Челябинский физико-математический журнал. 2019. Т. 4, вып. 2. С. 142–154.

УДК 517.927.4; 517.98 DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14202

ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В. Н. Павленко[a], **Е. Ю. Постникова**[b]

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
[a]*pavlenko-vn@yandex.ru*, [b]*liory@bk.ru*

На отрезке $[0,1]$ рассматривается задача Штурма — Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с разрывной нелинейностью в правой части, умноженной на положительный параметр. При неотрицательных значениях фазовой переменной u нелинейность равна нулю, а при отрицательных — совпадает с непрерывной на $[0,1]\times(-\infty,0]$ функцией. Граничные условия имеют вид $u(0)=a$, $u(1)=b$, где a,b — положительные числа. Исходная задача преобразуется к эквивалентной однородной, которая при любом положительном значении параметра имеет нулевое решение. Её спектр образуют те значения параметра, при которых краевая задача имеет ненулевое решение. При условии подлинейного роста нелинейности на бесконечности для каждого положительного значения параметра строится итерационный процесс, монотонно сходящийся к минимальному решению. Доказывается, что спектр задачи имеет вид $[C,+\infty)$, где $C>0$, если он непустой.

Ключевые слова: *нелинейная спектральная задача, уравнение Штурма — Лиувилля, разрывная нелинейность, монотонные итерации.*

Введение

Изучается задача Штурма — Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с разрывной нелинейностью и параметром $\lambda>0$

$$Lu(x)\equiv-\left(p(x)u'(x)\right)'+r(x)u'(x)+q(x)u(x)=\lambda g\left(x,u(x)\right),\quad x\in(0,1),\tag{1}$$

$$u(0)=a,\quad u(1)=b,\tag{2}$$

где $p(x)$ — положительная непрерывно дифференцируемая на $[0,1]$ функция, $r(x)$ и $q(x)$ принадлежат $C[0,1]$, причём $q(x)$ неотрицательна на $[0,1]$, $a>0$, $b\geq 0$. Нелинейность $g(x,u)=0$, если $u\geq 0$ и $x\in[0,1]$, и совпадает с непрерывной на $[0,1]\times(-\infty,0]$ функцией $f(x,u)$ при $u<0$ и $x\in[0,1]$.

Функция $f(x,u)$ удовлетворяет следующим условиям:

(f_1) $f(x,u)$ непрерывна и неположительна на $[0,1]\times(-\infty,0]$;

(f_2) $f(x,0)<0$ на $[0,1]$;

(f_3) существует постоянная $M>0$, такая, что функция $f(x,u)+Mu$ неубывающая на $(-\infty,0]$ для любого $x\in[0,1]$;

(f_4) $f(x,u)$ имеет подлинейный рост на бесконечности, т. е. существуют постоянные $C_1,C_2>0$ и $\nu\in[0,1)$, такие, что

$$|f(x,u)|\leq C_1+C_2\,|u|^{\nu}\quad\forall u\leq 0\;\forall x\in[0,1].$$

Преобразуем задачу (1), (2) к задаче с однородными граничными условиями. Пусть $\widetilde{v}(x)$ — классическое решение уравнения $Lu(x) = 0$, $x \in (0,1)$, удовлетворяющее граничным условиям (2). Оно существует, единственно и в силу принципа максимума положительно на $(0,1)$ [1]. В уравнении (1) сделаем замену $v(x) = u(x) - \widetilde{v}(x)$. Тогда задача (1), (2) примет вид

$$Lv(x) = \lambda \widetilde{g}\left(x, v(x)\right), \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

$$v(0) = 0, \quad v(1) = 0, \tag{4}$$

где $\widetilde{g}(x,v) = g\left(x, v + \widetilde{v}(x)\right)$. Заметим, что $\widetilde{g}(x,v) = 0$, если $v \geq -\widetilde{v}(x)$ и $x \in [0,1]$, и $\widetilde{g}(x,v) = f(x, v + \widetilde{v}(x))$, если $v < -\widetilde{v}(x)$ и $x \in [0,1]$. Из чего следует, что $v(x) \equiv 0$ на $[0,1]$ удовлетворяет (3) и (4) при любом $\lambda > 0$.

Определение 1. *Решением задачи* (3), (4) называется функция $v \in W_q^2(0,1)$, $q > 1$, удовлетворяющая для почти всех $x \in (0,1)$ включению $Lv(x) \in \widehat{g}\left(x, v(x)\right)$, и граничным условием (4), где $\widehat{g}\left(x, v\right) = \widetilde{g}(x,v)$, если $v \neq -\widetilde{v}(x)$ и $x \in [0,1]$, $\widehat{g}\left(x, -\widetilde{v}(x)\right) = [f(x,0), 0]$ при $x \in [0,1]$.

Если в определении 1 включение заменить на уравнение (3), то $v(x)$ называют *сильным решением задачи* (3), (4).

Решение $v(x)$ задачи (3), (4) называется *полуправильным*, если мера Лебега множества $\{x \in (0,1)\,|v(x)$ — точка разрыва функции $\widetilde{g}(x,\cdot)\}$ равна нулю.

Замечание 1. Полуправильное решение задачи (3), (4) является сильным. Обратное неверно.

Замечание 2. Так как функция $\widetilde{g}(x,v) = 0$, если $v \geq -\widetilde{v}(x)$ и $x \in [0,1]$, и совпадает с $f\left(x, v + \widetilde{v}(x)\right)$ при $v < -\widetilde{v}(x)$ и $x \in [0,1]$, то из условия (f_1) следует суперпозиционная измеримость $\widetilde{g}(x,v)$, т. е. измеримость композиции $\widetilde{g}(x, v(x))$ на $(0,1)$ для любой измеримой на $(0,1)$ функции. Действительно, $\widetilde{g}(x,v)$ измерима по x на $[0,1]$ для любого $v \in \mathbb{R}$, и для любого $x \in [0,1]$ функция $\widetilde{g}(x,v)$ непрерывна справа на $\mathbb{R}$, что влечёт суперпозиционную измеримость $\widetilde{g}(x,v)$ [2].

