

СТРУКТУРА ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ГЕТЕРОГЕННОЙ СМЕСИ ДВУХ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ГАЗОВ С ВЯЗКОСТЬЮ

С. М. Воронин^{1,a}, В. А. Адарченко^{2,b}, А. В. Панов^{1,c}

¹Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

²РФЯЦ-ВНИИТФ имени академика Е. И. Забабахина, Снежинск, Россия

^avoron@csu.ru, ^bv.a.adarchenko@vniitf.ru, ^cpan@csu.ru

Исследована задача о структуре фронта ударной волны в гетерогенной смеси двух вязких газов при наличии сил парного взаимодействия. В использовавшейся физической модели смеси предполагались изотермические уравнения состояния обоих компонентов и парное взаимодействие посредством обмена импульса между ними. Сила обменного взаимодействия считалась линейной по разности скоростей компонентов. Путем анализа предельного перехода к модели без вязкости в рамках теории быстро-медленных систем обоснован способ построения решений с разрывами для идеальных газов. Отмечено, что в этом предельном случае возможны четыре типа ударных волн с различной структурой фронта. Для каждого из четырех типов приведены результаты численных расчетов структуры фронта ударной волны.

Ключевые слова: ударная волна, структура фронта, гетерогенная смесь, парное взаимодействие, изотермический газ.

1. Введение

Построение аналитических решений задачи о поршне для различных моделей гетерогенных сред позволяет качественно понять закономерности взаимодействия компонентов смеси на фронте ударной волны. Знание структуры фронта ударной волны в многокомпонентных средах необходимо при решении важных практических задач. В качестве примера можно указать на актуальную проблему сепарации компонентов дейтерий-третиевого топлива в мишенях инерциального термоядерного синтеза [1].

Вопросу о структуре фронта ударных волн в смесях было посвящено большое число монографий и статей отечественных и зарубежных авторов, в которых данная задача решалась в различных газодинамических и кинетических приближениях (см., например, [2–8] и библиографию в них).

При исследовании фронта ударных волн решение системы, как правило, ищут в виде стационарной бегущей волны. Это позволяет перейти в одномерном случае от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ). Значения искомых функций в стационарных состояниях перед и за фронтом ударной волны оказываются связанными через первый интеграл системы ОДУ. Задача сводится к нахождению интегральной кривой, соединяющей в фазовом пространстве независимых переменных две точки, соответствующие стационарным состояниям. В моделях без учёта вязкости при определённых значениях

параметров задачи возникают конфигурации, при которых всякая кривая, проведённая от начальной точки к конечной, проходит через особые точки системы ОДУ, так что краевая задача не имеет непрерывных решений. В этом случае применяют искусственный прием построения разрывного решения. Краевую задачу формулируют лишь для отрезка интегральной кривой, не содержащего особых точек. Выбор новых краевых условий однозначно определяется из требований монотонности профилей величин в ударной волне с учётом первого интеграла системы ОДУ. Замена краевых условий интерпретируется как разрывы в профилях функций в ударной волне.

В данной работе рассмотрен вопрос о структуре фронта ударной волны в модели с парным взаимодействием компонентов [9] смеси двух изотермических газов с вязкостью. С помощью теории динамических систем в приложении к быстро-медленным системам обоснован метод построения решений с разрывами для течений жидкостей без вязкости.

2. Физическая модель смеси

Система уравнений, описывающая течение гетерогенной смеси изотермических вязких газов с учётом парного взаимодействия, имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_1 + \partial_x (\rho_1 u_1) &= 0, \\ \partial_t (\rho_1 u_1) + \partial_x (\rho_1 (u_1^2 + c_1^2) - \mu_1 \partial_x u_1) &= \tau^{-1} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (u_2 - u_1), \\ \partial_t \rho_2 + \partial_x (\rho_2 u_2) &= 0, \\ \partial_t (\rho_2 u_2) + \partial_x (\rho_2 (u_2^2 + c_2^2) - \mu_2 \partial_x u_2) &= \tau^{-1} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (u_1 - u_2), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где ρ_1, ρ_2 — парциальные плотности компонентов, u_1, u_2 — их скорости. При записи системы учтено, что изотермические уравнения состояния газов имеют вид $P_i = c_i^2 \hat{\rho}_i$, а парциальные ρ_i и физические $\hat{\rho}_i$ плотности связаны через объёмные концентрации α_i соотношениями $\rho_i = \alpha_i \hat{\rho}_i$, $i = 1, 2$. Благодаря использованию изотермического уравнения состояния компонентов в систему уравнений объёмные концентрации входят только в комбинации с истинными плотностями. Параметр τ — характерное время парного взаимодействия компонентов. Выражение для силы парного взаимодействия выбрано в виде

$$R_{12} = \frac{1}{\tau} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (u_2 - u_1).$$

Аналогичная система рассматривалась в [9], но без учёта вязкости μ_i , $i = 1, 2$.

