МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2019. Т. 4, вып. 2. С. 129–141.

УДК 512.552.7 DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14201

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СОПРЯЖЁННОСТЬ НЕПРИВОДИМЫХ ХАРАКТЕРОВ ГРУППЫ $\mathbf{GL(2,8)}$

Р. Ж. Алеев[1,2,a], **О. В. Митина**[1,b], **А. Д. Годова**[1,c]

[1] *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
[2] *Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия*
[a] *aleev@csu.ru, aleevrz@susu.ru,* [b] *ovm@csu.ru,* [c] *sasha.godova97@mail.ru*

Строение таблиц характеров групп $GL(2,q)$ известно достаточно давно. Однако при конкретном задании q явное нахождение группы может оказаться весьма трудным, поскольку даже вычисление чисел, которые определяют положение характеров в таблице, требует значительных усилий. Также оказывается, что конкретные значения некоторых характеров могут быть весьма нелёгкими для вычисления в силу нетривиальных соотношений между корнями из 1 разных степеней. В данной работе в явном виде представлена таблица характеров группы $GL(2,8)$, построение которой продемонстрировало приведённые выше трудности. В частности, были обнаружены интересные связи между корнями из 1 степени 21. Полностью определена алгебраическая сопряжённость характеров группы $GL(2,8)$, что позволило вычислить ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца этой группы.

Ключевые слова: *характер, таблица характеров, групповое кольцо, центральная единица группового кольца, ранг группы центральных единиц.*

Введение

Изучение центральных единиц (центральных обратимых элементов) целочисленных групповых колец конечных групп представляет большой интерес, поскольку позволяет получать важнейшие характеристики групповых колец. Согласно [1], периодической частью группы центральных единиц целочисленного группового кольца конечной группы являются (с точностью до знака) элементы центра группы, а частью без кручения этой группы — прямое произведение конечного числа бесконечных циклических групп. Число таких бесконечных прямых сомножителей и есть ранг группы центральных единиц.

В работах Р. Ж. Алеева, Э. Ф. Исмагиловой, Н. Г. Карлиной [2] и Р. Ж. Алеева, О. В. Митиной и А. П. Митина [3] были описаны группы центральных единиц целочисленных групповых колец групп $GL(2,4)$ и $GL(2,5)$. В этой работе строится таблица характеров группы $GL(2,8)$, которая используется для нахождения алгебраически сопряжённых характеров, что позволяет, в свою очередь, найти ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца группы $GL(2,8)$.

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013), соглашение № 02.A03.21.0011, и при частичной поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант Правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

1. Таблица характеров группы $\mathbf{GL(2, 8)}$

1.1. Таблицы характеров групп $\mathbf{GL(2, q)}$

Общий вид таблицы характеров групп $GL(2, q)$ приведён в статье В. А. Белоногова [4] (см. табл. 1).

Таблица 1

Таблица характеров группы $GL(2, q)$ при $q = 2^n$

g	$z^a(a \in I_1)$	$u_a(a \in I_1)$	$v_{a,b}((a, b) \in I_2)$	$w^a(a \in I_3)$
$\lvert C_G(g)\rvert$	$\lvert G\rvert$	$q(q-1)$	$(q-1)^2$	q^2-1
$\chi_k(k \in I_1)$	α^{2ka}	α^{2ka}	$\alpha^{k(a+b)}$	α^{ka}
$\theta_k(k \in I_1)$	$q\alpha^{2ka}$	0	$\alpha^{k(a+b)}$	$-\alpha^{ka}$
$\eta_{k,m}((k, m) \in I_2)$	$(q+1)\alpha^{(k+m)a}$	$\alpha^{(k+m)a}$	$\alpha^{ka+mb} + \alpha^{ma+kb}$	0
$\xi_k(k \in I_3)$	$(q-1)\alpha^{ka}$	$-\alpha^{ka}$	0	$-\beta^{ka} - \beta^{kaq}$

Пояснения к таблице:

1. $I_1 = \{0, 1, \dots, q-2\}$, $|I_1| = q - 1$.
2. $I_2 = \{(i, j) \mid 0 \leqslant i < j \leqslant q-2\}$, $|I_2| = \frac{(q-2)(q-1)}{2}$.
3. $I_3 = \{k \mid 0 \leqslant k \leqslant q^2-2, q+1$ не делит $k, \xi_k = \xi_{\widetilde{kq}}\}$, где $\widetilde{kq}$ — остаток от деления числа kq на $q^2 - 1$, $|I_3| = \frac{q(q-1)}{2}$.
4. α — примитивный корень из 1 степени $q - 1$, β — примитивный корень из 1 степени $q^2 - 1$, причём $\alpha = \beta^{q+1}$.
5. χ_k — характер степени 1 (линейный характер),
   θ_k — характер степени q для любого $k \in I_1$,
   $\eta_{m,k}$ — характер степени $q + 1$ для любого $(m, k) \in I_2$,
   ξ_k — характер степени $q - 1$ для любого $k \in I_3$.
6. ρ — примитивный элемент поля $\mathbf{F}_q$, σ — примитивный элемент поля $\mathbf{F}_{q^2}$, причём $\rho = \sigma^{q+1}$.
7. $z^a = \begin{pmatrix} \rho^a & 0 \\ 0 & \rho^a \end{pmatrix}, u_a = \begin{pmatrix} \rho^a & 0 \\ 1 & \rho^a \end{pmatrix}, v_{a,b} = \begin{pmatrix} \rho^a & 0 \\ 0 & \rho^b \end{pmatrix}, w^a = \begin{pmatrix} \sigma^a & 0 \\ 0 & \sigma^{aq} \end{pmatrix}$.

1.2. Таблица характеров группы $\mathbf{GL(2, 8)}$

Построим таблицу характеров группы $GL(2, 8)$ в явном виде. Для $q = 8$ имеем следующее:

1. $|I_1| = 7$, $I_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. $|I_2| = \frac{(8-2)(8-1)}{2} = 21$, $I_2 = \{(i, j) \mid 0 \leqslant i < j \leqslant 8-2\}$, следовательно,

$$I_2 = \{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6)\}.$$

3. $|I_3| = \frac{8(8-1)}{2} = 28$, $I_3 = \{k \mid 0 \leqslant k \leqslant 62, 9$ не делит $k, \xi_k = \xi_{\widetilde{8k}}\}$, где $\widetilde{8k}$ — остаток от деления числа $8k$ на 63.