Определение 2. *Спектром задачи* (3), (4) называется множество

$$\sigma = \{\lambda > 0|\ \text{задача (3), (4) имеет ненулевое решение}\}.$$

Замечание 3. Как показано выше, для любого $\lambda > 0$ задача (3), (4) имеет тривиальное решение. Оно соответствует решению $\widetilde{v}(x)$ задачи (1), (2), а ненулевому решению задачи (3), (4) соответствует решение $u(x)$ задачи (1), (2), для которого мера Лебега множества $\{x \in [0,1]\,|u(x) < -\tilde{v}(x)\}$ не равна нулю. Спектр задачи (1), (2) состоит из тех $\lambda > 0$, для которых эта задача имеет решение, отличное от $\widetilde{v}(x)$. Он совпадает со спектром задачи (3), (4).

В данной статье для каждого $\lambda > 0$ строится итерационный процесс, который при определённом выборе начального приближения, зависящего от λ, сходится, не убывая, к минимальному решению задачи (3), (4) в метрике $C^1[0,1]$. Это решение отрицательное на $(0,1)$ и полуправильное, если $\lambda \in \sigma$, и нулевое в противном случае.

Показано, что если спектр σ задачи (3), (4) непустой, то $\sigma = [\lambda^*, +\infty)$, где $\lambda^* > 0$. Приводится достаточное условие непустоты спектра σ: если в (1) $r(x) = 0$ на $[0,1]$, a, b — положительные, то для достаточно больших значений параметра λ задача (3), (4) имеет не меньше двух ненулевых решений, причём хотя бы одно из них полуправильное.

Нелинейные спектральные задачи для уравнения (1) с различными граничными условиями изучались в ряде работ. В [3] рассматривается одномерный аналог задачи Гольдштика об отрывных течениях несжимаемой жидкости. В этом случае $Lu = -u''$, $a = 1$, $b = 0$, $g(x,u) = 0$, если $u \geq 0$, и $g(x,u) = -1$, если $u < 0$. Решение для каждого $\lambda > 0$ находится в явном виде. Соответствующая задача (3), (4) с однородными условиями имеет только нулевое решение для $\lambda \in (0,8)$, при $\lambda = 8$ существует одно нетривиальное решение, а при $\lambda > 8$ — два нетривиальных решения.

В [4] $Lu = -u''$, $a = b = 0$, $g(u) = 0$ для $0 \leq u < 1$ и $g(u) = K(u)$ для $u > 1$. Предполагается, что $g(1) > 0$, $K : [1,\infty) \to (0,\infty)$ дважды непрерывно дифференцируема. При некоторых дополнительных условиях на K определяется число нетривиальных решений для каждого $\lambda > 0$. При этом спектр может быть незамкнутым (см. теорему 2.5. из [4]).

В [5], [6] задача (1)–(2) изучалась в случае, когда разрывная нелинейность $g(x,u)$ в уравнении (1) ограниченная, граничные условия (2) — однородные ($a = b = 0$), а дифференциальный оператор L — формально самосопряжённый ($r(x) = 0$).

Вариационным методом получены теоремы существования нетривиальных решений, в том числе полуправильных, для различных значений параметра λ. Найдены оценки сверху для точной нижней грани спектра рассматриваемой задачи и нормы значения дифференциального оператора L на решении этой задачи. Однако вопрос о связности и замкнутости спектра задачи (1)–(2) не рассматривается.

Наконец, в [7] $Lu = -u''$, $g(u) = f_0 + (1 - f_0)H(u - \mu)$, константы $f_0 \in (0,1)$, $\mu > 0$, $H(s)$ функция Хевисайда: $H(s) = 0$ для $s < 0$ и $H(s) = 1$, если $s \geq 0$. Граничные условия смешанные: $u'(0) = u(1) = 0$. Для каждого $\lambda > 0$ определяется число решений со свободной границей и без неё (свободная граница решения $u(x)$ — это множество $x \in (0,1)$, для которых $u(x) = \mu$).

1. Предварительные сведения и формулировка основных результатов

Приведём достаточные условия непустоты спектра σ задачи (3), (4).

Лемма 1. *Предположим, что:*

1) *в уравнении* (1) *функция* $p(x) > 0$ *непрерывно дифференцируема на* $[0,1]$, $r(x) \equiv 0$ *на* $[0,1]$, $q(x)$ *непрерывная и неотрицательная на* $[0,1]$;
2) *в граничных условиях* (2) *постоянные* a *и* b *положительные*;
3) *нелинейность* $g(x,u) = 0$, *если* $u \geq 0$ *и* $x \in [0,1]$, *и совпадает с непрерывной на* $[0,1] \times (-\infty,0]$ *функцией* $f(x,u)$ *при* $u < 0$ *и* $x \in [0,1]$;
4) *для* $f(x,u)$ *выполнены условия* (f_1)–(f_4).

Тогда существует $\lambda_0 > 0$, *такое, что для любого* $\lambda > \lambda_0$ *задача* (3), (4) *имеет не менее двух ненулевых решений, причём хотя бы одно из них полуправильное.*

Сформулированное утверждение является следствием теоремы 5 из [8]. Приведём её формулировку для уравнения (3) с $r(x) = 0$ на $[0,1]$.

Теорема 1. *Предположим, что:*

1) $\int\limits_0^1 \left(p(x)\,(u'(x))^2 + q(x)u^2(x)\right)dx \geq \alpha \int\limits_0^1 (u'(x))^2\,dx$ *для каждого* $u \in W_2^1(0,1)$, *где постоянная* $\alpha > 0$;

2) *функция* $\tilde{g}(x,u)$ *борелева* $(\operatorname{mod} 0)$ *на* $D = [0,1] \times \mathbb{R}$ [9], *т. е. она отлична от борелевой на* D *лишь на множестве точек* $(x,u) \in D$, *для которых* x *принадлежит множеству нулевой меры в* $[0,1]$;

3) *для* $\tilde{g}(x,u)$ *верна оценка* $|\tilde{g}(x,u)| \leq C_1 + C_2 |u|^{\nu}$ $\forall (x,u) \in D$, *где* C_1, C_2 *положительные константы,* $0 \leq \nu < 1$, *и* $\tilde{g}(x,0) = 0$ *на* $(0,1)$;

4) $\tilde{g}(x,u) = \bar{o}(u)$ *при* $u \to 0$ *равномерно по* $x \in (0,1)$;

5) *существует* $u_0 \in W_2^1(0,1)$, *такая, что*

$$\int_0^1 dx \int_0^{u_0(x)} \tilde{g}(x,s)ds > 0.$$

Тогда существует $\lambda_0 > 0$, *такое, что для каждого* $\lambda > \lambda_0$ *задача* (3), (4) *имеет не менее двух ненулевых решений из пространства* $W_q^2(0,1)$, *где* $q = l/(l-1)$ $(l = 1+\nu$ *для* $0 < \nu < 1$ *и* $l = 2$ *для* $\nu = 0$, ν *из условия* 3) *теоремы* 1.