3. Система уравнений для ударной волны

Частное решение системы уравнений ищется в виде бегущей волны:

$$u_i(x, t) = \tilde{u}_i(z) + D, \quad \rho_i(x, t) = \tilde{\rho}_i(z), \quad z = x - Dt, \quad i = 1, 2.$$

Параметр D имеет смысл скорости бегущей волны, а \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 — скорости компонентов в системе отсчёта, сопутствующей волне. При таком выборе вида решения исходная система сводится к системе четырёх обыкновенных дифференциальных уравнений, два из которых сразу интегрируются:

$$\tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1 = -\rho_1^0 D,$$

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_2 \tilde{u}_2 &= -\rho_2^0 D, \\ (\tilde{\rho}_1(c_1^2 + \tilde{u}_1^2) - \mu_1 \tilde{u}_1')' &= \frac{1}{\tau} \frac{\tilde{\rho}_1 \tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2} (\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1), \\ (\tilde{\rho}_2(c_2^2 + \tilde{u}_2^2) - \mu_2 \tilde{u}_2')' &= \frac{1}{\tau} \frac{\tilde{\rho}_1 \tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2} (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2).\end{aligned}$$

Первые два соотношения выражают законы сохранения массы в предположении, что вещество перед волной в лабораторной системе отсчёта покоится, а парциальные плотности компонентов в этой области равны ρ_1^0, ρ_2^0 . Используя эти соотношения, из оставшихся двух уравнений можно исключить плотности компонентов. Удобно ввести безразмерные скорости компонентов U_1, U_2 и волны M , выбрав в качестве характерной величины скорость звука первого компонента. Без ограничения общности можно считать, что она меньше скорости звука второго компонента $c_1 < c_2$. Система обыкновенных дифференциальных уравнений в безразмерных переменных относительно скоростей компонентов примет вид

$$\begin{aligned}\left(M \left(U_1 + \frac{1}{U_1}\right) + \nu_1 U_1'\right)' &= k\beta M \frac{U_2 - U_1}{U_2 + \beta U_1}, \\ \left(\beta M \left(U_2 + \frac{\alpha^2}{U_2}\right) + \nu_2 U_2'\right)' &= k\beta M \frac{U_1 - U_2}{U_2 + \beta U_1}.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\beta = \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0}, \quad \alpha = \frac{c_2}{c_1}, \quad k = \frac{1}{c_1 \tau}, \quad \nu_i = \frac{\mu_i}{\rho_1^0 c_1}, \quad i = 1, 2.$$

Штрих означает производную по z . Эта система может быть разрешена относительно производных:

$$\begin{aligned}U_1' &= P, \\ U_2' &= Q, \\ \nu_1 P' &= k\beta M \frac{U_2 - U_1}{U_2 + \beta U_1} - M \left(1 - \frac{1}{U_1^2}\right) P, \\ \nu_2 Q' &= k\beta M \frac{U_1 - U_2}{U_2 + \beta U_1} - \beta M \left(1 - \frac{\alpha^2}{U_2^2}\right) Q.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Система (3.2) обладает первым интегралом

$$M \left(U_1 + \frac{1}{U_1}\right) + \beta M \left(U_2 + \frac{\alpha^2}{U_2}\right) + \nu_1 P + \nu_2 Q + 1 + M^2 + \beta(\alpha^2 + M^2) = 0. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) определяет равновесные состояния системы перед и за фронтом ударной волны. Если скорости компонентов равны, а течение однородно ($P = Q = 0$), (3.4) имеет два решения:

$$U_1 = U_2 = -M, \quad P = Q = 0, \quad (3.5)$$

$$U_1 = U_2 = -\frac{1 + \beta\alpha^2}{M(1 + \beta)}, \quad P = Q = 0. \quad (3.6)$$

Решение (3.5) соответствует состоянию покоя перед фронтом волны в лабораторной системе отсчёта. Состояние (3.6) описывает равновесие за фронтом волны. Для системы (3.3) обе эти точки являются особыми.

Таким образом, задача о структуре фронта ударной волны свелась к построению решения (3.3), выходящего из особой точки (3.6) и приходящего в особую точку (3.5).

4. Решение для ударной волны с разрывами при нулевой вязкости

Решение задачи о структуре ударной волны для модели (2.1) без вязкости было получено в работе [9]. Здесь мы повторим результат этой работы в принятых нами обозначениях. На примере этой задачи продемонстрируем общепринятый подход к построению разрывных решений для ударных волн в смесях.

Рассмотрим систему уравнений (3.3) и закон сохранения (3.4) для случая нулевой вязкости компонентов $\nu_1 = \nu_2 = 0$:

$$\begin{aligned} U_1' &= \beta k \frac{U_1^2}{U_2 + \beta U_1} \frac{U_2 - U_1}{1 - U_1^2}, \\ U_2' &= k \frac{U_2^2}{U_2 + \beta U_1} \frac{U_1 - U_2}{\alpha^2 - U_2^2}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$U_1 + \frac{1}{U_1} + \beta \left(U_2 + \frac{\alpha^2}{U_2} \right) + M + \frac{1}{M} + \beta \left(M + \frac{\alpha^2}{M} \right) = 0. \quad (4.2)$$

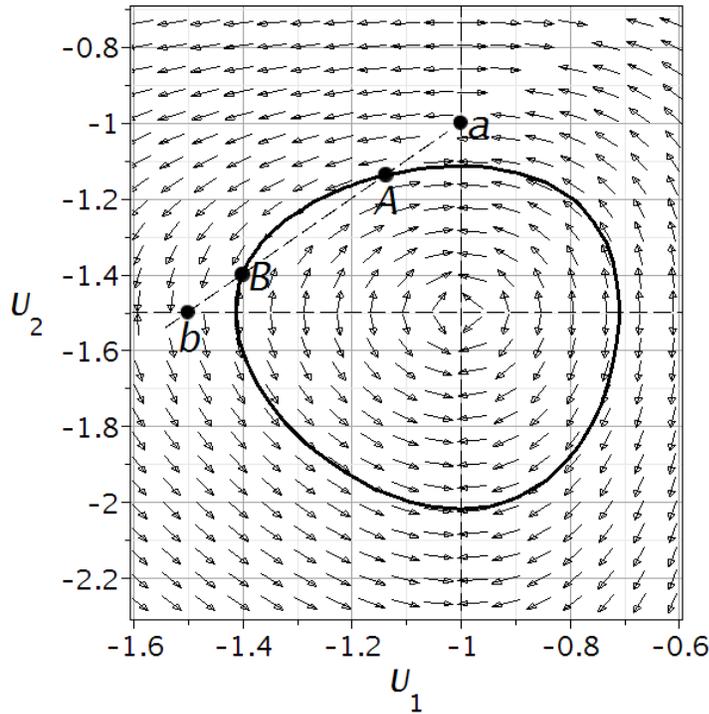


Рис. 1. Взаимное расположение закона сохранения (сплошная линия) и линий особых точек (пунктир), соответствующее дисперсной ударной волне ($\alpha = 1.5, \beta = 0.9, M = 1.4, k = 1$). Стрелками на графике изображено векторное поле системы (4.1)

