + a_x^2)^{-1/2} (a_x P_{0x} - ca).$$

Уравнение (1.1) принимает вид

$$a_t + ((u_0 - V)a)_x + m\rho \frac{k}{\mu} (a_x P_{0x} - ca) (1 + a_x^2)^{-1/2} = 0.$$

При $y = a(t, x)$ выполняются соотношения (1.5), (1.6):

$$u_0 - V + aa_x V_x = 0, \quad (1 - m)\rho \left(\frac{1}{2} ca^2 + P_0 \right) = E'a (1 + a_x^2)^{1/2}.$$

Имеем пять уравнений для трёх функций V , P_0 , a . Все можно использовать при выводе уравнений приближённой модели

$$a_t - (a^2 a_x V_x)_x + m\rho \frac{k}{\mu} \left[a_x \left(-caa_x + \frac{E'}{\rho(1-m)} \left(a\sqrt{1+a_x^2} \right)_x - ca \right) \right] (1 + a_x^2)^{-1/2} = 0, \quad (3.19)$$

где

$$2V_x^2 = -c + c(aa_x)_x - \frac{E'}{\rho(1-m)} \left(a\sqrt{1+a_x^2} \right)_{xx}.$$

Заключение

Модели раскрытия трещины выводятся на основе закона сохранения массы жидкости, проходящей через сечение (1.1), точных решений уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости, краевых условий отсутствия касательного движения, закона фильтрации жидкости через подвижную границу трещины и при наличии упругой силы пласта, сжимающей трещину. В результате выведены приближённые уравнения раскрытия трещины в виде конечных формул (2.7) для инвариантного движения, в виде дифференциальных уравнений первого (3.16), (3.18) и более высоких порядков (3.18), (3.19).

Список литературы

1. **Баренблатт, Г. И.** Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. — М. : Недра, 1972. — 288 с.
2. Математические модели гидроразрыва пласта / Д. В. Есипов, Д. С. Куранakov, В. Н. Лапин, С. Г. Чёрный // Вычислит. технологии. — 2013. — Т. 19, № 2. — С. 33–61.
3. **Христианович, С. А.** О гидравлическом разрыве нефтяного пласта / С. А. Христианович, Ю. П. Желтов // Изв. АН СССР. Отд-е техн. наук. — 1955. — № 5. — С. 3–41.
4. **Баренблатт, Г. И.** О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механики гидравлического разрыва нефтеносного пласта / Г. И. Баренблатт // Приклад. математика и механика. — 1956. — Т. 20, вып. 4. — С. 475–486.
5. **Баренблатт, Г. И.** Об образовании горизонтальных трещин при гидравлическом разрыве нефтеносного пласта / Г. И. Баренблатт // Изв. АН СССР. Отд-е техн. наук. — 1956. — № 9. — С. 101–105.
6. **Geertsma, J.** A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures / J. Geertsma, F. de Klerk // J. of Petroleum Technology. — 1969. — Vol. 21, iss. 12. — P. 1571–1581.
7. **Perkins, Т. К.** Widths of hydraulic fractures / Т. К. Perkins, L. R. Kern // J. of Petroleum Technology. — 1961. — Vol. 13, iss. 9. — P. 937–949.

8. **Irwin, G. R.** A continuum-mechanics view of crack propagation / G. R. Irwin, A. A. Wells // Metallurgical Reviews. — 1965. — V. 10, iss. 1. — P. 223–270.
9. **Nordgren, R. P.** Propagation of a vertical hydraulic fracture / R. P. Nordgren // Soc. of Petroleum Engineers J. — 1972. — Vol. 12, iss. 4. — P. 306–314.
10. **Хабилов, С. В.** Модели раскрытия трещины на основе точных решений уравнений Навье — Стокса / С. В. Хабилов, С. С. Хабилов // Приклад. математика и техн. физика. — 2019. — Т. 60, № 2. — С. 169–179.
11. **Хабилов, С. В.** Автомодельный упругий режим фильтрации через подвижную границу / С. В. Хабилов, С. С. Хабилов // Многофаз. системы. — 2018. — Т. 13, № 2. — С. 64–72.
12. **Чиркунов, Ю. А.** Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды / Ю. А. Чиркунов, С. В. Хабилов. — Новосибирск : НГТУ, 2012. — 659 с.
13. **Хартман, Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. — М. : Мир, 1970. — 720 с.

Поступила в редакцию 01.03.2019

После переработки 05.04.2019

Сведения об авторах

Хабилов Салават Валеевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия; профессор кафедры математики, Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия; e-mail: habirov@anrb.ru.