Теперь докажем лемму 1.

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы 1. Условие 1) очевидно выполняется, так как $p(x)$ непрерывна и положительна на $[0,1]$, а $q(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[0,1]$. Далее в силу замечания 2 функция $\tilde{g}(x,u)$ суперпозиционно измерима на D, из условия (f_3) следует монотонность функции $\tilde{g}(x,u) + Mu$ по u на $[0,1]$. Из чего заключаем, что $\tilde{g}(x,u)$ — борелева $(\operatorname{mod} 0)$ [9]. Следовательно, условие 2) теоремы 1 выполняется. Так как $\tilde{g}(x,u) = 0$, если $u \geq -\tilde{v}(x)$ и $x \in [0,1]$, $\tilde{g}(x,u) = f(x, u+\tilde{v}(x))$ при $u < -\tilde{v}(x)$ и $x \in [0,1]$, то из (f_4) следует для $u < -\tilde{v}(x)$ и $x \in [0,1]$ неравенство $|\tilde{g}(x,u)| = |f(x, u+\tilde{v}(x))| \leq C_1 + C_2 |u + \tilde{v}(x)|^{\nu} \leq C_1 + C_2 |u|^{\nu}$, $(x,u) \in D$. Из чего заключаем, что

$$|\tilde{g}(x,u)| \leq C_1 + C_2 |u|^{\nu} \ \ \forall (x,u) \in D, \tag{5}$$

где ν из условия (f_4), т. е. условие 3) теоремы 1 выполняется (равенство $\tilde{g}(x,0) = 0$ на $[0,1]$ следует из определения $\tilde{g}(x,u)$). В силу принципа максимума $\tilde{v}(x) \geq \min\{a,b\} = \mu > 0$ на $[0,1]$. Поэтому $\tilde{g}(x,u) = 0$ при $u \geq -\mu$ и $x \in [0,1]$. Из чего следует выполнение условия 4) теоремы 1. Осталось проверить выполнение условия 5) теоремы 1. Согласно условию (f_2) из определения $\tilde{g}(x,u)$ имеем $\tilde{g}(x, -\tilde{v}(x)-) = f(x,0) < 0$ на $[0,1]$ ($\tilde{g}(x,u-)$ — предел слева функции $\tilde{g}(x,\cdot)$ в точке u). Отсюда из непрерывности $f(x,s)$ на D следует существование ε_0, такого, что $\tilde{g}(x, -\tilde{v} - \varepsilon) < 0$ на $[0,1]$, если $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Пусть $\Psi(x) = 4x$ при $x \in [0,1/4]$, $\Psi(x) = 1$ при $x \in [1/4;3/4]$, $\Psi(x) = 4 - 4x$ при $x \in [3/4;1]$, и $u_0(x) = -\Psi(x)\,(\tilde{v}(x) + \varepsilon_0)$. Тогда $u_0 \in W_2^1(0,1)$ и $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{u_0(x)} \tilde{g}(x,s)ds = -\int\limits_0^1 dx \int\limits_{u_0(x)}^0 \tilde{g}(x,s)ds \geq \int\limits_B dx \int\limits_{u_0(x)}^{-\tilde{v}(x)} \tilde{g}(x,s)ds > 0$, где $B = \{x \in (0,1)\,|\,u_0(x) < -\tilde{v}(x)\}$, поскольку $\tilde{g}(x,s) \leq 0$ на D (в силу свойства (f_1)), $\tilde{g}(x,s) < 0$, если $s \in (u_0(x), -\tilde{v}(x))$ и $x \in B$, и $B \supset (1/4;3/4)$. Следовательно, условие 5) теоремы 1 выполняется. □

Следующая лемма используется при формулировке и доказательстве первого основного результата (теоремы 2).

Лемма 2. *Предположим, что выполнены условия леммы* 1, *за исключением, быть может, равенства нулю коэффициента* $r(x)$ *дифференциального оператора* L *в* (1), *и* $\lambda > 0$. *Тогда:*

1) *Всякое обобщённое решение задачи* (3), (4) *является сильным.*

2) *Существует постоянная* $C_1(\lambda) > 0$, *такая, что* $\lambda\tilde{g}(x, v(x)) \geq -C_1(\lambda)$ *на* $(0,1)$ *для любого решения* $v(x)$ *задачи* (3), (4).

Доказательство. 1) Пусть $v(x)$ — обобщённое решение задачи (3), (4). Тогда $v \in W_q^2(0,1)$, $q > 1$, $Lv = \tilde{g}(x, v(x))$ при $v(x) \neq -\tilde{v}(x)$, где $L\tilde{v}(x) = 0$ на $(0,1)$, $\tilde{v}(0) = a$, $\tilde{v}(1) = b$. Почти всюду на множестве $\Sigma(\lambda) = \{x \in (0,1)\,|\, v(x) = -\tilde{v}(x)\}$ (свободная граница) $Lv(x) = -L\tilde{v}(x) = 0$ [10]. С другой стороны, $\tilde{g}(x, -\tilde{v}(x)) = 0$ на $(0,1)$. Поэтому $Lv(x) = \lambda g(x, v(x))$ почти всюду на $(0,1)$, и, значит, $v(x)$ — сильное решение задачи (3), (4).

2) Существует постоянная $M_1 > 0$, такая, что для любого $u \in W_q^2(0,1)$, $q > 1$, $u(0) = u(1) = 0$, верно неравенство

$$\|u\|_{q,2} \leq M_1 \|Lu\|_q\,, \tag{6}$$

где $\|\cdot\|_{q,2}$, $\|\cdot\|_q$ — нормы в пространствах $W_q^2(0,1)$ и $L_q(0,1)$ соответственно [11]. Для решения $v \in W_q^2(0,1)$ задачи (3), (4) из оценок (5) и (6) получим

$$\|v\|_{q,2} \leq M_1 \|Lu\|_q = M_1 \|\tilde{g}(x, v(x))\|_q \leq M_1\lambda \left\|C_1 + C_2 |v|^\nu\right\|_q \leq M_1\lambda \left(C_1 + C_2 \left\||v|^\nu\right\|_q\right). \tag{7}$$