Из множества $\{0, 1, 2, \dots, 62\}$ удалим числа, кратные 9. Получим множество

$$\{1, 2, \dots, 8, 10, \dots, 17, 19, \dots, 26, 28, \dots, 35, 37, \dots, 44, 46, \dots, 53, 55, \dots, 62\}.$$

Полученное множество разбиваем на пары $(n, 8n)$ по модулю 63:

$$(1,8), (2,16), (3,24), (4,32), (5,40), (6,48), (7,56), (10,17), (11,25), (12,33), (13,41), (14,49), (15,57), (19,26), (20,34), (21,42), (22,50), (23,58), (28,35), (29,43), (30,51), (31,59), (37,44), (38,52), (39,60), (46,53), (47,61), (55,62).$$

Из каждой пары выберем по одному элементу:

$$I_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 19, 20, \\ 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31, 37, 38, 39, 46, 47, 55\}.$$

4. α — примитивный корень из 1 степени 7, без ограничения общности можно считать, что $\alpha = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$; β — примитивный корень из 1 степени 63, и мы также можем считать, что $\beta = \cos\frac{2\pi}{63} + i\sin\frac{2\pi}{63}$, значит, $\alpha = \beta^9$.

5. Таким образом, получим следующие семейства характеров:

а) первое семейство состоит из 7 характеров степени 1:

$$X = \{\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_6\};$$

б) второе семейство состоит из 7 характеров степени 8:

$$\Theta = \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\};$$

в) третье семейство состоит из 21 характера степени 9:

$$H = \{\eta_{0,1}, \eta_{0,2}, \eta_{0,3}, \eta_{0,4}, \eta_{0,5}, \eta_{0,6}, \eta_{1,2}, \eta_{1,3}, \eta_{1,4}, \eta_{1,5}, \\ \eta_{1,6}, \eta_{2,3}, \eta_{2,4}, \eta_{2,5}, \eta_{2,6}, \eta_{3,4}, \eta_{3,5}, \eta_{3,6}, \eta_{4,5}, \eta_{4,6}, \eta_{5,6}\};$$

г) четвёртое семейство состоит из 28 характеров степени 7:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{14}, \xi_{15}, \xi_{19}, \\ \xi_{20}, \xi_{21}, \xi_{22}, \xi_{23}, \xi_{28}, \xi_{29}, \xi_{30}, \xi_{31}, \xi_{37}, \xi_{38}, \xi_{39}, \xi_{46}, \xi_{47}, \xi_{55}\}.$$

Для удобства в дальнейшем будем обозначать $GL(2,8) = G$.

Таблица 2

Блочный вид таблицы характеров группы $G = GL(2,8)$

g	$z^a(a \in I_1)$	$u_a(a \in I_1)$	$v_{a,b}((a,b) \in I_2)$	$w^a(a \in (I_3)$
$\lvert C_G(g)\rvert$	3528	56	49	63
$\chi_k(k \in I_1)$	$A_{7\times7}$	$A_{7\times7}$	$B_{7\times21}$	$C_{7\times28}$
$\theta_k(k \in I_1)$	$8A_{7\times7}$	0	$B_{7\times21}$	$-C_{7\times28}$
$\eta_{k,m}((k,m) \in I_2)$	$9B^t_{21\times7}$	$B^t_{21\times7}$	$D_{21\times21}$	$\mathbf{0}$
$\xi_k(k \in I_3)$	$7C^t_{28\times7}$	$-C^t_{28\times7}$	$\mathbf{0}$	$F_{28\times28}$

Опишем более подробно разбиение на блоки и строение этих блоков. Отметим, что во множестве I_1 нумерация начинается с нуля, нижние индексы блоков означают их размер, верхний индекс t — транспонирование и $\mathbf{0}$ — блоки подходящего размера, состоящие из нулей. Таким образом, в таблице будут ненулевые блоки $A_{7\times7}$, $B_{7\times21}$, $C_{7\times28}$, $D_{21\times21}$, $F_{28\times28}$ и транспонированные им.

Блок $A_{7\times7}$. Для $k, a \in I_1$ в блоке $A_{7\times7}$ на месте с номером (k,a) стоит элемент α^{ka}.

Блок $B_{7\times21}$. Для $k \in I_1$ и $(a,b) \in I_2$ в блоке $B_{7\times21}$ на месте с номером $(k,(a,b))$ стоит элемент $\alpha^{k(a+b)}$.

Блок $C_{7\times28}$. Для $k \in I_1$ и $a \in I_3$ в блоке $C_{7\times21}$ на месте с номером (k,a) стоит элемент α^{ka}.

Блок $D_{21\times21}$. Для $(k,m),(a,b) \in I_2$ в блоке $D_{21\times21}$ на месте с номером $((k,m),(a,b))$ стоит элемент $\alpha^{ka+mb} + \alpha^{ma+kb}$.

Блок $F_{28\times28}$. Для $k, a \in I_3$ в блоке $F_{28\times28}$ на месте с номером (k,a) стоит элемент $-\beta^{ka} - \beta^{8ka}$.

1.3. Значения характеров

Пользуясь таблицей характеров, выпишем значения характеров для каждого из следующих семейств. Будем обозначать через $\chi(G)$ множество всех значений характера χ группы G.

1.3.1. Первое семейство X

Значения характеров этого семейства содержатся в следующем фрагменте таблицы характеров группы G:

g	$z^a(a \in I_1)$	$u_a(a \in I_1)$	$v_{a,b}((a,b) \in I_2)$	$w^a(a \in I_3)$
$\chi_k(k \in I_1)$	$A_{7\times 7}$	$A_{7\times 7}$	$B_{7\times 21}$	$C_{7\times 28}$

Из описания строения блоков $A_{7\times 7}$, $B_{7\times 21}$ и $C_{7\times 28}$ очевидно следует, что все значения характеров семейства X являются степенями элемента α. Также очевидно, что $\chi_0 = 1_G$ — главный характер, а остальные характеры семейства X имеют в качестве значений все степени α. Таким образом, получим следующие значения характеров:

1) $\chi_0(G) = \{1\}$;
2) для любого $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$ имеем $\chi_k(G) = \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6\}$.