$-1, U_2 = -\alpha$ с прямой $U_1 = U_2$. В зависимости от значений параметров M, α, β могут существовать четыре различных варианта взаимного расположения точек A, B, a, b на прямой $U_1 = U_2$, которые соответствуют четырём типам структур фронта ударной волны в смеси.

При выполнении неравенств

$$\begin{cases} M < \alpha, \\ M < \frac{1 + \beta\alpha^2}{1 + \beta} \end{cases} \quad (4.3)$$

Качественный анализ задачи о структуре фронта ударной волны в смеси удобно проводить на плоскости годографа (U_1, U_2) . Закон сохранения (4.2) описывает в этой плоскости замкнутую кривую. Взаимное расположение этой кривой и линий особых точек системы $U_1 = -1, U_2 = -\alpha$ определяет тип волны, возникающей при заданном наборе параметров M, α, β . В поставленной задаче скорости компонентов могут принимать только отрицательные значения, поэтому при анализе взаимного расположения кривых следует ограничиться третьим квадрантом плоскости.

Обозначим через A и B точки пересечения прямой особых точек $U_1 = U_2$ с законом сохранения (4.2), а через a и b — точки пересечения прямых $U_1 =$

точки a, b лежат вне отрезка $[A, B]$. В этом случае на плоскости годографа существует единственная непрерывная траектория, соединяющая начальную и конечную равновесные точки. Этот случай соответствует так называемой дисперсной ударной волне [10], в которой все величины в обоих компонентах изменяются непрерывно. Пример такого взаиморасположения кривой закона сохранения (4.2) и линий особых точек приведён на рис. 1 для набора параметров $\alpha = 1.5$, $\beta = 0.9$, $M = 1.4$, удовлетворяющих неравенствам (4.3). На рис. 2 построены профили скоростей в дисперсной волне.

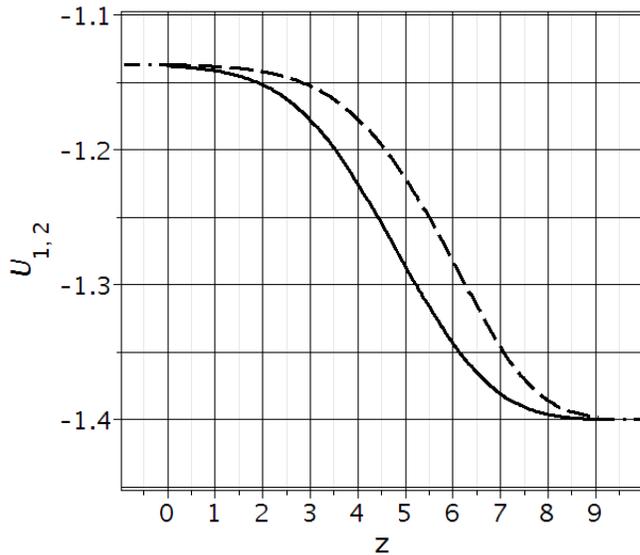


Рис. 2. Профили скоростей в дисперсной волне ($\alpha = 1.5$, $\beta = 0.9$, $M = 1.4$, $k = 1$). Сплошная и пунктирная линия соответствуют первому и второму компонентам

Неравенству (4.4) отвечает разрыв в первом компоненте, а неравенству (4.5) — разрыв во втором компоненте.

Направление движения от A к B вдоль закона сохранения определяется предположением о монотонности изменения величин в ударной волне. Тогда связь скоростей перед и за разрывом в этих случаях однозначно определяется законом сохранения (4.2). При выполнении неравенства (4.4) траектория изображающей точки начинается в равновесном положении A (3.6), затем скачком переходит в положение $A' = \left(-\frac{M(1+\beta)}{1+\beta\alpha^2}, -\frac{1+\beta\alpha^2}{M(1+\beta)}\right)$ (разрыв в первом компоненте), после чего следует непрерывно в конечную точку B вдоль закона сохранения. Описанный переход иллюстрируется рисунками 4 и 6, на котором графики построены для значений параметров $\alpha = 1.5$, $\beta = 0.2$, $M = 1.4$. При выполнении неравенства (4.5) траектория изображающей точки из положения A непрерывно следует вдоль закона сохранения до точки

$$B' = \left(-M, -\frac{\alpha^2}{M}\right),$$

где изображающая точка скачком переходит в конечную точку B (3.5), как показано на рис. 3 ($\alpha = 1.5$, $\beta = 2$, $M = 1.6$). Профили скоростей для этого случая построены на рис. 5.

