Челябинский физико-математический журнал. 2019. Т. 4, вып. 2. С. 155–164.

УДК 517.547 DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14203

НОВАЯ ОЦЕНКА СНИЗУ МИНИМУМА МОДУЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

А. Ю. Попов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
superchuchundra2015@yandex.ru

Получена оценка снизу минимума модуля аналитической функции через интегральную норму на «большой» окружности. В доказательстве используются базовые факты теории пространств аналитических в круге функций и классические многочлены Чебышева. Из основной теоремы для целой функции выводится утверждение, в котором интегральная норма заменена на максимум модуля. Построен специальный пример последовательности целых функций, показывающий, что этот результат не может быть сильно улучшен. Ранее в теории целых функций были известны теоремы об оценках снизу минимума модуля целой функции на системе расширяющихся до бесконечности окружностей через какие-либо степени максимума модуля на тех же окружностях.

Ключевые слова: *аналитическая функция, минимум модуля, многочлены Чебышева.*

Введение

Напомним некоторые сведения из теории аналитических функций. Через $A_{\mathcal{R}}$ обозначим пространство функций, голоморфных в круге $|z| < \mathcal{R}$. Если функция $f \in A_{\mathcal{R}}$ отлична от тождественной константы, то интегральная норма

$$I(f,\, x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(xe^{i\varphi})|\, d\varphi$$

возрастает по $x \in (0,\, \mathcal{R})$ (см. [1, гл. 5, § 3]). Через $H^1(\mathcal{R})$ обозначим пространство всех функций $f \in A_{\mathcal{R}}$, для которых

$$\|f\|_{H^1(\mathcal{R})} = \lim_{x \to \mathcal{R}-} I(f,\, x) < +\infty.$$

Если $f \in H^1(\mathcal{R})$, то при почти всех значениях $\varphi \in (0,\, 2\pi)$ существует конечный предел $\lim\limits_{x \to \mathcal{R}-} f(xe^{i\varphi})$, который обозначим $f(\mathcal{R}e^{i\varphi})$. Функция $f(\mathcal{R}e^{i\varphi})$ переменной φ лежит в пространстве $L(0,\, 2\pi)$, и в этом пространстве $f(xe^{i\varphi})$ сходится к $f(\mathcal{R}e^{i\varphi})$ при $x \to \mathcal{R}-$. Приведённые факты изложены во многих монографиях (см., например, [2, гл. 1, 2]).

Положим

$$m(f,\, r) = \min_{|z|=r} |f(z)|, \qquad 0 < r < \mathcal{R}. \tag{1}$$

Сформулируем основной результат статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 18-01-00236).

Теорема. *Пусть $R > 0$, и пусть*

$$f(z) = \sum_{k=\nu}^{\infty} a_k\, z^k \in H^1(3R), \quad a_\nu \neq 0.$$

Тогда существует точка $r \in (R/3,\, R)$, в которой выполняется неравенство

$$m(f,\, r) > \frac{|a_\nu|^2\, R^{2\nu}}{6\, \|f\|_{H^1(3R)}}. \tag{2}$$

С другой стороны, наибольшее значение $m(f,\, r)$ на отрезке $[R/3,\, R]$, вообще говоря, не допускает оценки снизу через (-1)-ю степень величины $I(f,\, 11R/6)$. Именно, существует последовательность целых функций g_n, для которой верны соотношения $g_n(0) = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \left(M\Big(g_n,\, \frac{11R}{6}\Big) \max_{R/3 \leqslant r \leqslant R} m(g_n,\, r) \right) = 0, \tag{3}$$

где $M(g,\, x) = \max\limits_{|z|=x} |g(z)| \geqslant I(g,\, x)$.