Здесь C_1, C_2 и ν из условия (f_4). Пространство $W_q^2(0,1)$ компактно вложено в $C^1[0,1]$. Поэтому существует постоянная $M_2 > 0$, такая, что $\max\limits_{x\in[0,1]} |u(x)| \leq M_2 \|u\|_{q,2}$ для всех $u \in W_q^2(0,1)$. Отсюда в силу оценки (7) получаем

$$\max_{x\in[0,1]} |u(x)| \leq M_2 M_1 \lambda \left(C_1 + C_2 \left(\max_{x\in[0,1]} |u(x)|\right)^\nu\right).$$

Из этого неравенства с учётом того, что $\nu \in [0,1)$, следует существование постоянной $M_3(\lambda)$, такой, что для любого решения $u(x)$ задачи (3), (4) $\max\limits_{x\in[0,1]} |u(x)| \leq M_3(\lambda)$. Отсюда и из оценки (5) следует, что $\lambda g(x, u(x)) \geq -\lambda\left(C_1 + C_2 |M_3(\lambda)|^\nu\right) = -C_1(\lambda)$ на $(0,1)$ для любого решения $u(x)$ задачи (3), (4). □

При доказательстве второго основного результата (теоремы 3) используются свойства многозначных расширений оператора Немыцкого, действующего в $L_q(0,1)$, $q > 1$. Приведём необходимые определения и результаты из [9].

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства и $F : E_1 \to E_2$ — локально ограниченный оператор. Его слабым замыканием называется отображение $\overset{\rightharpoonup}{F}: E_1 \to 2^{E_2}$ (2^{E_2} — множество всех подмножеств E_2), для которого при $u \in E_1$ значение $\overset{\rightharpoonup}{F}(u) = \{z \in E_2\,|$ существует последовательность (u_n), сильно сходящаяся в E_1 к u, такая, что $F(u_n)$ слабо сходится к z в $E_2\}$.

Овыпукливанием оператора F называется отображение $F^\square : E_1 \to 2^{E_2}$, действующее по правилу

$$F^\square(u) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathrm{co}} \left\{F(v)\,\middle|\, \|v-u\|_{E_1} < \varepsilon\right\},$$

где $\overline{\mathrm{co}}B$ — замкнутая выпуклая оболочка множества $B \subset E_2$.

Пусть $g(x,u)$ ($x \in (0,1)$, $u \in \mathbb{R}$) борелева $(\mathrm{mod}\, 0)$, т. е. отличается от некоторой борелевой лишь в точках (x,u), первые координаты которых принадлежат множеству нулевой меры на $(0,1)$. Предположим, что оператор Немыцкого $Fu(x) = g(x, u(x))$ действует из $L_q(0,1)$, $q > 1$ в $L_q(0,1)$. Тогда $\overset{\rightharpoonup}{F} = F^\square = F_u^\square$ [9]. Здесь $F_u^\square$ — многозначный оператор Немыцкого, порождаемый овыпукливанием

$g(x,u)$ по u при каждом $x \in (0,1)$. Заметим, что для каждого $v \in L_q(0,1)$ значение $F^{\square}(u) = \{z : (0,1) \to \mathbb{R} \,|\, z$ — измеримая на $(0,1)$ и $z(x) \in [g_-(x,v(x)), g_+(x,v(x))]$ при почти всех $x \in (0,1)\}$, где $g_-(x,v) = \liminf\limits_{\mu \to v} g(x,\mu)$, $g_+(x,v) = \limsup\limits_{\mu \to v} g(x,\mu)$, $x \in (0,1)$, $v \in \mathbb{R}$.

Замечание 4. Если функция $g(x,u)$ ($x \in (0,1)$, $u \in \mathbb{R}$) борелева $(\operatorname{mod} 0)$, то она суперпозиционно измерима на $D = [0,1) \times \mathbb{R}$. Обратное верно, если $g(x,u)$ неубывающая по u для почти всех $x \in (0,1)$ [9].

При доказательстве теоремы 3 также используется принцип верхних и нижних решений для эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями из [12] применительно к задаче (3), (4).

Лемма 3. *Предположим, что:*

1) *нелинейность $\widetilde{g}(x,u)$ равна разности неубывающих по u функций $g_j(x,u)$, $j = 1,2$, причём, она суперпозиционно измерима, а $g_2(x,u)$ — каратеодориева функция на $D = [0,1] \times \mathbb{R}$;*
2) *задача (3), (4) имеет нижнее $\underline{u}(x)$ и верхнее $\overline{u}(x)$ решения из $W_q^2(0,1)$, $q > 1$, т. е. $L\underline{u} \le \lambda\widetilde{g}(x,\underline{u}(x))$ и $L\overline{u}(x) \ge \lambda\widetilde{g}(x,\overline{u}(x))$ почти всюду на $(0,1)$, $\underline{u}(0)$ и $\underline{u}(1)$ неположительны, а $\overline{u}(0)$ и $\overline{u}(1)$ неотрицательны, причём, $\underline{u}(x) \le \overline{u}(x)$ на $[0,1]$;*
3) *существует $a(x) \in L_q(0,1)$, такая, что $|g_j(x,u)| \le a(x)$ при $x \in (0,1)$ и $u \in [\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$;*
4) *дифференциальный оператор L в уравнении (1) удовлетворяет условию 1) леммы 1, за исключением, быть может, равенства нулю $r(x)$.*

Тогда задача (3), (4) имеет решение $u(x) \in W_q^2(0,1)$, удовлетворяющее неравенству $\underline{u}(x) \le u(x) \le \overline{u}(x)$ при $x \in [0,1]$.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 2. *Предположим, что:*

1) *выполнены все условия леммы 1, за исключением, быть может, равенства нулю коэффициента $r(x)$ в условии 1);*
2) *постоянная $C(\lambda) \ge C_1(\lambda)$ ($C_1(\lambda)$ определяется в лемме 2) удовлетворяет неравенству*
$$C(\lambda) \ge \lambda \left(C_1 + C_2 A^{\nu} C(\lambda)^{\nu}\right), \tag{8}$$
где $A = \max\{u_1(x), x \in [0,1]\}$, $u_1(x)$ — решение задачи $Lu(x) = 1$, $x \in (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$, C_1, C_2 и ν из условия (f_4);
3) *$u_0(x)$ — решение задачи $Lu(x) = -C(\lambda)$, $x \in (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$, где $C(\lambda)$ — константа из условия 2) теоремы 2.*

Тогда итерационный процесс
$$Lv_n(x) + \lambda M v_n(x) = \lambda \left(\tilde{g}\left(x, v_{n-1}(x)\right) + M v_{n-1}(x)\right), \tag{9}$$
$v_n(0) = v_n(1) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, с начальным приближением $v_0(x) = u_0(x)$ сходится, не убывая на $[0,1]$ ($v_{n-1}(x) \le v_n(x)$ на $[0,1]$), в метрике $C^1[0,1]$ к минимальному решению задачи (3), (4), причём, это решение полуправильное.