Наконец, если справедливо неравенство

$$\begin{cases} M > \alpha, \\ M > \frac{1 + \beta\alpha^2}{1 + \beta}, \end{cases} \quad (4.6)$$

Если выполнено неравенство

$$\begin{cases} M < \alpha, \\ M > \frac{1 + \beta\alpha^2}{1 + \beta}, \end{cases} \quad (4.4)$$

либо неравенство

$$\begin{cases} M > \alpha, \\ M < \frac{1 + \beta\alpha^2}{1 + \beta}, \end{cases} \quad (4.5)$$

то одна из общих точек линий $U_1 = -1$, $U_2 = -\alpha$, лежит внутри, а другая вне отрезка $[A, B]$ (см. рис. 3 и 4). При этих условиях непрерывный переход из точки A в B вдоль закона сохранения оказывается невозможным. Реализуется конфигурация с разрывом в одном из компо-

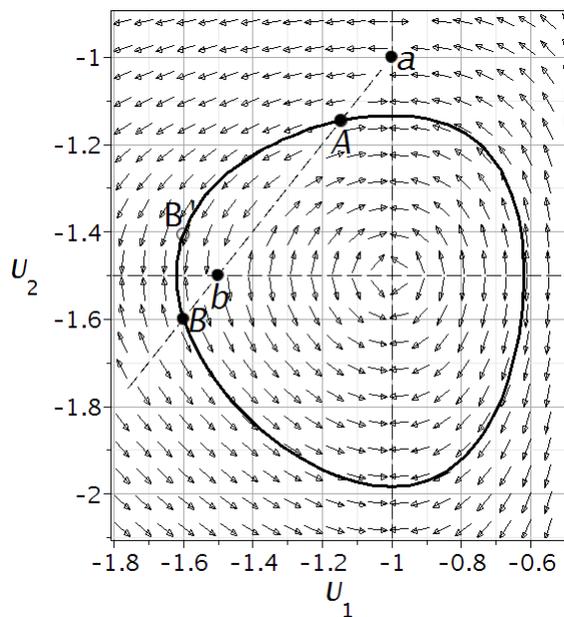


Рис. 3. Взаимное расположение закона сохранения (сплошная линия) и линий особых точек (пунктир), соответствующее ударной волне с разрывом во втором компоненте ($\alpha = 1.5, \beta = 2, M = 1.6, k = 1$). Стрелками на графике изображено векторное поле системы (4.1)

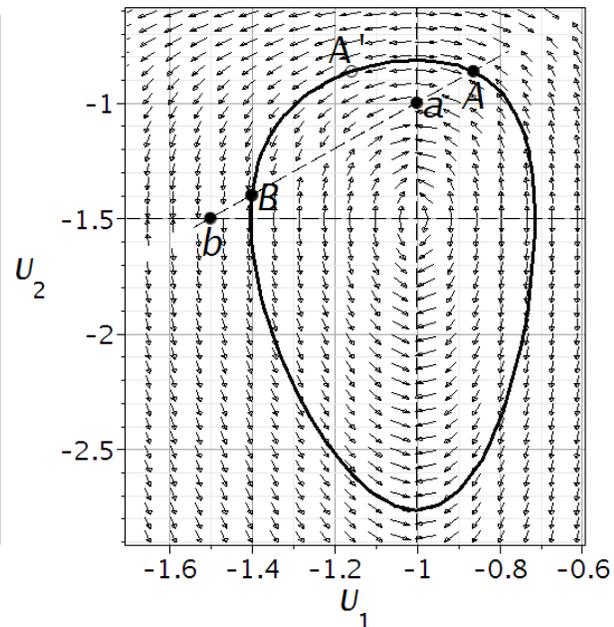


Рис. 4. Взаимное расположение закона сохранения (сплошная линия) и линий особых точек (пунктир), соответствующее ударной волне с разрывом в первом компоненте ($\alpha = 1.5, \beta = 0.2, M = 1.4, k = 1$). Стрелками на графике изображено векторное поле системы (4.1)

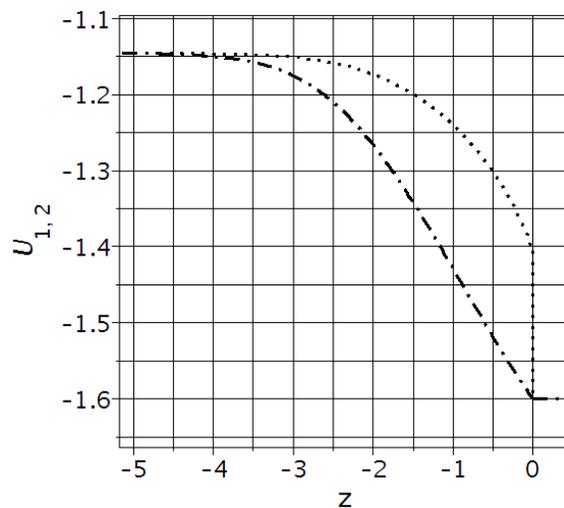


Рис. 5. Профили скоростей в ударной волне с разрывом во втором компоненте ($\alpha = 1.5, \beta = 2, M = 1.6, k = 1$). Штрих-пунктирная линия и линия из точек соответствуют первому и второму компонентам

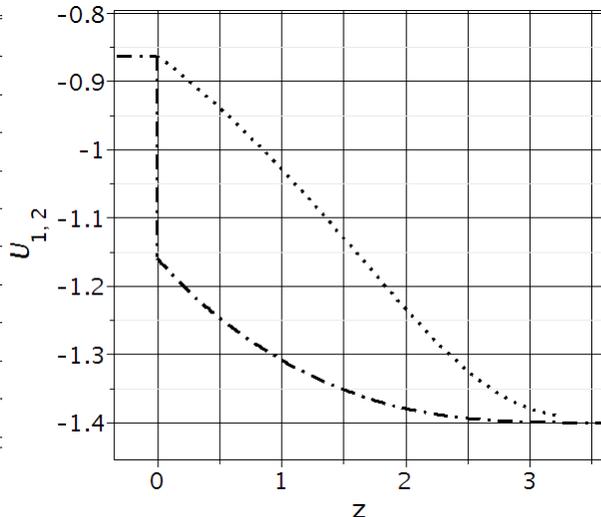


Рис. 6. Профили скоростей в ударной волне с разрывом в первом компоненте ($\alpha = 1.5, \beta = 2, M = 1.6, k = 1$). Штрих-пунктирная линия и линия из точек соответствуют первому и второму компонентам

обе точки a, b лежат внутри отрезка $[A, B]$. В этом случае переход из начального состояния в конечное возможен, если допустить существование двух разрывов с переходом из A в A' и из B' в B (см. рис. 7 и 8 для набора параметров $\alpha = 1.5, \beta = 1.2, M = 2$). Обосновать описанный способ построения решений с разрывами для уравнений (4.1) можно используя теорию быстро-медленных систем, применительно к исходной системе (3.3) с вязкостью. Схема доказательства существования разрывных решений для медленной системы (4.1) приведена в следующем разделе.