1.3.2. Второе семейство Θ

Фрагмент таблицы характеров со значениями характеров семейства Θ имеет вид

g	$z^a(a \in I_1)$	$u_a(a \in I_1)$	$v_{a,b}((a,b) \in I_2)$	$w^a(a \in I_3)$
$\theta_k(k \in I_1)$	$8A_{7\times 7}$	$\mathbf{0}$	$B_{7\times 21}$	$-C_{7\times 28}$

Как и в случае семейства X, легко понять, что все значения характеров семейства Θ либо нулевые, либо кратны степеням α. Понятно, что характер θ_0 имеет только целые значения. Поэтому непосредственно проверяется, что:

1) $\theta_0(G) = \{8, 1, 0, -1\}$;
2) для любого $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$
$$\theta_k(G) = \{8, 8\alpha, 8\alpha^2, 8\alpha^3, 8\alpha^4, 8\alpha^5, 8\alpha^6, 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6, 0, \\ -1, -\alpha, -\alpha^2, -\alpha^3, -\alpha^4, -\alpha^5, -\alpha^6\}.$$

1.3.3. Третье семейство H

Для этого семейства значения характеров содержатся в следующем фрагменте таблицы характеров:

g	$z^a(a \in I_1)$	$u_a(a \in I_1)$	$v_{a,b}((a,b) \in I_2)$	$w^a(a \in I_3)$
$\eta_{k,m}(k,m) \in I_2)$	$9B_{21\times 7}$	$B_{21\times 7}$	$D_{21\times 21}$	$\mathbf{0}$

В этом случае нетрудно понять, что все значения характеров семейства H либо равны нулю, либо являются степенями α, либо суммой двух степеней α (это для чисел, попадающих в блок $D_{21\times 21}$). Также следует отметить, что в случае, когда $(k, m) \in I_3$ и $k + m = 7$, имеем

$$\alpha^{(k+m)a} = \alpha^{7a} = 1, \quad \alpha^{ka+mb} + \alpha^{ma+kb} = \alpha^{ka+(7-k)b} + \alpha^{(7-k)a+kb} = \alpha^{k(a-b)} + \alpha^{(7-k)(a-b)}.$$

Поэтому соответствующие места в блоке $B_{21\times 7}$ будут заполнены 1, а в блоке $D_{21\times 21}$ значения на таких местах легко вычислимы. Таким образом, при непосредственных вычислениях возникают два случая:

1) для $(k, m) \in \{(1, 6), (2, 5), (3, 4)\}$ имеем $\eta_{k,m}(G) = \{1, 9, \alpha + \alpha^6, \alpha^2 + \alpha^5, \alpha^3 + \alpha^4\}$;

2) для всех остальных $(k,m)\in I_2$, т. е. для
$$(k,m)\in I_2\setminus\{(1,6),(2,5),(3,4)\}=\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(0,5),(0,6),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,6),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\},$$
получим
$$\eta_{k,m}(G)=\{9,9\alpha,9\alpha^2,9\alpha^3,9\alpha^4,9\alpha^5,9\alpha^6,1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4,\alpha^5,\alpha^6,\alpha+1,\alpha^2+1,\alpha^3+1,\alpha^4+1,\alpha^5+1,\alpha^6+1,\alpha^2+\alpha,\alpha^3+\alpha,\alpha^4+\alpha,\alpha^5+\alpha,\alpha^6+\alpha,\alpha^3+\alpha^2,\alpha^4+\alpha^2,\alpha^5+\alpha^2,\alpha^6+\alpha^2,\alpha^4+\alpha^3,\alpha^5+\alpha^3,\alpha^6+\alpha^3,\alpha^5+\alpha^4,\alpha^6+\alpha^4,\alpha^6+\alpha^5\}.$$

1.3.4. Четвёртое семейство Ξ

Наконец, для последнего семейства характеров имеем следующий фрагмент таблицы характеров:

g	$z^a(a\in I_1)$	$u_a(a\in I_1)$	$v_{a,b}((a,b)\in I_2)$	$w^a(a\in I_3)$
$\xi_k(k\in I_3)$	$7C_{28\times 7}$	$-C_{28\times 7}$	$\mathbf{0}$	$F_{28\times 28}$

Поскольку значения элементов в блоке $C_{28\times 7}$ являются степенями элемента $\alpha=\beta^9$, значения элементов в $F_{28\times 28}$ есть $-\beta^{ka}-\beta^{8ka}$, а элемент β — это примитивный корень степени 63 из 1, то ясно, что нуждаются в особом рассмотрении те значения $k\in I_3$, которые делятся на 3 и/или 7. Также нам потребуется следующий результат, который прояснит значения характеров в некоторых случаях.

Лемма 1. *При введённых выше обозначениях* $\beta^3+\beta^{24}=-\alpha^5$,
$$\beta^6+\beta^{48}=-\alpha^3,\qquad \beta^{12}+\beta^{33}=-\alpha^6,\qquad \beta^{15}+\beta^{57}=-\alpha^4,$$
$$\beta^{30}+\beta^{51}=-\alpha,\qquad \beta^{39}+\beta^{60}=-\alpha^2,\qquad \beta^{21}+\beta^{42}=-1.$$

Доказательство. В самом деле,
$$\beta^3+\beta^{24}=\cos\frac{6\pi}{63}+i\sin\frac{6\pi}{63}+\cos\frac{48\pi}{63}+i\sin\frac{48\pi}{63}=$$
$$=2\cos\frac{27\pi}{63}\cos\frac{21\pi}{63}+2i\sin\frac{27\pi}{7}\cos\frac{21\pi}{63}=2\cos\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{7}+i\sin\frac{3\pi}{7}\right)=$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)\left(\cos\frac{10\pi}{7}+i\sin\frac{10\pi}{7}\right)=-\alpha^5=-\beta^{45}.$$

Согласно [5, § 60], существуют такие автоморфизмы $\tilde\psi_j$, $j\in J=\{2,4,5,10,13\}$, кругового поля $\mathbb{Q}(\beta)=\mathbb{Q}_{63}$, что $\tilde\psi_j(\beta)=\beta^j$. Так как $\alpha=\beta^9$, то $\tilde\psi_j(\alpha)=(\beta^9)^j=\beta^{9j}=\alpha^j$.

Рассмотрим действие каждого автоморфизма $\tilde\psi_j$ для $j\in J$ на обе части равенства $\beta^3+\beta^{24}=-\alpha^5$. Пусть $j=2$, тогда $\tilde\psi_2(\beta^3)=\beta^6$, $\tilde\psi_2(\beta^{24})=\beta^{48}$, $\tilde\psi_2(\alpha^5)=\alpha^{10}=\alpha^3$. Поэтому $\beta^6+\beta^{48}=-\alpha^3$.