Замечание. Рассмотрим задачу о положительности величины

$$\inf \left\{ \Big(\max_{R/3 \leqslant r \leqslant R} m(f,\, r) \Big) \|f\|_{H^1(aR)} \;\big|\; f \in H^1(aR),\, f(0) = 1 \right\} \tag{4}$$

для значений $a > 1$. В теореме доказано, что при $a = 3$ (и тем более при $a > 3$) точная нижняя грань (4) положительна, а при $a = 11/6$ (и, следовательно, при всех $a \in (1,\, 11/6]$) равна нулю. Из доказательства будет видно, что величина (4) равна нулю и в некоторой окрестности точки $a = 11/6$; таким образом, вторая часть теоремы допускает небольшое усиление. Вместе с тем автору неизвестно, положительна ли величина (4) при $2 \leqslant a < 3$.

В теории целых функций доказан ряд теорем [3, гл. 3], [8, гл. 6] об оценке снизу минимума модуля (1) целой функции f на некоторых множествах значений r, имеющих $+\infty$ своей предельной точкой, через какие-либо степени максимума модуля $M(f,\, r)$. Показатели степеней в упомянутых оценках зависят от скорости роста $M(f,\, r)$ при $r \to +\infty$. В работе [7] У. Хэйман предъявил (в виде бесконечного произведения) целую функцию F бесконечного порядка, для которой множество

$$E(F,\, c) = \big\{ r > 0 \,|\, m(F,\, r) > M^{-c}(F,\, r) \big\}$$

ограничено при любом (сколь угодно большом) значении показателя c. Другими словами, оценка снизу минимума модуля (1) целой функции через какую-либо фиксированную степень максимума модуля на той же окружности в общем случае невозможна ни на какой последовательности значений r, стремящейся к $+\infty$. В настоящей работе дана оценка снизу величины $\max\{m(f,\, r) \,|\, R/3 \leqslant r \leqslant R\}$ через одну и ту же (минус первую) степень L^1-нормы (и тем более максимума модуля) функции f на окружности «большого» радиуса $3R$. В частности, из теоремы выводится такое утверждение:

Следствие. *Для произвольной целой функции*

$$f(z) = \sum_{k=\nu}^{\infty} a_k\, z^k, \quad a_\nu \neq 0,$$

существует такая возрастающая и стремящаяся к $+\infty$ последовательность положительных чисел $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, что при всех $n\in\mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$r_n+\frac{1}{3}<r_{n+1}<3r_n+1, \qquad m(f,\,r_n)>\frac{|a_\nu|^2\,r_n^{2\nu}}{6\,M(f,\,9r_n)}.$$

Получены также более общие результаты об оценке снизу для характеристики $\max\{m(f,\,r)\,|\,qR\leqslant r\leqslant R\}$ через $\|f\|_{H^1(AR)}^{-d}$ (числа $q\in(0,\,1)$ и $d>0$ произвольны), где величина $A=A(q,\,d)$ явно указана. Но в этой работе мы ограничимся рассмотрением частного случая $q=1/3$, $d=1$, $A=3$, поскольку именно в этом случае формулировка наиболее проста и доказательство не перегружено большими выкладками. Метод же доказательства, применяемый в общем случае, достаточно ясно просматривается и в анализируемом частном.

1. Многочлены Чебышева и связанные с ними соотношения

В доказательстве теоремы будут использоваться многочлены Чебышева. Напомним несколько утверждений относительно этих многочленов (см., например, [5, гл. I, § 2]) и докажем одну лемму. Обозначим

$$t_{k,\,n}=\cos\frac{\pi(2k-1)}{2n}, \quad k,\,n\in\mathbb{N}, \qquad T_n(t)=\prod_{k=1}^{n}(t-t_{k,\,n}). \tag{5}$$

Ввиду равенств

$$t_{k,\,n}=-\,t_{n+1-k,\,n}, \quad 1\leqslant k\leqslant n, \tag{6}$$

справедливы тождества

$$T_n(t)=\prod_{k=1}^{n}(t-t_{k,\,n})=\prod_{k=1}^{n}(t+t_{n+1-k,\,n})=\prod_{j=1}^{n}(t+t_{j,\,n}). \tag{7}$$

Многочлены T_n называются многочленами Чебышева и допускают следующие представления:

$$T_n(t)=2^{1-n}\,\cos(n\arccos t), \quad -1\leqslant t\leqslant 1, \tag{8}$$

$$T_n(t)=2^{-n}\,\Big(\big(\,t+\sqrt{t^2-1}\,\big)^n+\big(\,t-\sqrt{t^2-1}\,\big)^n\Big), \quad t\in\mathbb{R}\setminus(-1,\,1). \tag{9}$$