Замечание 5. Так как $\nu \in [0,1)$, то постоянная $C(\lambda)$, удовлетворяющая неравенству (8), существует.

Замечание 6. В силу принципа максимума всякое ненулевое решение задачи (3), (4) отрицательно на $(0,1)$.

Замечание 7. Если $\lambda > 0$ и λ не принадлежит спектру σ задачи (3), (4), то итерационный процесс (8) сходится, не убывая, к нулю в метрике $C^1[0,1]$.

Замечание 8. Если в условии (f_4) $C_2 = 0$, то за $C(\lambda)$ в условии 2) теоремы 2 можно взять λC_1, C_1 — постоянная из условия (f_4).

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* 1) *теоремы* 2 *и спектр* σ *задачи* (3), (4) *непустой. Тогда* $\sigma = [\lambda^*, +\infty)$, *где* $\lambda^* > 0$.

2. Доказательство основных результатов

2.1. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим банахово пространство $L_q(0,1)$, полуупорядоченное конусом неотрицательных функций. Отношение порядка $\geq$ на $L_q(0,1)$ задаётся следующим образом: если $u, v \in L_q(0,1)$, то $u \leq v$ означает, что $u(x) \leq v(x)$ почти всюду на $(0,1)$. В силу сделанных ограничений на коэффициенты дифференциального оператора L оператор $\Lambda : D(\Lambda) \subset L_q(0,1) \to L_q(0,1)$, $D(\Lambda) = \left\{u \in W_q^2(0,1) \,|u(0) = u(1) = 0\right\}$, $\Lambda u = Lu + \lambda u$, $\lambda > 0$, имеет ограниченный обратный $\Lambda^{-1} : L_q(0,1) \to D(\Lambda)$ [1], где $D(\Lambda)$ снабжается нормой пространства $W_q^2(0,1)$. В силу принципа максимума [1] если $u_1, u_2 \in D(\Lambda)$ и $\Lambda u_1 \leq \Lambda u_2$, то $u_1 \leq u_2$, что влечёт монотонность Λ^{-1} на $L_q(0,1)$ в смысле полуупорядоченности, т. е. для любых $u, v \in L_q(0,1)$ неравенство $u \leq v$ влечёт $\Lambda^{-1}u \leq \Lambda^{-1}v$.

Оператор Немыцкого $Hu(x) = \tilde{g}(x, u(x)) + Mu(x)$, $u \in L_q(0,1)$, в силу суперпозиционной измеримости $\tilde{g}(x,u)$ и оценки (5) действует в $L_q(0,1)$, причём для любого $u \in L_q(0,1)$

$$\left\|Hu\right\|_q \leq C_1 + C_2 \left\|u\right\|_q^\nu + M \left\|u\right\|_q,$$

где постоянные C_1, C_2, ν из неравенства (5), $0 \leq \nu < 1$. Так как $\tilde{g}(x,u) + Mu$ неубывающая на $\mathbb{R}$ функция для почти всех $x \in (0,1)$, то оператор H монотонный на $L_q(0,1)$ (в смысле полуупорядоченности). Отсюда и из монотонности Λ^{-1} следует монотонность на $L_q(0,1)$ композиции $T = \Lambda^{-1} \circ H$. Заметим, что нуль пространства $L_q(0,1)$ — неподвижная точка оператора λT при любом $\lambda > 0$. Покажем, что $\lambda T v_0 \geq v_0$, где v_0 определено в условии 3) теоремы 2 как решение задачи $Lu(x) = -C(\lambda)$, $x \in (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$ (постоянная $C(\lambda)$ определена в условии 2) теоремы 2). Достаточно показать, что

$$Lv_0(x) \leq \lambda \tilde{g}(x, v_0(x)) \tag{10}$$

почти всюду на $(0,1)$.

Действительно, тогда $Lv_0(x) + \lambda M v_0 \leq \lambda\left(\check{g}(x, v_0(x)) + Mv_0(x)\right)$ $x \in (0,1)$, что равносильно (с учётом монотонности Λ^{-1}) неравенству $v_0(x) \leq \lambda T v_0(x)$, $x \in (0,1)$. Докажем (10). Как отмечалось выше, $v_0(x) = -C(\lambda)u_1(x)$, $x \in (0,1)$, где $u_1(x)$ — решение задачи $Lu(x) = 1$, $x \in (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$. Заметим, что $u_1(x) > 0$ на $(0,1)$. Из (5) следует, что

$$\tilde{g}(x, v_0(x)) \geq -C_1 - C_2 \left(C(\lambda)u_1(x)\right)^\nu \geq -C_1 - C_2 \left(C(\lambda)A\right)^\nu \tag{11}$$

для почти всех $x \in (0,1)$, где $A = \max\limits_{x \in [0,1]} u_1(x)$. В силу оценки (8) в условии 2) теоремы 2 из (11) получим

$$-C(\lambda) \leq -\lambda\left(C_1 + C_2 \left(AC(\lambda)\right)^\nu\right) \leq \lambda \tilde{g}\left(x, v_0(x)\right)$$

для почти всех $x \in (0,1)$. Из чего заключаем с учётом равенства $Lv_0(x) = -C(\lambda)$, что $Lv_0(x) \le \lambda \tilde{g}\,(x, v_0(x))$ почти всюду на $(0,1)$. Неравенство (10) доказано, а значит, выполняется и равносильное ему неравенство $\lambda T v_0 \ge v_0$.