Если $j=4$, то $\tilde\psi_4(\beta^3)=\beta^{12}$, $\tilde\psi_4(\beta^{24})=\beta^{96}=\beta^{33}$, $\tilde\psi_4(\alpha^5)=\alpha^{20}=\alpha^6$. Таким образом, $\beta^{12}+\beta^{33}=-\alpha^6$.

Пусть $j=5$, тогда $\tilde\psi_5(\beta^3)=\beta^{15}$, $\tilde\psi_5(\beta^{24})=\beta^{120}=\beta^{57}$, $\tilde\psi_5(\alpha^5)=\alpha^{25}=\alpha^4$. Поэтому $\beta^{15}+\beta^{57}=-\alpha^4$.

Если $j=10$, то $\tilde\psi_{10}(\beta^3)=\beta^{30}$, $\tilde\psi_{10}(\beta^{24})=\beta^{240}=\beta^{51}$, $\tilde\psi_{10}(\alpha^5)=\alpha^{50}=\alpha$. Таким образом, $\beta^{30}+\beta^{51}=-\alpha$.

Наконец, для $j=13$ получим $\tilde\psi_{13}(\beta^3)=\beta^{39}$, $\tilde\psi_{13}(\beta^{24})=\beta^{312}=\beta^{50}$, $\tilde\psi_3(\alpha^5)=\alpha^{65}=\alpha^2$. Следовательно, $\beta^{39}+\beta^{60}=-\alpha^2$. Последнее равенство следует из того, что β^{21} — корень третьей степени из 1.

□

Рассмотрим значения $k \in I_3$, которые делятся на 3 и/или 7.

1. Единственное значение элемента $k \in I_3$, которое делится на 3 и 7, равно 21. Тогда $\xi_{21}(G) = \{7, 1, 0, -1, -2\}$.

2. Числами $k \in I_3$, которые делятся на 7 и не делятся на 3, являются числа $\{7, 14, 28\}$. Для таких k имеем по лемме 1

$$\xi_k(G) = \{7, 0, -1, -\beta^7 - \beta^{56}, -\beta^{14} - \beta^{49}, -\beta^{21} - \beta^{42} = 1, -\beta^{28} - \beta^{35}\}.$$

3. Числами $k \in I_3$, которые делятся на 3 и не делятся на 7, являются числа $\{3, 6, 12, 15, 30, 39\}$. Так как $\alpha = \beta^9$, то по лемме 1 для таких k имеем

$$\begin{aligned}\xi_k(G) = \{&7, 7\alpha, 7\alpha^2, 7\alpha^3, 7\alpha^4, 7\alpha^5, 7\alpha^6, 0, -1, -2, -\alpha, -\alpha^2, -\alpha^3, -\alpha^4, -\alpha^5, -\alpha^6,\\ &-\beta^3 - \beta^{24} = \alpha^5, -\beta^6 - \beta^{48} = \alpha^3, -2\beta^9 = -2\alpha, -\beta^{12} - \beta^{33} = \alpha^6,\\ &-\beta^{15} - \beta^{57} = \alpha^4, -2\beta^{18} = -2\alpha^2, -\beta^{21} - \beta^{42} = 1, -\beta^{30} - \beta^{51} = \alpha,\\ &-2\beta^{36} = -2\alpha^4, -\beta^{39} - \beta^{60} = \alpha^2, -2\beta^{45} = -2\alpha^5, -2\beta^{27} = -2\alpha^3,\\ &-2\beta^{54} = -2\alpha^6\}\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\xi_k(G) = \{&7, 7\alpha, 7\alpha^2, 7\alpha^3, 7\alpha^4, 7\alpha^5, 7\alpha^6, 0, -1, -2, -\alpha, -\alpha^2, -\alpha^3, -\alpha^4, -\alpha^5, -\alpha^6,\\ &\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6, -2\alpha, -2\alpha^2, -2\alpha^3, -2\alpha^4, -2\alpha^5, -2\alpha^6, 1\}.\end{aligned}$$

4. Для всех остальных $k \in I_3$, т. е. для $I_3 \setminus \{21, 7, 14, 28, 3, 6, 12, 15, 30, 39\} = \{1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 19, 20, 22, 23, 29, 31, 37, 38, 46, 47, 55\}$, получим по лемме 1

$$\begin{aligned}\xi_k(G) = \{&7, 7\alpha, 7\alpha^2, 7\alpha^3, 7\alpha^4, 7\alpha^5, 7\alpha^6, 0, -1, -\alpha, -\alpha^2, -\alpha^3, -\alpha^4, -\alpha^5, -\alpha^6,\\ &-\beta - \beta^8, -\beta^2 - \beta^{16}, -\beta^3 - \beta^{24} = \alpha^5, -\beta^4 - \beta^{32}, -\beta^5 - \beta^{40},\\ &-\beta^6 - \beta^{48} = \alpha^3, -\beta^7 - \beta^{56}, -\beta^{10} - \beta^{17}, -\beta^{11} - \beta^{25}, -\beta^{12} - \beta^{33} = \alpha^6,\\ &-\beta^{13} - \beta^{41}, -\beta^{14} - \beta^{49}, -\beta^{15} - \beta^{57} = \alpha^4, -\beta^{19} - \beta^{26}, -\beta^{20} - \beta^{34},\\ &-\beta^{21} - \beta^{42} = 1, -\beta^{22} - \beta^{50}, -\beta^{23} - \beta^{58}, -\beta^{28} - \beta^{35}, -\beta^{29} - \beta^{43},\\ &-\beta^{30} - \beta^{51} = \alpha, -\beta^{31} - \beta^{59}, -\beta^{37} - \beta^{44}, -\beta^{38} - \beta^{52}, -\beta^{39} - \beta^{60} = \alpha^2,\\ &-\beta^{46} - \beta^{53}, -\beta^{47} - \beta^{61}, -\beta^{55} - \beta^{62}\},\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}\xi_k(G) = \{&7, 7\alpha, 7\alpha^2, 7\alpha^3, 7\alpha^4, 7\alpha^5, 7\alpha^6, 0, -1, -\alpha, -\alpha^2, -\alpha^3, -\alpha^4, -\alpha^5, -\alpha^6,\\ &-\beta - \beta^8, -\beta^2 - \beta^{16}, -\beta^4 - \beta^{32}, -\beta^5 - \beta^{40}, -\beta^7 - \beta^{56}, -\beta^{10} - \beta^{17},\\ &-\beta^{11} - \beta^{25}, -\beta^{13} - \beta^{41}, -\beta^{14} - \beta^{49}, -\beta^{19} - \beta^{26}, -\beta^{20} - \beta^{34},\\ &-\beta^{22} - \beta^{50}, -\beta^{23} - \beta^{58}, -\beta^{28} - \beta^{35}, -\beta^{29} - \beta^{43}, -\beta^{31} - \beta^{59},\\ &-\beta^{37} - \beta^{44}, -\beta^{38} - \beta^{52}, -\beta^{46} - \beta^{53}, -\beta^{47} - \beta^{61}, -\beta^{55} - \beta^{62},\\ &\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6, 1\}.\end{aligned}$$

2. Поля характеров и их автоморфизмы

На основе информации о значениях характеров можно найти поля всех характеров и автоморфизмы этих полей.