При $t\in(-1,\,1)$ на основании (5) и (8) имеем

$$T_n'(t)=\sum_{m=1}^{n}\ \prod_{j=1,\,j\neq m}^{n}(t-t_{j,\,n})=2^{1-n}\,n\,(1-t^2)^{-1/2}\,\sin(n\arccos t). \tag{10}$$

Поскольку $\cos(n\arccos t_{k,\,n})=0$ при $1\leqslant k\leqslant n$, то $\sin(n\arccos t_{k,\,n})=\pm1$. Следовательно, положив в (10) $t=t_{k,\,n}$, $1\leqslant k\leqslant n$, находим

$$|T_n'(t_{k,\,n})|=\prod_{j=1,\,j\neq k}^{n}|t_{k,\,n}-t_{j,\,n}|=2^{1-n}\,n\,(1-t_{k,\,n}^2)^{-1/2}.$$

Отсюда и из определения чисел $t_{k,\,n}$ в (5) получаем равенства

$$\prod_{j=1,\,j\neq k}^{n}|t_{k,\,n}-t_{j,\,n}|^{-1}=\frac{2^{n-1}}{n}\,\sin\frac{\pi(2k-1)}{2n}, \quad 1\leqslant k\leqslant n. \tag{11}$$

Лемма. *Для суммы*

$$Q_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (s + t_{k,\,n})^{-1} \sin \frac{\pi(2k-1)}{2n} \tag{12}$$

при любых $n \in \mathbb{N}$ и $s > 1$ верна оценка сверху

$$Q_n(s) \leqslant \frac{s}{s^2 - 1}. \tag{13}$$

Доказательство. Согласно (6) получаем для суммы (12) другое представление

$$Q_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (s - t_{k,\,n})^{-1} \sin \frac{\pi(2k-1)}{2n}. \tag{14}$$

Сложив равенства (12) и (14), находим

$$Q_n(s) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{s + t_{k,\,n}} + \frac{1}{s - t_{k,\,n}} \right) \sin \frac{\pi(2k-1)}{2n} =$$

$$= \frac{s}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s^2 - t_{k,\,n}^2} \sin \frac{\pi(2k-1)}{2n} \leqslant \frac{s}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{s}{s^2 - 1}.$$

Лемма доказана.

2. Вывод оценки снизу минимума модуля

Убедимся вначале, что нужную оценку величины (1) достаточно доказать в случае $\nu = 0$, $f(0) = a_0 = 1$. Действительно, рассмотрев общий случай, положим $f_1(z) = f(z)/(a_\nu z^\nu)$. Тогда $f_1(0) = 1$ и, считая оценку для (1) доказанной в этом случае, получим, что для любого $R > 0$

$$\exists\, r \in \left(\frac{R}{3},\, R \right): \quad m(f_1,\, r) > \frac{1}{6\, \|f_1\|_{H^1(3R)}}. \tag{15}$$

А так как верны равенства

$$m(f_1,\, r) = \frac{m(f,\, r)}{|a_\nu|\, r^\nu}, \qquad \|f_1\|_{H^1(3R)} = \frac{\|f\|_{H^1(3R)}}{|a_\nu|\, (3R)^\nu},$$

то из (15) находим

$$\frac{m(f,\, r)}{|a_\nu|\, r^\nu} > \frac{|a_\nu|\, (3R)^\nu}{6\, \|f\|_{H^1(3R)}} \quad \Rightarrow \quad m(f,\, r) > \frac{|a_\nu|^2\, R^{2\nu}}{6\, \|f\|_{H^1(3R)}},$$

что и утверждается в (2).