Рассмотрим конусный отрезок $\langle v_0, 0\rangle := \{u \in L_q(0,1) |\, v_0(x) \le u(x) \le 0$ почти всюду на $(0,1)\}$ в $L_q(0,1)$. Тогда λT отображает $\langle v_0, 0\rangle$ в себя. Действительно, для любого $u \in \langle v_0, 0\rangle$ имеем $v_0 \le \lambda T v_0 \le \lambda T u \le \lambda T 0 = 0$, поскольку оператор T монотонный. Итерационный процесс (9) можно представить в виде $v_n = \lambda T v_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что $v_1 = \lambda T v_0 \ge v_0$. Предположим, что $v_n \ge v_{n-1}$, $n \ge 1$. Тогда $v_n(x) = \lambda T v_n \ge \lambda T v_{n-1} = v_n$. Согласно методу математической индукции заключаем, что $v_n(x) \ge v_{n-1}(x)$ на $(0,1)$ для любого натурального n.

Последовательность $(v_n) \subset L_q(0,1)$ ограничена сверху в смысле полуупорядоченности ($v_n \le 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$), и конус неотрицательных функций в $L_q(0,1)$ правильный [13]. Поэтому последовательность v_n сильно сходится к некоторой функции $v(x)$ в $L_q(0,1)$ (по определению правильного конуса). Кроме того, $v_n(x) \uparrow v(x)$ почти всюду на $[0,1]$. Так как $v_n(x)$ и $v(x)$ принадлежат конусному отрезку $\langle v_0, 0\rangle$ и $v_0(x)$ — ограниченная на $[0,1]$ функция, то существует постоянная $K > 0$, такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $|Hv_n(x) - (\tilde{g}(x, v(x)-) + Mv(x))| \le K$ на $[0,1]$. Отсюда в силу теоремы Лебега о переходе к пределу под знак интеграла следует, что $\|Hv_n - (\tilde{g}(x, v(x)-) + Mv(x))\|_q \to 0$ при $n \to \infty$, то есть Hv_n сильно сходится к $\tilde{g}(x, v(x)-) + Mv(x)$ в $L_q(0,1)$. Как отмечалось выше, линейный оператор Λ^{-1} из $L_q(0,1)$ в $W_q^2(0,1)$ ограничен. Поэтому Λ^{-1} переводит сходящуюся в $L_q(0,1)$ последовательность (Hv_n) в сходящуюся последовательность в $W_q^2(0,1)$. Значит, $v_n \to v$ в $W_q^2(0,1)$. Отсюда следует, что $\Lambda v_n \to \Lambda v$ в $L_q(0,1)$. Следовательно, $v(x)$ удовлетворяет уравнению

$$Lv(x) = \lambda \tilde{g}(x, v(x)-), \quad x \in (0,1), \tag{12}$$

и $v(0) = v(1) = 0$.

Покажем, что $v(x)$ — точка непрерывности $\tilde{g}(x,\cdot)$ почти всюду на $(0,1)$, что равносильно равенству нулю меры множества $D_1 = \{x \in (0,1)\,|v(x) = -\tilde{v}(x)\}$, где $\tilde{v}(x)$ — решение задачи $Lu(x) = 0, x \in (0,1)$, $u(0) = a$, $u(1) = b$. Если $\operatorname{mes} D_1 \ne 0$, то, поскольку $Lv(x) = L\tilde{v}(x) = 0$ почти всюду на D_1 [10], а $\tilde{g}(x, \hat{v}(x)) = f(x,0) < 0$, приходим к противоречию с (12). Таким образом, $\tilde{g}(x, v(x)-) = g(x, v(x))$ почти всюду на $(0,1)$, и, значит, $v(x)$ — полуправильное решение задачи (3), (4). Согласно выбору $C(\lambda)$ для любого решения $u(x)$ задачи (3), (4) $\lambda g(x, u(x)) \ge -C(\lambda)$. Отсюда, поскольку $Lv_0(x) = -C(\lambda)$, $x \in (0,1)$, $v_0(0) = v_0(1) = 0$, из принципа максимума [1] следует, что $u(x) \ge v_0(x)$ на $(0,1)$, где $u(x)$ — любое решение задачи (3), (4). Следовательно, все решения задачи (3), (4) лежат в конусном отрезке $\langle v_0, 0\rangle$. Напомним, что любое решение задачи (3), (4) неположительно на $(0,1)$ (см. замечание 6).

Докажем, что $v(x)$ — минимальное решение задачи (3), (4). Пусть $u \in \langle v_0, 0\rangle$ и $u = \lambda T u$. Так как $u \ge v_0$, то из монотонности T следует, что $u = \lambda T u \ge \lambda T v_0 = v_1$. Предположим, что $u \ge v_n$. Тогда $u = \lambda T u \ge \lambda T v_n = v_{n+1}$ (в силу монотонности). Согласно методу математической индукции отсюда следует, что $u \ge v_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Из чего заключаем, что $u \ge v$. Теорема 2 доказана.

2.2. Доказательство теоремы 3

Множество σ непустое и ограничено снизу нулём. Поэтому существует точная нижняя грань множества σ, обозначим её λ^*. Заметим, что $\lambda^* \ge 0$. Докажем включение $\lambda^* \in \sigma$, которое немедленно повлечёт положительность λ^*. Допустим, что $\lambda^* \notin \sigma$. Тогда, по определению точной нижней грани, существует последовательность $(\lambda_n) \subset \sigma$, такая, что $\lambda_n \downarrow \lambda^*$. Пусть u_n ненулевое решение задачи (3), (4) при

$\lambda = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$. При доказательстве леммы 2 для произвольного решения задачи (3), (4) было получено неравенство (7). Из чего получим оценку

$$\|u_n\|_{q,2} \le M_1\lambda_1 \left(C_1 + C_2 \|u_n\|_q^\nu\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

где постоянные C_1, C_2, ν из условия $(f4)$, M_1 не зависит от n (воспользовались монотонностью последовательности (λ_n) и неравенством Гёльдера). Поскольку $\|u_n\|_q \le \|u_n\|_{q,2}$ при $n \in \mathbb{N}$, а $\nu \in [0.1)$, то из (13) следует ограниченность (u_n) в пространстве $W_q^2(0,1)$.

Так как пространство $W_q^2(0,1)$ рефлексивно, то существует подпоследовательность последовательности (u_n), слабо сходящаяся к некоторому $u \in D(\Lambda)$ в пространстве $W_q^2(0,1)$. Будем её по-прежнему обозначать (u_n). Так как $W_q^2(0,1)$ компактно вложено в $C^1[0,1]$, то $u_n \to u$ в $C^1[0,1]$. Для ненулевого решения задачи (3), (4) мера множества $\{x \in (0,1)\,|u_n(x) < -\tilde{v}(x)\}$ не равна нулю. Поскольку $\tilde{v}(x) \ge \alpha = \min\{a,b\}$, то $\max\limits_{x\in[0,1]} |u_n(x)| \ge \alpha$. Из чего следует, что $\max\limits_{x\in[0,1]} |u(x)| \ge \alpha$.