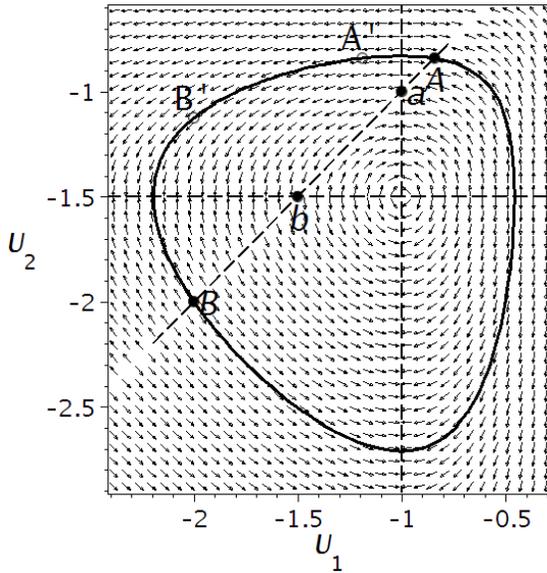


Рис. 7. Профили скоростей в ударной волне с двумя разрывами ($\alpha = 1.5$, $\beta = 1.2$, $M = 2$, $k = 1$). Штрих-пунктирная линия и линия из точек соответствуют первому и второму компонентам

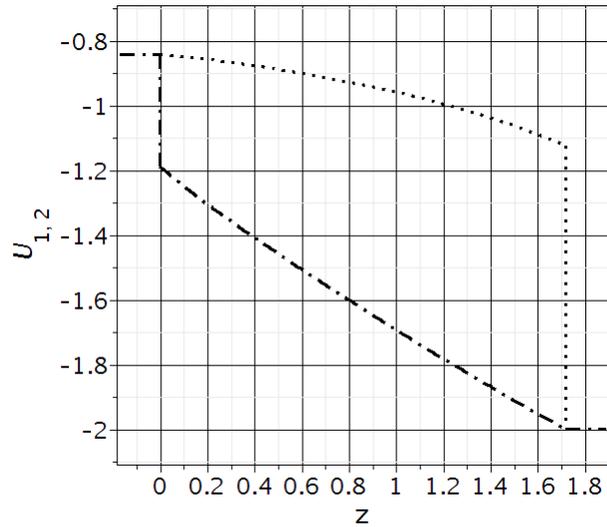


Рис. 8. Профили скоростей в ударной волне с разрывом в первом компоненте ($\alpha = 1.5$, $\beta = 2$, $M = 1.6$, $k = 1$). Штрих-пунктирная линия и линия из точек соответствуют первому и второму компонентам

5. Качественный анализ

5.1. Качественный анализ системы уравнений с вязкостью

Очевидно, что формальное решение системы уравнений без вязкости (4.1), состоящее из нескольких компонент связности и соединяющее точки (3.5) и (3.6), не имеет физического смысла. Профили скоростей $U_1(z)$ и $U_2(z)$ для такого решения не будут являться функциями. Поэтому для обоснования существования разрывных решений системы (4.1) необходим анализ предельного перехода решений (3.3) к решениям (4.1) при вязкости, стремящейся к нулю.

Для качественного анализа системы (3.3) при малых положительных значениях вязкости используем стандартную технику исследования быстро-медленных систем [11]. В дальнейшем условимся называть независимую переменную z «временем»

Пусть $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Наряду со временем z будем рассматривать быстрое время $t = z/\nu$. Точкой обозначим дифференцирование по t . Система (3.3), записанная для быстрого времени, примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \nu P, & \dot{U}_2 &= \nu Q, \\ \dot{P} &= k\beta M \frac{U_2 - U_1}{U_2 + \beta U_1} - M \left(1 - \frac{1}{U_1^2}\right) P, \\ \dot{Q} &= k\beta M \frac{U_1 - U_2}{U_2 + \beta U_1} - \beta M \left(1 - \frac{\alpha^2}{U_2^2}\right) Q. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Она имеет тот же первый интеграл, что и система (3.3). Устремим ν к нулю; получим так называемую «быструю» систему

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= 0, & \dot{U}_2 &= 0, \\ \dot{P} &= k\beta M \frac{U_2 - U_1}{U_2 + \beta U_1} - M \left(1 - \frac{1}{U_1^2}\right) P, \\ \dot{Q} &= k\beta M \frac{U_1 - U_2}{U_2 + \beta U_1} - \beta M \left(1 - \frac{\alpha^2}{U_2^2}\right) Q. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Соответственно, полагая $\nu = 0$ в (3.3), получим «медленную» систему (4.1).

Для быстро-медленных систем, каковой является система (3.3) при малых ν , характерен следующий факт: траектории, составленные из отрезков траекторий быстрой и медленной систем, хорошо аппроксимируют траектории быстро-медленной системы [11]. Ниже мы попытаемся установить аналогичное утверждение для системы (3.3) в наиболее сложном случае двух разрывов.