Итак, считаем, что $\nu = 0$, $a_0 = 1$ (тогда $f = f_1$) и доказываем утверждение (15) от противного. Для краткости обозначим $M = \|f\|_{H^1(3R)}$. Предположим, что напротив

$$m(f,\, r) \leqslant \frac{1}{6M} \quad \forall r \in \left(\frac{R}{3},\, R \right). \tag{16}$$

Идея дальнейших рассуждений состоит в том, что функция со «столь обширным» множеством малых (по сравнению со своей нормой) значений, расположенным «относительно недалеко» от центра $z = 0$ круга её голоморфности, необходимо должна оказаться в точке $z = 0$ по модулю меньше единицы. Это противоречие и докажет требуемое утверждение.

Рассмотрим последовательность

$$U_n = \frac{1}{2}\Big(\big(2+\sqrt{3}\,\big)^n + \big(2-\sqrt{3}\,\big)^n\Big) = 2^{n-1}\,T_n(2), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{17}$$

Последовательность U_n возрастает и стремится к $+\infty$, $U_0 = 1$. Следовательно, коль скоро $M \geqslant |f(0)| = 1$, существует такой номер n, что выполняется двойное неравенство

$$U_{n-1} \leqslant M < U_n. \tag{18}$$

Поскольку $U_n/\,U_{n-1} < 2 + \sqrt{3}$, то в дополнении к (18) имеем

$$U_n < \big(2+\sqrt{3}\,\big)\,M. \tag{19}$$

После того как номер n выбран и зафиксирован, определим набор n чисел по правилу (см. (5)):

$$x_k = \frac{2R}{3} + \frac{2}{3}\,t_{k,\,n}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{20}$$

Из включения $t_{k,\,n} \in (-1,\,1)$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, следует, что все числа x_k лежат на интервале $(R/3,\,R)$. Поэтому согласно предположению (16) имеем

$$m(f,\,x_k) \leqslant \frac{1}{6M}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{21}$$

Из (21) и определения минимума модуля получаем существование такого набора комплексных чисел $\{z_k\}_{k=1}^n$, что верны соотношения

$$|f(z_k)| \leqslant \frac{1}{6M}, \qquad |z_k| = x_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{22}$$

Применим интерполяционную формулу [5, гл. I, § 4]

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k) \prod_{j=1,\,j\neq k}^{n} \frac{z - z_j}{z_k - z_j} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=\mathcal{R}} \frac{f(w)}{w - z} \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{w - z_k}\,dw, \tag{23}$$

справедливую для любой функции $f \in H^1(\mathcal{R})$ при условии, что все точки z_k, где $1 \leqslant k \leqslant n$, различны и находятся вместе с точкой $z \notin \{z_k\}_{k=1}^n$ в круге $|z| < \mathcal{R}$ (в нашем случае $\mathcal{R} = 3R$). Взяв в (23) $z = 0$ и набор точек $\{z_k\}_{k=1}^n$ из (22), перейдя в интеграле к переменной φ, получим равенство

$$f(0) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k) \prod_{j=1,\,j\neq k}^{n} \frac{-z_j}{z_k - z_j} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(3Re^{i\varphi}) \prod_{k=1}^{n} \frac{-z_k}{3Re^{i\varphi} - z_k}\,d\varphi. \tag{24}$$

Из (24) и оценки

$$|3Re^{i\varphi} - z_k| \geqslant 3R - |z_k|, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

выводим неравенство

$$|f(0)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(z_k)| \prod_{j=1,\, j\neq k}^{n} \frac{|z_j|}{|z_k - z_j|} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(3Re^{i\varphi})|\, d\varphi \prod_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{3R - |z_k|}.$$

А так как

$$f(0) = 1, \quad |z_k| = x_k, \quad |z_k - z_j| \leqslant \Big||z_k| - |z_j|\Big| = |x_k - x_j|,$$

то, воспользовавшись оценками (22), приходим к неравенству

$$1 \leqslant \frac{1}{6M} \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1,\, j\neq k}^{n} \frac{x_j}{|x_k - x_j|} + M \prod_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3R - x_k}. \tag{25}$$