Лемма 2. *Для любого характера* $\chi \in \{\chi_0, \theta_0, \xi_{21}\}$ *полем характера является поле рациональных чисел*: $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}$.

Доказательство. Утверждение очевидно, поскольку эти характеры принимают только целые значения. □

Лемма 3. *Для любого характера*

$$\chi \in \{\chi_k, \theta_k \mid k \in \{1,2,\ldots,6\}\} \cup \{\eta_{k,m} \mid (k,m) \in I_2 \setminus \{(1,6),(2,5),(3,4)\}\} \cup$$

$$\cup \{\xi_k \mid k \in \{3,6,12,15,30,39\}\}$$

полем характера является круговое поле, полученное присоединением примитивного корня α *из* 1 *степени* 7 *к полю рациональных чисел*: $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}_7$.

Группа автоморфизмов (группа Галуа) поля $\mathbb{Q}_7$ *состоит из* 6 *элементов*:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_7) = \{\varphi_j \mid j \in \{1,2,\ldots,6\}\},$$

где для любого $j \in \{1,2,\ldots,6\}$ $\varphi_j(\alpha) = \alpha^j$.

Доказательство. Значения этих характеров, рассмотренные ранее, влекут очевидно утверждение о полях характеров. Утверждение об автоморфизмах следует из результатов [5, § 60]. □

Лемма 4. *Для любого характера* $\chi \in \{\eta_{1,6}, \eta_{2,5}, \eta_{3,4}\}$ *полем характера является максимальное действительное подполе кругового поля* $\mathbb{Q}_7$:

$$\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}_7 \cap \mathbb{R}.$$

Группа автоморфизмов (группа Галуа) поля $\mathbb{Q}_7 \cap \mathbb{R}$ *состоит из* 3 *элементов*:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_7 \cap \mathbb{R}) = \{\bar{\varphi}_j \mid j \in \{1,2,3\}\},$$

где для любого $j \in \{1,2,3\}$ $\bar{\varphi}_j(\alpha + \alpha^{-1}) = \alpha^j + \alpha^{-j}$.

Доказательство. Так как значения каждого такого характера являются элементами множества $\{1, 9, \alpha+\alpha^6, \alpha^2+\alpha^5, \alpha^3+\alpha^4\}$, то $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}_7 \cap \mathbb{R}$. Поскольку $\mathbb{Q}(\chi) \neq \mathbb{Q}$, то по теореме о степенях (см. [5, § 40]) получим, что $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}_7 \cap \mathbb{R}$.

Утверждение об автоморфизмах следует по лемме 3 из [5, § 59]. □

Можно подвести предварительный итог. В леммах 2–4 описаны поля всех характеров семейств X, Θ и H. Заметим, что поля характеров семейства Ξ связаны с блоками $C_{28\times 7}$ и $F_{28\times 28}$. Поскольку $\alpha = \beta^9$, то все значения этих характеров содержатся в круговом поле $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}_{63}$. Поэтому необходимо сначала описать автоморфизмы поля $\mathbb{Q}_{63}$.

Лемма 5. *Группа автоморфизмов (группа Галуа) поля* $\mathbb{Q}_{63}$ *изоморфна группе единиц* $\mathbb{Z}_{63}^*$ *кольца* $\mathbb{Z}_{63}$ *классов вычетов по модулю* 63. *Более подробно, пусть*

$$\begin{aligned} R_{63} = \{&1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,20,22,23,25,26,28,29,31,32,\\ &34,35,37,38,40,41,43,44,46,47,49,50,52,53,55,56,58,59,61,62\} \end{aligned}$$

есть приведённая система вычетов по модулю 63. *Тогда группа автоморфизмов (группа Галуа) поля* $\mathbb{Q}_{63}$ *имеет следующее строение*: $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_{63}) = \left\{\tilde{\psi}_j \mid j \in R_{63}\right\}$, *где* $\tilde{\psi}_j(\beta) = \beta^j$. *В частности,* $\tilde{\psi}_j(\alpha) = \alpha^j$.

Доказательство. Утверждение следует из [5, § 60]. □

Лемма 6. *Пусть*

$$R8_{63} = I_3 \setminus \{21, 7, 14, 28, 3, 6, 12, 15, 30, 39\} = \\ = \{1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 19, 20, 22, 23, 29, 31, 37, 38, 46, 47, 55\}.$$

Тогда для любого характера $\chi \in \{\xi_k \mid k \in R8_{63}\}$ полем характера

$$\mathbb{Q}(\chi) = C_{\mathbb{Q}_{63}}(\tilde{\psi}_8) = \mathbb{Q}(\beta + \beta_8, \alpha)$$

является централизатор автоморфизма $\tilde{\psi}_8$ поля $\mathbb{Q}_{63}$, или, равносильно, поле, полученное присоединением элементов $\beta + \beta_8$ и α к полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Также группа автоморфизмов (группа Галуа) поля $\mathbb{Q}(\chi)$ имеет следующее строение:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\chi)) = \{\psi_j \mid j \in R8_{63}\},$$

где $\psi_j(\beta + \beta^8) = \beta^j + \beta^{8j}$ и $\psi_j(\alpha) = \alpha^j$.

Доказательство. Рассматривая приведённые ранее значения любого такого характера χ, нетрудно понять, что автоморфизм $\tilde{\psi}_8$ централизует любое значение этого характера. Поэтому $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq C_{\mathbb{Q}_{63}}(\tilde{\psi}_8)$. С другой стороны, любой симметрический многочлен с целыми коэффициентами от двух неизвестных x и y представляется в виде многочлена с целыми коэффициентами от $x + y$ и xy. Следовательно, любое число вида $-\beta^s - \beta^{8s}$ является значением некоторого многочлена с целыми коэффициентами от $x + y$ и xy при $x = \beta$ и $y = \beta^8$, ибо $x + y = \beta + \beta^8$ и $xy = \beta\beta^8 = \beta^9 = \alpha$. Отсюда ясно, что

$$\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}(\beta + \beta^8, \alpha) \subseteq C_{\mathbb{Q}_{63}}(\tilde{\psi}_8).$$

Так как порядок автоморфизма $\tilde{\psi}_8$ равен 2, то из § 59 и § 60 в [5] следует, что степень расширения поля $\mathbb{Q}$

$$|C_{\mathbb{Q}_{63}}(\tilde{\psi}_8) : \mathbb{Q}| = \frac{\phi(63)}{2} = \frac{36}{2} = 18,$$

где ϕ — теоретико-числовая функция Эйлера.