5.2. Быстрая система

Решая первые два уравнения системы (5.2), получим $U_1 = U_1^0$, $U_2 = U_2^0$. Точка (U_1^0, U_2^0) лежит на кривой Γ , заданной законом сохранения (4.2). Два оставшихся уравнения образуют линейную неоднородную систему, которая также может быть решена явно. Особые точки системы (5.2), суженной на поверхность $\Gamma \times \mathbb{R}^2$, лежат на некоторой кривой Γ^* . Эта кривая представляет собой так называемое медленное многообразие.

В зависимости от положения точки (U_1^0, U_2^0) особая точка суженной системы (5.2) на PQ -плоскость есть

- 1) при $-1 < U_1^0 < 0$, $-\alpha < U_2^0 < 0$ неустойчивый узел;
- 2) при $-1 < U_1^0 < 0$, $-\alpha > U_2^0$ седло;
- 3) при $-1 > U_1^0$, $-\alpha < U_2^0 < 0$ седло;
- 4) при $-1 > U_1^0$, $-\alpha > U_2^0$ устойчивый узел.

Таким образом, медленное многообразие Γ^* состоит из четырёх компонент связности. Они лежат над соответствующими областями 1), 2), 3), 4) участками кривой. Только четвёртая из этих компонент устойчива. Отсюда следует, что стандартная техника теории быстро-медленных систем не может гарантировать существование траекторий, идущих из особой точки (3.6) (на компоненте связности 1)) в особую точку (3.5) (лежащую на компоненте связности 4)).

5.3. Инвариантные подмногообразия быстро-медленной системы

Для быстрой системы (5.1) особыми точками являются все точки прямой $U_1 = U_2$, $P = Q = 0$ и только они (для её сужения на поверхность (3.4) — это точки (3.5) и (3.6)). В одной из особых точек системы можно найти собственные значения матрицы её линейной части. Выкладки показывают, что при малых положительных ν все эти собственные значения λ_i , $i = 0, 1, 2, 3$, вещественны. Для собственных значений и векторов справедливо следующее:

1. $\lambda_0 = 0$; соответствующий λ_0 собственный вектор направлен вдоль прямой особых точек;
2. $\lambda_1 = \lambda_p + O(\nu)$; собственный вектор e_1 близок к вектору $\frac{d}{dp}$;
3. $\lambda_2 = \lambda_q + O(\nu)$; соответствующий собственный вектор e_2 близок к вектору $\frac{d}{dq}$;
4. $\lambda_3 = O(\nu)$, т. е. собственный вектор e_3 близок к вектору, лежащему в плоскости $P = Q = 0$ и касательному к Γ .

Для точки (3.6) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, а для точки (3.5) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 > 0$. По теореме Адамара — Перрона в окрестности особой точки (3.5) существует аналитическое инвариантное для сужения (5.1) на (3.4) неустойчивое многообразие M_{loc}^u , касающееся в точке (3.6) векторов e_1 , e_2 . Продолжим его, то есть рассмотрим объединение всех фазовых кривых с начальными точками на M_{loc}^u . Получим двумерное неустойчивое многообразие M^u . Аналогично для особой точки (3.5) построим двумерное устойчивое многообразие M^s . Два двумерных подмногообразия

трехмерного многообразия, заданного уравнением (3.4), вообще говоря, пересекаются по некоторому одномерному подмногообразию $\gamma = M^u \cap M^s$. Это одномерное подмногообразие и даёт фазовую кривую, выходящую из особой точки (3.6) и входящую в особую точку (3.5).

5.4. Локализация кривой Γ

Можно показать, что в области 1 имеют место неравенства $0 < \lambda_p < \lambda_q$. Это означает, что переменная Q растёт существенно быстрее переменной P , за исключением случаев специального выбора направлений выхода из особой точки. Следовательно, траектория изображающей точки быстро уходит на бесконечность вдоль оси Q . Исключительным в окрестности особой точки (3.6) является направление $\frac{d}{dp}$, вдоль которого происходит экспоненциальный рост переменной P .

Аналогичная картина имеет место в окрестности точки (3.5). При обращении времени все траектории системы (5.2), кроме сепаратрисной, соответствующей вектору $\frac{d}{dq}$, быстро уходят на бесконечность вдоль координаты P . Поэтому для гипотетической траектории γ возможна лишь следующая конфигурация. Траектория изображающей точки выходит из особой точки (3.6) вдоль направления $\frac{d}{dp}$; при этом существенен рост по модулю переменной P , а Q изменяется незначительно. В соответствии с первыми двумя уравнениями системы (5.1) скорость первого компонента U_1 будет изменяться значительно быстрее скорости второго компонента U_2 . В результате проекция траектории на плоскость годографа окажется почти горизонтальной. Когда траектория точки окажется в области 3, переменная P резко уменьшится. В результате обе переменные P и Q станут в некотором смысле не очень большими: их вклад в уравнение (3.4) окажется незначительным, так что проекция траектории γ на плоскость годографа будет близка к Γ . Те же рассуждения для обращённого времени приводят к заключению, что конечным участком траектории γ окажется кривая, проекция которой на плоскость (U_1, U_2) будет почти вертикальным отрезком.

5.5. Заключительные замечания

Проведённый выше качественный анализ, безусловно, не является доказательством существования траектории, соответствующей эмпирически построенному профилю ударной волны с двумя разрывами. Однако этот предварительный анализ говорит в пользу возможности поиска решений такого типа. Рассмотренная выше схема рассуждений даёт эскиз теоремы существования и единственности траекторий для систем с малой вязкостью.