Докажем, что $u(x)$ — решение уравнения (3). Из слабой сходимости (u_n) в $W_q^2(0,1)$ следует слабая сходимость (Lu_n) к Lu в $L_q(0,1)$, а в силу равенства $\lambda_n\tilde{g}(x,u_n(x)) = Lu_n(x)$ — слабая в $L_q(0,1)$ сходимость $(\lambda_n\tilde{g}(x,u_n(x)))$ к некоторому $y \in L_q(0,1)$. Заметим, что из ограниченности (u_n) в $L_q(0,1)$ и оценки (5) следует ограниченность $(\tilde{g}(x,u_n(x))$ в $L_q(0,1)$. Поэтому если $\lambda^* = 0$, то $\lambda_n\tilde{g}(x,u_n(x)) \to \theta$ в $L_q(0,1)$, и, значит, $Lu = \theta$ (θ — нуль пространства $L_q(0,1)$). Последнее влечёт равенство нулю $u(x)$, что противоречит неравенству $\max\{|u(x)|, x \in [0,1]\} \ge \alpha > 0$. Следовательно, $\lambda^* > 0$.

Далее, $\tilde{g}(x,u_n(x)) = \frac{1}{\lambda_n}Lu_n \rightharpoonup \frac{1}{\lambda^*}Lu$ в $L_q(0,1)$. Поэтому $u(x)$ принадлежит слабому замыканию $\vec{H}_1$ оператора $H_1u(x) = \tilde{g}(x,u(x))$, $u \in L_q(0,1)$ (по определению слабого замыкания), так как оператор Немыцкого H_1 действует из $L_q(0,1)$ в $L_q(0,1)$. Но $\vec{H}_1$ совпадает с овыпукливанием H_1 в точке $u(x)$ [7] (см. § 1), что эквивалентно включению $Lu(x) \in [\tilde{g}(x,u(x)-), \tilde{g}(x,u(x)+)]$ для почти всех $x \in (0,1)$. Поскольку $u(0) = u(1) = 0$, то отсюда следует, что $u(x)$ — обобщённое решение задачи (3), (4). Согласно лемме 2 функция $u(x)$ является сильным решением задачи (3), (4). Отметим, что выше было показано, что $u \ne \theta$. Таким образом, λ^* принадлежит спектру σ задачи (3), (4).

Пусть $\tilde{\lambda} > \lambda^*$. Тогда почти всюду на $(0,1)$ с учётом неположительности $\tilde{g}(x,s)$ верно неравенство

$$Lu^*(x) = \lambda^*\tilde{g}(x,u^*(x)) \ge \tilde{\lambda}\tilde{g}(x,u^*(x)), \tag{14}$$

где $u^*(x)$ — ненулевое решение задачи (3), (4) при $\lambda = \lambda^*$. Так как $u^*(0) = u^*(1) = 0$, то из (14) следует, что $u^*(x)$ — верхнее решение задачи (3), (4) при $\lambda = \tilde{\lambda}$. Построим нижнее решение $\underline{u}$ задачи (3), (4) при $\lambda = \widetilde{\lambda}$, такое, что $\underline{u} \le u^*$ на $(0,1)$. Обозначим через $y_1(x)$ решение задачи $Lu(x) = 1$, $u(0) = u(1) = 0$. Тогда решение $v(x)$ задачи $Lu(x) = -C$, $x \in (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$ равно $-Cy_1(x)$. Покажем, что существует такое $C(\widetilde{\lambda}) > 0$, что

$$-C(\widetilde{\lambda}) \le \widetilde{\lambda}\widetilde{g}\left(x, -C(\widetilde{\lambda})y_1(x)\right) \tag{15}$$

на $(0,1)$ и

$$-C(\widetilde{\lambda}) < \lambda^* \inf_{x\in(0,1)} \widetilde{g}(x,u^*(x)). \tag{16}$$

Для $C > 0$ имеем $\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(x,-Cy_1(x)) \ge -\widetilde{\lambda}\left(C_1 + C_2C^\nu(y_1(x))^\nu\right)$ на $(0,1)$. Для достаточно больших C верно равенство $C > \widetilde{\lambda}\left(C_1 + C_2C^\nu(y_1(x))^\nu\right)$ на $(0,1)$, так как y_1

ограничена на $[0,1]$. Отсюда и из ограниченности $\widetilde{g}(x,u^*(x))$ на $(0,1)$ (в силу оценки (5)) следует существование постоянной $C(\lambda)$, удовлетворяющей неравенствам (15) и (16).

Обозначим через $\underline{u}$ решение задачи $Lu(x) = -C(\widetilde{\lambda})$, $x \in (0,1)$, $\underline{u}(0) = \underline{u}(1) = 0$. Тогда $L\underline{u} = -C(\tilde{\lambda}) \le \widetilde{\lambda}\widetilde{g}(x,\underline{u})$, $x \in (0,1)$, $\underline{u}(0) = \underline{u}(1) = 0$, т. е. $\underline{u}(x)$ — нижнее решение задачи (3), (4) при $\lambda = \widetilde{\lambda}$. Далее, из (16) получим, что $L(u^* - \underline{u}) = \lambda^*\widetilde{g}(x,u^*) + C(\widetilde{\lambda}) \ge 0$, $x \in (0,1)$ и $(u^* - \underline{u})(0) = (u^* - \underline{u})(1) = 0$. Из чего следует, что $u^*(x) \ge \underline{u}(x)$ на $(0,1)$.

В силу леммы 3 (принцип верхних и нижних решений) заключаем, что задача (3), (4) при $\lambda = \widetilde{\lambda}$ имеет решение, удовлетворяющее неравенству $\underline{u}(x) \le u(x) \le u^*$ на $(0,1)$. Так как $u^*(x) < 0$ на $(0,1)$ (см. замечание 6), то $u(x)$ — ненулевое решение задачи (3), (4) при $\lambda = \widetilde{\lambda}$. Следовательно, $\tilde{\lambda} \in \sigma$. Теорема 3 доказана.