Множество R_{63} разбиваем на пары чисел $(n, 8n)$ по модулю 63:

$$(1, 8), (2, 16), (4, 32), (5, 40), (10, 17), (11, 25), (13, 41), (19, 26), (20, 34), (22, 50), \\ (23, 58), (29, 43), (31, 59), (37, 44), (38, 52), (46, 53), (47, 61), (55, 62).$$

Каждая из этих пар определяет смежный класс в группе автоморфизмов (группе Галуа) поля $\mathbb{Q}_{63}$ по подгруппе $\langle\tilde{\psi}_8\rangle$ порядка 2. Поэтому из § 59 в [5] следует, что

$$\mathrm{Aut}(C_{\mathbb{Q}_{63}}(\tilde{\psi}_8)) = \{\psi_j \mid j \in R8_{63}\},$$

где для любого $j \in R8_{63}$ имеем $\psi_j(\beta + \beta^8) = \beta^j + \beta^{8j}$ и $\psi_j(\alpha) = \alpha^j$.

Так как степень расширения $[C_{\mathbb{Q}_{63}}(\tilde{\psi}_8) : \mathbb{Q}] = 18$, $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}(\chi)$ и степень расширения $|\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}| = 6$, то по теореме о степенях (см. [5, § 40]) получим, что

$$\text{либо } \mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\alpha), \text{ либо } \mathbb{Q}(\chi) = C_{\mathbb{Q}_{63}}(\tilde{\psi}_8).$$

По основной теореме теории Галуа [5, § 58] поле $\mathbb{Q}(\alpha)$ является централизатором в поле $\mathbb{Q}_{63}$ подгруппы K порядка 6 группы автоморфизмов (группы Галуа) поля $\mathbb{Q}_{63}$. Из леммы 5 и строения группы $\mathrm{Aut}(C_{\mathbb{Q}_{63}}(\tilde{\psi}_8))$ нетрудно понять, что

$$K = \{\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_8, \tilde{\psi}_{22}, \tilde{\psi}_{50}, \tilde{\psi}_{29}, \tilde{\psi}_{43}\}.$$

Если $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\alpha)$, то, в частности, получим, что $\beta + \beta^8 = \tilde{\psi}_{22}(\beta + \beta^8) = \beta^{22} + \beta^{50}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\beta + \beta^8 = \beta^{22} + \beta^{50} &\longleftrightarrow 1 + \beta^7 = \beta^{21} + \beta^{49} \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow 1 - \beta^{21} = \beta^{49} - \beta^7 = \beta^7(\beta^{42} - 1) = \beta^7(\beta^{21} - 1)(\beta^{21} + 1) \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow -1 = \beta^7(\beta^{21} + 1) \longleftrightarrow \beta^{28} + \beta^7 + 1 = 0,\end{aligned}$$

т. е. β является корнем многочлена степени 28, что невозможно (см. [5, § 60]). Таким образом, показано, что $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\beta + \beta^8, \alpha) = C_{\mathbb{Q}_{63}}(\tilde{\psi}_8)$. □

Лемма 7. *Для любого характера $\chi \in \{\xi_7, \xi_{14}, \xi_{28}\}$ полем характера является максимальное действительное подполе кругового поля $\mathbb{Q}_9$:*

$$\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\beta^7) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}_9 \cap \mathbb{R}.$$

Группа автоморфизмов (группа Галуа) поля $\mathbb{Q}_9 \cap \mathbb{R}$ состоит из 3 элементов:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_9 \cap \mathbb{R}) = \{\bar{\psi}_j \mid j \in \{1, 2, 4\}\},$$

где для любого $j \in \{1, 2, 4\}$ $\varphi_j(\beta^7 + \alpha^{-7}) = \beta^{7j} + \beta^{-7j}$.

Доказательство. Так как значения каждого такого характера лежат во множестве

$$\{7, 0, -1, -\beta^7 - \beta^{56}, -\beta^{14} - \beta^{49}, -\beta^{21} - \beta^{42} = 1, -\beta^{28} - \beta^{35}\},$$

то $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}_9 \cap \mathbb{R}$. Поскольку $\mathbb{Q}(\chi) \neq \mathbb{Q}$, то по теореме о степенях [5, § 40] получим, что $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\beta^7) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}_9 \cap \mathbb{R}$.

Утверждение об автоморфизмах следует из леммы 5 в силу результатов [5, § 59]. □

3. Алгебраически сопряжённые характеры

Разобьём характеры группы $G = GL(2,8)$ на классы алгебраически сопряжённых характеров и укажем соответствующие автоморфизмы.

Теорема 1. *Все неприводимые комплексные характеры группы $GL(2,8)$ разбиваются на 12 классов эквивалентности алгебраически сопряжённых характеров:*

1) $\{\chi_0\}$;
2) $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_6\}$;
3) $\{\theta_0\}$;
4) $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\}$;
5) $\{\eta_{1,6}, \eta_{2,5}, \eta_{3,4}\}$;
6) $\{\eta_{0,1}, \eta_{0,2}, \eta_{0,3}, \eta_{0,4}, \eta_{0,5}, \eta_{0,6}\}$;
7) $\{\eta_{1,2}, \eta_{2,4}, \eta_{3,6}, \eta_{1,4}, \eta_{3,5}, \eta_{5,6}\}$;
8) $\{\eta_{1,3}, \eta_{2,6}, \eta_{2,3}, \eta_{4,5}, \eta_{1,5}, \eta_{4,6}\}$;
9) $\{\xi_{21}\}$;
10) $\{\xi_7, \xi_{14}, \xi_{28}\}$;
11) $\{\xi_3, \xi_6, \xi_{12}, \xi_{15}, \xi_{30}, \xi_{39}\}$;
12) $\{\xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{13}, \xi_{19}, \xi_{20}, \xi_{22}, \xi_{23}, \xi_{29}, \xi_{31}, \xi_{37}, \xi_{38}, \xi_{46}, \xi_{47}, \xi_{55}\}$.