6. Некоторые примеры численных расчётов

Для системы уравнений (3.3) эмпирически было установлено, что построить траектории, соединяющие точки (3.5) и (3.6), можно за счёт специального подбора соотношений между коэффициентами вязкости ν_1 и ν_2 .

На рис. 9 на плоскости годографа построены траектории изображающей точки для набора параметров $\alpha = 1.5$, $\beta = 2.00$, $M = 1.6$, $k = 0.01$, $\nu_1 = 0$. Трём траекториям, идущим из особой точки (3.5) в (3.6), соответствуют значения вязкости во втором компоненте $\nu_2 = 1, 10$ и 40 . Видно, что с уменьшением вязкости траектория изображающей точки стремится к разрывной траектории, построенной для системы без вязкости. На рис. 10 сравниваются профили скоростей для системы без вязкости (4.1) и системы (3.3) для $\nu_1 = 0$ и $\nu_2 = 1$. Уже при значении коэффициен-

та вязкости во втором компоненте $\nu_2 = 1$, вязкий профиль скоростей оказывается близок к разрывным решениям системы без вязкости.

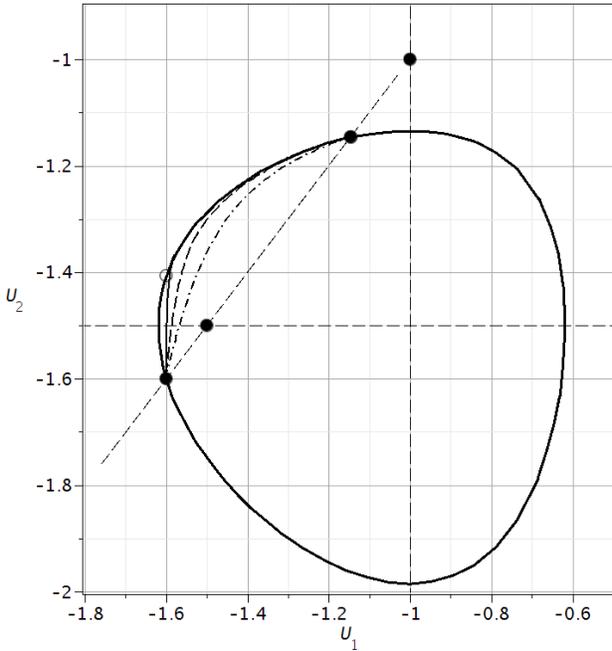


Рис. 9. Взаимное расположение закона сохранения для системы (4.1) без вязкости (сплошная линия) и траекторий для решений системы (3.3) с различными значениями вязкости $\nu_2 = 1, 10, 40$ (сплошная линия, штрих-пунктир и точки). Значения параметров в уравнениях $\alpha = 1.5, \beta = 2, M = 1.6, k = 0.01$ соответствуют решениям системы (4.1) с разрывом во втором компоненте

Аналогичные графики построены на рис. 11 и 12 при значениях параметров $\alpha = 1.5, \beta = 0.2, M = 1.4, k = 0.01, \nu_2 = 0, \nu_1 = 1, 10, 40$ для случая, когда разрыв в профиле скорости при нулевой вязкости возникает в первом компоненте.

Наконец, на рис. 13 построена траектория изображающей точки для набора параметров $\alpha = 1.5, \beta = 2.00, M = 2, k = 0.01$, соответствующих гипотетической волне с двумя разрывами. Данная траектория, как было отмечено в разделе 5, крайне чувствительна к начальным значениям переменных. Для её построения вязкости были взяты равными $\nu_1 = \nu_2 = 1$, а начальные значения переменных определены как

$$U_2 = -\frac{1 + \beta\alpha^2}{M(1 + \beta)},$$

$$U_1 = -\frac{1 + \beta\alpha^2}{M(1 + \beta)} - \epsilon,$$

$$Q = -kU_2^2 \frac{U_1 - U_2}{(U_2^2 - \alpha^2)(U_2 + \beta U_1)} - \delta.$$

P определялась из закона сохранения (4.4). Величины $\epsilon = 0.01\delta = 0.000719$ задавали смещение начальной точки из положения равновесия.

7. Выводы

Таким образом, в работе исследована структура фронта ударной волны в гетерогенной смеси вязких изотермических газов. Рассмотрен предложенный в [9]

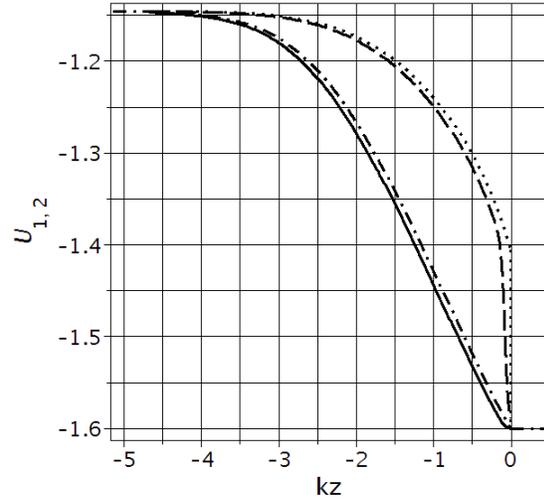


Рис. 10. Профили скоростей в ударной волне с разрывом во втором компоненте при значениях параметров $\alpha = 1.5, \beta = 2, M = 1.6, k = 0.01$. Штрих-пунктиром и точками построены профили скоростей первого и второго компонента для системы (4.1) без вязкости. Сплошной линии и пунктиру соответствуют профили скоростей 1-го и 2-го компонентов в ударной волне для системы (3.3) при значениях $\nu_1 = 0$ и $\nu_2 = 1$. По оси абсцисс отложено значение независимой переменной z в безразмерных единицах kz