Теперь согласно формулам (20) перейдём от произведений, содержащих числа x_k, к произведениям, содержащим корни чебышевских полиномов. Имеем

$$\frac{x_j}{x_k - x_j} = \frac{\frac{2R}{3} + \frac{R}{3}\, t_{j,n}}{\frac{R}{3}\,(t_{k,n} - t_{j,n})} = \frac{2 + t_{j,n}}{t_{k,n} - t_{j,n}},$$

$$\frac{x_k}{3R - x_k} = \frac{\frac{2R}{3} + \frac{R}{3}\, t_{k,n}}{3R - \left(\frac{2R}{3} + \frac{R}{3}\, t_{k,n}\right)} = \frac{2 + t_{k,n}}{7 - t_{k,n}}.$$

Отсюда и из (5), (7), (11) находим

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3R - x_k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2 + t_{k,n}}{7 - t_{k,n}} = \frac{T_n(2)}{T_n(7)},$$

$$\prod_{j=1,\, j\neq k}^{n} \frac{x_j}{|x_k - x_j|} = \prod_{j=1,\, j\neq k}^{n} \frac{2 + t_{j,n}}{|t_{k,n} - t_{j,n}|} =$$

$$= \frac{T_n(2)}{2 + t_{k,n}} \prod_{j=1,\, j\neq k}^{n} |t_{k,n} - t_{j,n}|^{-1} = \frac{2^{n-1}\, T_n(2)}{n\,(2 + t_{k,n})} \sin\frac{\pi(2k-1)}{2n}.$$

Поэтому неравенство (25) с учётом обозначений (17) и (12) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$1 \leqslant \frac{U_n}{6Mn} \sum_{k=1}^{n} (2 + t_{k,n})^{-1} \sin\frac{\pi(2k-1)}{2n} + M\,\frac{T_n(2)}{T_n(7)} = \frac{U_n}{6M}\, Q_n(2) + M\,\frac{T_n(2)}{T_n(7)}. \tag{26}$$

Из (19) и (13) находим

$$\frac{U_n}{6M}\, Q_n(2) < \frac{2 + \sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 + \sqrt{3}}{9} < 0.42. \tag{27}$$

Из (26), (27), (18) следует неравенство

$$1 < 0.42 + \frac{U_n\, T_n(2)}{T_n(7)} \Leftrightarrow 0.58 < \frac{U_n\, T_n(2)}{T_n(7)}. \tag{28}$$

В то же время представление чебышевских полиномов (9) вместе с определением (17) дают соотношения

$$\frac{U_n\,T_n(2)}{T_n(7)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Big((\,2+\sqrt{3}\,)^n+(\,2-\sqrt{3}\,)^n\Big)^2}{(\,7+\sqrt{48}\,)^n+(\,7-\sqrt{48}\,)^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\,7+\sqrt{48}\,)^n+(\,7-\sqrt{48}\,)^n+2}{(\,7+\sqrt{48}\,)^n+(\,7-\sqrt{48}\,)^n}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{(\,7+\sqrt{48}\,)^n+(\,7-\sqrt{48}\,)^n}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{14}=\frac{4}{7},$$

которые ввиду (28) влекут за собой неверное числовое неравенство $0.58<4/7$. Полученное противоречие опровергает предположение (16). Оценка снизу (2) для минимума модуля полностью доказана.

3. Специальная последовательность целых функций

Предъявим последовательность целых функций $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, существование которой утверждается в теореме. Ограничимся случаем $R=1$, поскольку общий случай сводится к этому линейной заменой переменной. Положим

$$g_n(z)=p_n(z)\exp(-0.1nz), \tag{29}$$

где

$$p_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{x_{k,\,n}}\right),\qquad x_{k,\,n}=\frac{2}{3}+\frac{t_{k,\,n}}{3},\quad 1\leqslant k\leqslant n,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{30}$$

Очевидны соотношения

$$m(g_n,\,r)\leqslant|g_n(-r)|=|p_n(-r)|\exp(0.1nr),\quad g_n(0)=1,\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{31}$$

Из (30) и (7) находим

$$p_n(-r)=\prod_{k=1}^{n}\frac{x_{k,\,n}-r}{x_{k,\,n}}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2-3r+t_{k,\,n}}{2+t_{k,\,n}}=\frac{T_n(2-3r)}{T_n(2)}.$$