Доказательство. По лемме 3 из [6] алгебраическая сопряжённость характеров полностью определяется автоморфизмами поля характеров, которое одно и то же у алгебраически сопряжённых характеров.

Поле характера $\mathbb{Q}$. Так как поле $\mathbb{Q}$ имеет только тривиальный автоморфизм, то по лемме 2 получим следующие классы алгебраически сопряжённых характеров: $\{\chi_0\}$, $\{\theta_0\}$ и $\{\xi_{21}\}$.

Поле характера $\mathbb{Q}_7$. Из леммы 3 из работы [6] следует, что все характеры множеств

$$\{\chi_k \mid k \in \{1,2,\dots,6\}\} \cup \{\theta_k \mid k \in \{1,2,\dots,6\}\} \cup \{\xi_k \mid k \in \{3,6,12,15,30,39\}\}$$

алгебраически сопряжены, поскольку их $6 = [\mathbb{Q}_7 : \mathbb{Q}]$ в каждом из этих множеств. Из таблицы характеров непосредственно следует, что для любого $k \in \{1,2,\dots,6\}$ $\varphi_k(\chi_1) = \chi_k$ и $\varphi_k(\theta_1) = \theta_k$. Также из таблицы характеров по лемме 2 нетрудно извлечь, что $\varphi_2(\xi_3) = \xi_6$, $\varphi_4(\xi_3) = \xi_{12}$, $\varphi_5(\xi_3) = \xi_{15}$, $\varphi_3(\xi_3) = \xi_{30}$, $\varphi_6(\xi_3) = \xi_{39}$.

Во множестве $\{\eta_{k,m} \mid (k,m) \in I_2 \setminus \{(1,6),(2,5),(3,4)\}\}$ 18 характеров. Они разобьются на три класса алгебраически сопряжённых характеров, а именно непосредственные вычисления дают:

$$\begin{aligned}
&\varphi_k(\eta_{0,1}) = \eta_{0,k} \text{ для любого } k \in \{1,2,\dots,6\};\\
&\varphi_2(\eta_{1,2}) = \eta_{2,4},\ \varphi_3(\eta_{1,2}) = \eta_{3,6},\ \varphi_4(\eta_{1,2}) = \eta_{1,4},\ \varphi_5(\eta_{1,2}) = \eta_{3,5},\ \varphi_6(\eta_{1,2}) = \eta_{5,6};\\
&\varphi_2(\eta_{1,3}) = \eta_{2,6},\ \varphi_3(\eta_{1,3}) = \eta_{2,3},\ \varphi_4(\eta_{1,3}) = \eta_{4,5},\ \varphi_5(\eta_{1,2}) = \eta_{1,5},\ \varphi_6(\eta_{1,3}) = \eta_{4,6}.
\end{aligned}$$

Поле характера $\mathbb{Q}_7 \cap \mathbb{R}$. По лемме 4 этой работы и по лемме 3 из [6] все характеры множества $\{\eta_{1,6}, \eta_{2,5}, \eta_{3,4}\}$ алгебраически сопряжены, поскольку их $3 = [\mathbb{Q}_7 \cap \mathbb{R} : \mathbb{Q}]$ в этом множестве. Также легко понять, что $\bar{\varphi}_2(\eta_{1,6}) = \eta_{2,5}$ и $\bar{\varphi}_3(\eta_{1,6}) = \eta_{3,4}$.

Поле характера $\mathbb{Q}_9 \cap \mathbb{R}$. По лемме 7 с учётом леммы 3 из [6] все характеры множества $\{\xi_7, \xi_{14}, \xi_{28}\}$ алгебраически сопряжены, поскольку в этом множестве их $3 = [\mathbb{Q}_9 \cap \mathbb{R} : \mathbb{Q}]$. Очевидно, что $\bar{\psi}_2(\xi_7) = \xi_{14}$ и $\bar{\psi}_4(\xi_7) = \xi_{28}$.

Поле характера $\mathbb{Q}(\beta + \beta^8, \alpha)$. Применим лемму 6 этой работы и лемму 3 из [6] и получим, что все характеры множества $\{\xi_k \mid k \in R8_{63}\}$ являются алгебраически сопряжёнными, поскольку их $18 = [\mathbb{Q}(\beta+\beta^8,\alpha) : \mathbb{Q}]$. Также из таблицы характеров непосредственно следует, что для любого $k \in R8_{63}$ $\psi_k(\xi_1) = \xi_k$.

Все возможные случаи разобраны. □

4. Нахождение ранга группы центральных единиц

Теорема 2. *Ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца группы* $GL(2,8)$ *равен* 24.

Доказательство. Ранг группы центральных единиц можно вычислить по формуле из [7]:

$$\sum_{\chi \in I_{\mathbb{R}}} d_\chi + \frac{1}{2} \sum_{\chi \in I_{\mathbb{C}}} d_\chi - |I_G|,$$

где I_G — множество представителей классов алгебраически сопряжённых характеров, $I_{\mathbb{R}} = \{\chi \in I_G \mid \mathbb{Q}(\chi) \subset \mathbb{R}\}$, $I_{\mathbb{C}} = \{\chi \in I_G \mid \mathbb{Q}(\chi) \not\subset \mathbb{R}\}$, $d_\chi = [\mathbb{Q}(\chi) : \mathbb{Q}]$ — степень расширения характера $\chi \in I_G$ над полем $\mathbb{Q}$. Из теоремы 1 следует, что $|I_G| = 12$ и

$$I_G = \{\chi_0, \chi_1, \theta_0, \theta_1, \eta_{1,6}, \eta_{0,1}, \eta_{1,2}, \eta_{1,3}, \xi_{21}, \xi_7, \xi_3, \xi_1\}.$$

Как и в доказательстве теоремы 1, рассмотрим характеры по их полям характеров.