Хабилов Салават Салаватович, аспирант, Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия; e-mail: salavat.s.khabirov@gmail.com.

MODELS OF PLANE FRACTURES EXPANSION

S.V. Khabirov^a, S.S. Khabirov^b

Mavlyutov Institute of Mechanics of Ufa Federal Research Centre of RAS, Ufa, Russia

^akhabirov@anrb.ru, ^bsalavat.s.khabirov@gmail.com

Approximate models of crack opening in the reservoir under the action of the filtered fluid are derived. The cross-sections of the fracture are assumed to be plane-parallel and have a small thickness. The models are based on exact solutions of the equations for viscous fluid motion including invariant solutions. Filtration of a fluid through a moving boundary, the absence of a tangential motion at the boundary, and elastic forces compressing the crack are taken into account.

Keywords: *filtration, moving boundary, viscous fluid, exact solutions, fracture expansion.*

References

1. **Barenblatt G.I., Entov V.I., Ryzhik V.M.** *Teoriya nestatsionarnoy fil'tratsii zhidkosti i gaza* [Theory of nonstationary filtration of fluid and gas]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 288 p. (In Russ.).
2. **Esipov D.V., Kuranakov D.S., Lapin V.N., Cherniy S.G.** Matematicheskiye modeli gidrorazryva plasta [Mathematical models of hydraulic fracturing]. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computational technologies], 2013, vol. 19, no. 5, pp. 33–61. (In Russ.).
3. **Khristianovich S.A., Zheltov Yu.P.** O gidravlicheskom razryve neftyanogo plasta [On hydraulic fracturing of oil reservoir]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Otdeleniye tekhnicheskikh nauk* [News of USSR Academy of Sciences. Technical Sciences Branch], 1955, no. 5, pp. 3–41. (In Russ.).
4. **Barenblatt G.I.** O nekotorykh zadachakh teorii uprugosti, vznikayushchikh pri issledovanii mekhaniki gidravlicheskogo razryva neftenosnogo plasta [On some problems of the theory of elasticity arising in the study of the mechanics of hydraulic fracturing of oil-bearing formation]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics], 1956, vol. 20, no. 4, pp. 475–486. (In Russ.).
5. **Barenblatt G.I.** Ob obrazovanii gorizontal'nykh treshchin pri gidravlicheskom razryve neftenosnogo plasta [On the formation of horizontal cracks during hydraulic fracturing of the oil reservoir]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Otdeleniye tekhnicheskikh nauk* [News of USSR Academy of Sciences. Technical Sciences Branch], 1956, no. 9, pp. 101–105. (In Russ.).
6. **Geertsma J., de Klerk F.** A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures. *Journal of Petroleum Technology*, 1969, vol. 21, iss. 12, pp. 1571–1581.
7. **Perkins T.K., Kern L.R.** Widths of hydraulic fractures. *Journal of Petroleum Technology*, 1961, vol. 13, iss. 9, pp. 937–949.
8. **Irwin G.R.** A continuum-mechanics view of crack propagation. *Metallurgical Reviews*, 1965, vol. 10, no. 38, pp. 223–270.
9. **Nordgren R.P.** Propagation of a vertical hydraulic fracture. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 1972, vol. 12, iss. 4, pp. 306–314.
10. **Khabirov S.V., Khabirov S.S.** Modeli raskrytiya treshchiny na osnove tochnykh resheniy uravneniy Nav'ye — Stoksa [Crack opening models based on the exact solutions of the Navier — Stokes equations]. *Prikladnaya matematika i tekhnicheskaya fizika* [Applied mathematics and technical physics], 2019, vol. 60, no. 2, pp. 169–179. (In Russ.).

11. **Khabirov S.V., Khabirov S.S.** Avtomodel'nyy uprugiy rezhim fil'tratsii cherez podvizhnuyu granitsu [Self-similar elastic regime of filtration through moving boundary]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase systems], 2018, vol. 13, no. 2, pp. 64–72. (In Russ.).
12. **Chirkunov Yu.A., Khabirov S.V.** *Elementy simmetriynogo analiza differentsial'nykh uravneniy mekhaniki sploshnoy sredy* [Symmetry analysis elements for continuum mechanics differential equations]. Novosibirsk, Novosibirsk State Technical University, 2012. 659 p. (In Russ.).
13. **Hartman P.** *Ordinary differential equations*. New York, London, Sydney, John Wiley & Sons, 1964, 720 p.

Accepted article received 01.03.2019

Corrections received 05.04.2019