Отсюда и из (8), (9), (17) получаем равенство

$$\max_{1/3\leqslant r\leqslant 1}|p_n(-r)|=\frac{1}{T_n(2)}\max_{1/3\leqslant r\leqslant 1}|T_n(2-3r)|=\frac{1}{T_n(2)}\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|T_n(t)|=$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}\,T_n(2)}=\frac{1}{U_n}. \tag{32}$$

Из (31), (32) выводим неравенство

$$\max_{1/3\leqslant r\leqslant 1}m(g_n,\,r)\leqslant\frac{\exp(0.1n)}{U_n}. \tag{33}$$

Теперь покажем, что максимум модуля функции g_n на окружности $|z|=11/6$ при всех натуральных n, начиная с некоторого, достигается в точке $z=11/6$, то есть выполняется неравенство

$$\left|g_n\left(\frac{11}{6}\,e^{i\varphi}\right)\right|\leqslant g_n\left(\frac{11}{6}\right),\qquad\forall\varphi\in[-\pi,\,\pi],\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad(n>n_0). \tag{34}$$

Действительно, при любом $b > 0$ имеем

$$\frac{|p_n(b\,e^{i\varphi})|}{p_n(b)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{|x_{k,n} + b\,e^{i\varphi}|}{x_{k,n} + b} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x_{k,n}^2 + 2b\,x_{k,n}\cos\varphi + b^2}{x_{k,n} + 2b\,x_{k,n} + b^2} \right)^{1/2} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{2b\,x_{k,n}(1-\cos\varphi)}{(x_{k,n}+b)^2} \right)^{1/2}.$$

А так как $1 - u < e^{-u}$ при $u > 0$, то приходим к неравенству

$$\frac{|p_n(b\,e^{i\varphi})|}{p_n(b)} \leqslant \prod_{k=1}^{n} \exp\left(-\frac{b\,x_{k,n}(1-\cos\varphi)}{(x_{k,n}+b)^2} \right) = \exp\left(-b\,(1-\cos\varphi) \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k,n}}{(x_{k,n}+b)^2} \right).$$

Отсюда и из (29) при любых $b > 0$ и $\varphi \in [-\pi,\, \pi]$ находим

$$\frac{|g_n(b\,e^{i\varphi})|}{g_n(b)} \leqslant \exp\left(0.1\,(1-\cos\varphi)\,nb - b\,(1-\cos\varphi) \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k,n}}{(x_{k,n}+b)^2} \right). \tag{35}$$

Из (35) заключаем, что (34) является следствием неравенства

$$0.1 < S_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_0),$$

где

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k,n}}{(x_{k,n} + 11/6)^2}.$$

Согласно (30) имеем

$$S_n = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2 + t_{k,n}}{(7.5 + t_{k,n})^2} = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k-0.5}{n} \right),$$

где $\varphi(x) = (2 + \cos(\pi x))\,(7.5 + \cos(\pi x))^{-2}$. Как известно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k-0.5}{n} \right) = \int_0^1 \varphi(x)\,dx$$

для любой интегрируемой по Риману на отрезке $[0,\, 1]$ функции φ. Поэтому справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 3\int_0^1 \frac{2 + \cos(\pi x)}{\left(7.5 + \cos(\pi x)\right)^2}\,dx = \frac{336}{221^{3/2}} > \frac{1}{10}. \tag{36}$$

(Вычисление интеграла, являющееся стандартным «студенческим» упражнением, здесь не приводится.) Из (36) видно, что $S_n > 0.1$ при всех n, начиная с некоторого, и, следовательно, неравенство (34) выполняется. Тем самым

$$M\left(g_n,\, \frac{11}{6}\right) = g_n\left(\frac{11}{6}\right) = p_n\left(\frac{11}{6}\right) \exp\left(-\frac{11n}{60}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{11}{6x_{k,n}}\right) \exp\left(-\frac{11n}{60}\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{11}{4+2t_{k,n}}\right)\exp\left(-\frac{11n}{60}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{7.5+t_{k,n}}{2+t_{k,n}}\exp\left(-\frac{11n}{60}\right) =$$

$$= \frac{T_n(7.5)}{T_n(2)}\exp\left(-\frac{11n}{60}\right).$$

Отсюда и из (33), (17) находим

$$M\left(g_n,\, \frac{11}{6}\right)\max_{1/3\leqslant r\leqslant 1} m(g_n,\, r) \leqslant \frac{2^{n-1}\,T_n(7.5)}{U_n^2}\exp\left(-\frac{n}{12}\right), \qquad n > n_0. \tag{37}$$