Поле характера $\mathbb{Q}$. В этом случае $\chi \in I(1) = \{\chi_0, \theta_0, \xi_{21}\} \subset I_{\mathbb{R}}$,

$$d_\chi = 1, \quad r_1 = \sum_{\chi \in I(1)} d_\chi = 3.$$

Поле характера $\mathbb{Q}_7$. Теперь $\chi \in I(6) = \{\chi_1, \theta_1, \eta_{0,1}, \eta_{1,2}, \eta_{1,3}, \xi_3\} \subset I_{\mathbb{C}}$,

$$d_\chi = 6, \quad r_6 = \frac{1}{2} \sum_{\chi \in I(6)} d_\chi = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18.$$

Для *полей характеров* $\mathbb{Q}_7 \cap \mathbb{R}$ *и* $\mathbb{Q}_9 \cap \mathbb{R}$ имеем $\chi \in I(3) = \{\eta_{1,6}, \xi_7\} \subset I_{\mathbb{R}}$ и

$$d_\chi = 3,\ r_3 = \sum_{\chi \in I(3)} d_\chi = 2 \cdot 3 = 6.$$

В случае *поля характера* $\mathbb{Q}(\beta + \beta^8, \alpha)$ имеем $\chi \in I(18) = \{\xi_1\} \subset I_{\mathbb{C}}$,

$$d_\chi = 18, \quad r_{18} = \frac{1}{2} \sum_{\chi \in I(18)} d_\chi = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9.$$

Таким образом, согласно приведённой выше формуле ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца группы $GL(2,8)$ равен 24:

$$r_1 + r_6 + r_3 + r_{18} - |I_G| = 3 + 18 + 6 + 9 - 12 = 24.$$

$\square$

Список литературы

1. **Aleev, R. Ž.** Higman's central unit theory, units of integral group rings of finite cyclic groups and Fibonacci numbers / R. Ž. Aleev // Intern. J. of Algebra and Computation. — 1994. — Vol. 4, no. 3. — P. 309–358.
2. **Алеев, Р. Ж.** Центральные единицы целочисленного группового кольца группы $GL_2(5)$ / Р. Ж. Алеев, Э. Ф. Исмагилова, Н. Г. Карлина // Алгебра и линейная оптимизация : тр. Междунар. семинара, посвящ. 90-летию со дня рождения С. Н. Черникова. — Екатеринбург : УрО РАН, 2002. — С. 12–14.
3. **Aleev, R. Zh.** Central unit group of integral group ring of GL(2,4) / R. Zh. Aleev, O. V. Mitina, A. P. Mitin // Abstracts of the International Conference and PhD Summer School. — Yekaterinburg : Ural Branch of Russian Academy of Sciences, 2015. — P. 32.
4. **Белоногов, В. А.** О малых взаимодействиях в конечных группах / В. А. Белоногов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 1992. — Т. 2. — С. 3–18.
5. **Ван дер Варден, Б. Л.** Алгебра / Б. Л. ван дер Варден. — 2-е изд. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. — 624 с.
6. **Алеев, Р. Ж.** Центральные элементы целочисленных групповых колец / Р. Ж. Алеев // Алгебра и логика. — 2000. — Т. 39, вып. 5. — С. 513–525.
7. **Алеев, Р. Ж.** Вычисление рангов групп центральных единиц целочисленных групповых колец конечных групп / Р. Ж. Алеев, Н. А. Цыбина // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Вычислит. математика и информатика. — 2015. — Т. 4, № 1. — С. 71–85.

Поступила в редакцию 26.03.2019
После переработки 30.04.2019

Сведения об авторах

Алеев Рифхат Жалялович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры компьютерной топологии и алгебры, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; профессор кафедры системного программирования, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: aleev@csu.ru, aleevrz@susu.ru.

Митина Ольга Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной топологии и алгебры, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: ovm@csu.ru.

Годова Александра Даниловна, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: sasha.godova97@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2019. Vol. 4, iss. 2. P. 129–141.

DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14201

ALGEBRAIC CONJUGACY OF IRREDUCIBLE CHARACTERS OF THE GROUP GL(2, 8)

R.Zh. Aleev[1,2,a], **O.V. Mitina**[1,b], **A.D. Godova**[1,c]

[1] *Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*

[2] *South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia*

[a] *aleev@csu.ru, aleevrz@susu.ru,* [b] *ovm@csu.ru,* [c] *sasha.godova97@mail.ru*

The structure of the tables of characters for groups GL(2,q) is known for a long time. However, with setting a specific value for q, its finding in explicit form can be very difficult because even calculating numbers, which determine the position of characters in the table, requires considerable effort. It also turns out that specific values of some characters can't be easy for calculating because of nontrivial relations between roots of 1 of various degrees. In the work a table of the characters of the group GL(2,8), construction of which demonstrated the difficulties above, is presented explicitly. In particular, there are discovered interesting connections between the roots of 1 degree 21. Algebraic conjugacy of the characters of the group GL(2,8) is fully defined, which allowed to calculate the rank of the group of central units of the integral group ring of this group.

Keywords: *character, table of characters, group ring, central unit of the group ring, rank of the group of central units.*

References

1. **Aleev R.Ž.** Higman's central unit theory, units of integral group rings of finite cyclic groups and Fibonacci numbers. *International Journal of Algebra and Computation*, 1994, vol. 4, no. 3, pp. 309–358.
2. **Aleev R.Zh., Ismagilova E.F., Karlina N.G.** Tsentral'nye edinitsy tselochislennogo gruppovogo kol'tsa gruppy $GL_2(5)$ [Central units of an integral group ring of the group $GL_2(5)$]. *Algebra i lineynaya optimizatsiya* [Algebra and linear optimization]. Yekaterinburg, Ural Branch of Russian Academy of Sciences, 2002. Pp. 12–14. (In Russ.).
3. **Aleev R.Zh., Mitina O.V., Mitin A.P.** Central Unit Group of integral Group Ring of $GL(2,4)$. *Abstracts of the International Conference and PhD Summer School*, Yekaterinburg, Ural Branch of Russian Academy of Sciences, 2015. P. 32.
4. **Belonogov V.A.** O malykh vzaimodeystviyakh v konechnykh gruppakh [On small interactions in finite groups]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Sciences], 1992, vol. 2, pp. 3–18. (In Russ.).
5. **Van der Varden B.L.** *Algebra* [Algebra] 2nd ed. Moscow, Nauka Publ., 1979. 624 p. (In Russ.).
6. **Aleev R.Zh.** Central elements of integral group rings. *Algebra and Logic*. 2000. Vol. 39, no. 5. p. 293–300.
7. **Aleev R.Ž., Tsybina N.A.** Vychisleniye rangov grupp tsentral'nykh edinits tselochislennykh gruppovykh kolets konechnykh grupp [Computing ranks of groups of central units of integral group rings of finite groups]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Vychislitel'naya matematika i informatika* [Bulletin of South Urala State University. Series: Computational mathematics and informatics], 2015, vol. 4, no. 1, pp. 71–85. (In Russ.).

Accepted article received 26.03.2019
Corrections received 30.04.2019