Список литературы

1. **Herbert, H.** Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces / H. Herbert // SIAM Rev. — 1976. — Vol. 18, no. 4. — P. 620–709.
2. **Шрагин, И. В.** Условия измеримости суперпозиций / И. В. Шрагин // Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 197, № 2. — С. 295–298.
3. **Гольдштик, М. А.** Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости / М. А. Гольдштик // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 147, № 6. — С. 1310–1313.
4. **Nistri, P.** Positive solutions of a non-linear eigenvalue problem with discontinuous nonlinearity / P. Nistri // Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh. Section A: Mathematics. — 1979. — Vol. 83, no. 1–2. — P. 133–145.
5. **Потапов, Д. К.** Задача Штурма — Лиувилля с разрывной нелинейностью / Д. К. Потапов // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 9. — С. 1284—1286.
6. **Потапов, Д. К.** Существование решений, оценки дифференциального оператора и «разделяющее» множество в краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка с разрывной нелинейностью / Д. К. Потапов // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 7. — С. 970—974.
7. **Bensid, S.** Stability results for discontinuous nonlinear elliptic and parabolic problems with a S-shaped bifurcation branch of stationary solutions / S. Bensid, J. Diaz // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. B. — 2017. — Vol. 22, no. 5. — P. 1757–1778.
8. **Павленко, В. Н.** Существование двух нетривиальных решений в задачах на собственные значения для уравнений с разрывными правыми частями при достаточно больших значениях спектрального параметра / В. Н. Павленко, Д. К. Потапов // Мат. сб. — 2017. — Т. 208, № 1. — С. 165–182.
9. **Красносельский, М. А.** Системы с гистерезисом / М. А. Красносельский, А. В. Покровский. — М.: Наука, 1983. — 448 с.
10. **Павленко, В. Н.** Существование решений у нелинейных уравнений с разрывными монотонными операторами / В. Н. Павленко // Вестн. МГУ. Математика. Механика. — 1973. — № 6. — С. 21–29.
11. **Гилбарг, Д.** Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, М. Трудингер. — М.: Наука, 1989. — 464 с.
12. **Павленко, В. Н.** Метод верхних и нижних решений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями / В. Н. Павленко, О. В. Ульянова // Изв. вузов. Математика. — 1998. — № 11. — С. 69–76.
13. **Красносельский, М. А.** Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. — М.: Физматгиз, 1962. — 396 с.

Поступила в редакцию 29.11.2018
После переработки 06.05.2019

Сведения об авторах

Павленко Вячеслав Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: pavlenko@csu.ru.

Постникова Елена Юрьевна, ассистент кафедры вычислительной математики, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: liory@bk.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2019. Vol. 4, iss. 2. P. 142–154.

DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14202

STURM — LIOUVILLE PROBLEM FOR AN EQUATION WITH A DISCONTINUOUS NONLINEARITY

V.N. Pavlenko[a], **E.Yu. Postnikova**[b]

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
[a]*pavlenko@csu.ru*, [b]*liory@bk.ru*

On the segment $[0, 1]$, we consider the Sturm — Liouville problem with a discontinuous nonlinearity on the right-hand side multiplied by a positive parameter. For nonnegative values of the phase variable u the nonlinearity is zero, and for negative values it coincides with a continuous function on $[0, 1] \times (-\infty; 0]$. The boundary conditions are $u(0) = a$, $u(1) = b$, where a, b are positive numbers. The initial problem is converted to an equivalent homogeneous one, which for all positive values of the parameter has a zero solution. Its spectrum consists of those parameter values for which the boundary value problem has a nonzero solution. Assuming sublinear growth of nonlinearity at infinity for each positive value of the parameter we construct an iterative process that converges monotonically to the minimal solution. It is proved that the spectrum of the problem is of the form $[C; +\infty)$, where $C > 0$, if it is non-empty.

Keywords: *nonlinear spectral problem, Sturm — Liouville equation, discontinuous nonlinearity, monotone iterations.*

References

1. **Herbert H.** Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces. *SIAM Review*, 1976, vol. 18, no. 4. pp. 620–709.
2. **Shragin I.E.** Usloviya izmerimosti superpozitsiy [Conditions for measurability of superpositions]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of USSR Academy of Sciences], 1971, vol. 197, no. 2, pp. 295–298. (In Russ.).
3. **Goldshtik A.V.** Matematicheskaya model' otryvnykh techeniy neszhimayemoy zhidkosti [A mathematical model of discontinuous incompressible fluid flows]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of USSR Academy of Sciences], 1962, vol. 147, no. 6, pp. 1310–1313. (In Russ.).
4. **Nistri P.** Positive solutions of a non-linear eigenvalue problem with discontinuous nonlinearity. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 1979, vol. 83, no. 1–2, pp. 133–145.
5. **Potapov D.K.** Sturm — Liouville's problem with discontinuous nonlinearity. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 9, pp. 1272–1274.
6. **Potapov D.K.** Existence of solutions, estimates for the differential operator, and a "separating" set in a boundary value problem for a second-order differential equation with a discontinuous nonlinearity. *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 7, pp. 967–972.
7. **Bensid S., Diaz J.** Stability results for discontinuous nonlinear elliptic and parabolic problems with a S-shaped bifurcation branch of stationary solutions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B*, 2017, vol. 22, no. 5, pp. 1757–1778.
8. **Pavlenko V.N., Potapov D.K.** Existence of two nontrivial solutions for sufficiently large values of the spectral parameter in eigenvalue problems for equations with discontinuous right-hand sides. *Sbornik: Mathematics*, 2017, vol. 208, no. 1, pp. 157–172.

9. **Krasnosel'skii M.A., Pokrovskii A.V.** *Systems with Hysteresis.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1989. 410 p.
10. **Pavlenko V.N.** Sushchestvovaniye resheniy u nelineynykh uravneniy s razryvnymi monotonnymi operatorami [The existence of solutions for nonlinear equations with discontinuous monotone operators]. *Vestnik MGU. Seriya 1. Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow State University. Series 1. Mathematics. Mechanics], 1973, no. 6, pp. 21–29. (In Russ.).
11. **Gilbarg D., Trudinger N.S.** *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, Springer-Verlag, 1984. 513 p.
12. **Pavlenko V.N., Ul'yanova O.V.** The method of upper and lower solutions for elliptic-type equations with discontinuous nonlinearities. *Russian Mathematics*, 1998, vol. 42, no. 11, pp. 65–72.
13. **Krasnosel'skii M.A.** *Positive Solutions of Operator Equations.* Groningen, P. Noordhoff, 1964. 381 p.

Accepted article received 29.11.2018
Corrections received 06.05.2019