Согласно (17), (9) имеем

$$\frac{2^{n-1}\,T_n(7.5)}{U_n^2} = O\left(\left(\frac{7.5+\sqrt{7.5^2-1}}{7+\sqrt{48}}\right)^n\right) =$$

$$= o\left(\left(\frac{14}{13}\right)^n\right) = o\left(\exp\left(\frac{n}{13}\right)\right), \qquad n\to\infty. \tag{38}$$

Здесь были использованы числовые неравенства

$$\frac{7.5+\sqrt{7.5^2-1}}{7+\sqrt{48}} < \frac{14}{13}, \qquad \ln\left(\frac{14}{13}\right) < \frac{1}{13}.$$

Из (37), (38) следует (при $R = 1$) предельное соотношение (3). Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. **Титчмарш, Е. К.** Теория функций / Е. К. Титчмарш. — М. : Наука, 1980. — 304 с.
2. **Кусис, П.** Введение в теорию пространств H_p / П. Кусис. — М. : Мир, 1984. — 366 с.
3. **Boas, R. P.** Entire functions / R. P. Boas. — New York : Academic Press, 1954. — 276 p.
4. **Hayman, W. K.** Subharmonic functions. Vol. 2 / W. K. Hayman. — London, New York : Academic Press, 1989. — 875 p.
5. **Hayman, W. K.** The minimum modulus of large integral functions / W. K. Hayman // Proceedings of the London Mathematical Society. — 1952. — Vol. s3-2, iss. 1. — P. 469–512.
6. **Гельфонд, А. О.** Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. — М. : Наука, 1967. — 432 с.

Поступила в редакцию 13.02.2019
После переработки 23.04.2019

Сведения об авторе

Попов Антон Юрьевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник кафедры математического анализа механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия; e-mail: superchuchundra2015@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2019. Vol. 4, iss. 2. P. 155–164.

DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14203

NEW LOWER BOUND FOR THE MODULUS OF AN ANALYTIC FUNCTION

A.Yu. Popov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
superchuchundra2015@yandex.ru

A lower bound for the minimum of the modulus of an analytic function in terms of the integral norm on a «large» circle is obtained. The proof uses the basic facts of the theory of spaces of analytic functions in the disk and the classical Chebyshev polynomials. From the main theorem a statement for an entire function is derived in which the integral norm replaced by the maximum modulus. A special example of a sequence of entire functions is constructed, showing that this result cannot be much improved. Earlier in the theory of entire functions theorems on lower estimates for the modulus of an entire function on a system of circles expanding to infinity through some degrees of the maximum of the modulus on the same circles were known.

Keywords: *analytic function, minimum modulus, Chebyshev polynomials.*

References

1. **Titchmarsh E.C.** *The Theory of Functions.* London, Oxford University Press, 1939. 455 p.
2. **Koosis P.** *Introduction to H_p spaces.* Cambridge, New-York, Melbourne, Cambridge University Press, 1980. 276 p.
3. **Boas R.P.** *Entire functions.* New York, Academic Press, 1954. 276 p.
4. **Hayman W.K.** *Subharmonic functions.* Vol. 2. London, New York, Academic Press, 1989. 875 p.
5. **Hayman W.K.** The minimum modulus of large integral functions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1952, vol. s3-2, iss. 1, pp. 469–512.
6. **Gel'fond A.O.** *Calculus of finite differences.* Delhi, Hindustan Publ. Corp., 1971. 451 p.

Accepted article received 13.02.2019
Corrections received 23.04.2019