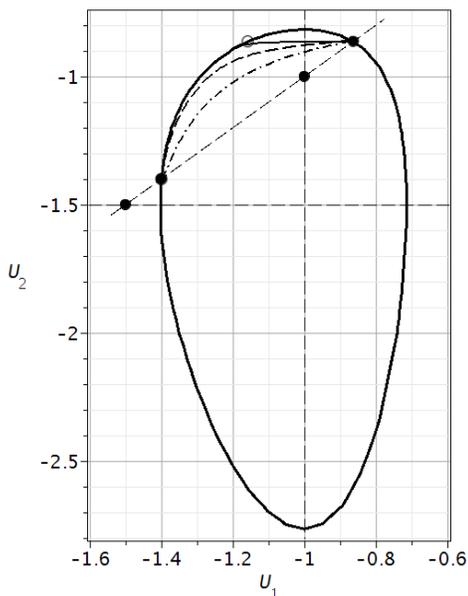


Рис. 11. Взаимное расположение закона сохранения для системы (4.1) без вязкости (сплошная линия) и траекторий для решений системы (3.3) с различными значениями вязкости $\nu_1 = 1, 10, 40$ (сплошная линия, штрих-пунктир и точки). Значения параметров в уравнениях $\alpha = 1.5, \beta = 2, M = 1.6, k = 0.01$ соответствуют решениям системы (4.1) с разрывом в первом компоненте

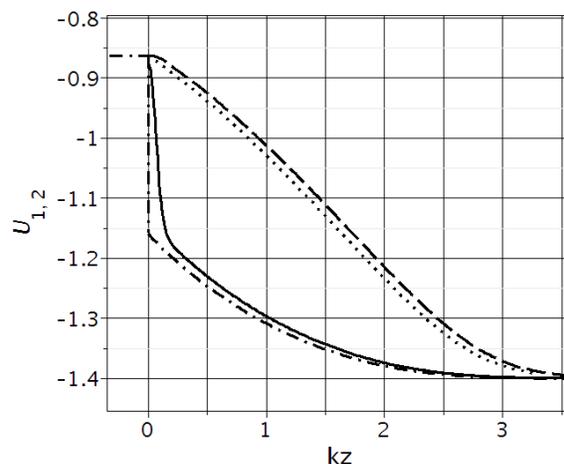


Рис. 12. Профили скоростей в ударной волне с разрывом во втором компоненте при значениях параметров $\alpha = 1.5, \beta = 0.2, M = 1.4, k = 0.01$. Штрих-пунктиром и точками построены профили скоростей первого и второго компонента для системы (4.1) без вязкости. Сплошной линией и пунктиру соответствуют профили скоростей 1-го и 2-го компонентов в ударной волне для системы (3.3) при значениях $\nu_2 = 0$ и $\nu_1 = 1$. По оси абсцисс отложено значение независимой переменной z в безразмерных единицах kz

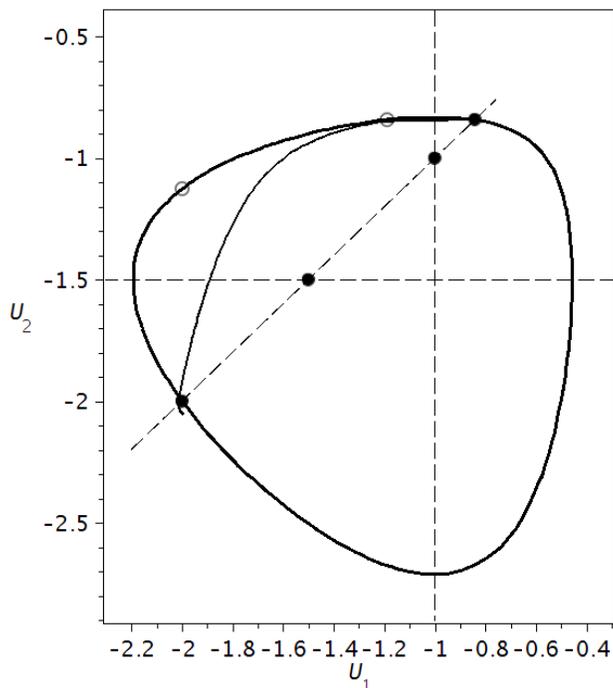


Рис. 13. Взаимное расположение закона сохранения для системы (4.1) без вязкости (сплошная линия) и траектории для решения системы (3.3) со значениями вязкости $\nu_1 = \nu_2 = 1$. Значения параметров в уравнениях $\alpha = 1.5, \beta = 2, M = 2, k = 0.01$ соответствуют решениям системы (4.1) с двумя разрывами

метод построения разрывных решений для системы без учёта вязкости. Отмечено, что формальное решение системы уравнений без вязкости при исходных краевых условиях не всегда возможно. В этих случаях метод [9] допускает их замену, что интерпретируется как разрывы в профилях величин в ударной волне. Новые краевые условия, вообще говоря, не следуют из исходной физической постановки задачи. Их выбор предполагает монотонность профилей величин в ударной волне. В данной работе приведены аргументы в пользу возможности использования такого способа построения разрывных решений. На основе теории быстро-медленных систем построена схема доказательства существования разрывных монотонных решений. Замену краевых условий можно обосновать, если показать, что решения медленной системы без вязкости аппроксимируют решения быстро-медленной системы уравнений при малой вязкости. Приведены примеры численных расчётов структуры фронта ударной волны для системы уравнений с учётом вязкости. Отмечено, что при уменьшении вязкости полученные решения приближаются к решениям системы уравнений без вязкости, построенным по методу, предложенному в [9].

Список литературы

1. Species separation in inertial confinement fusion fuels / C. Bellei, P. A. Amendt, S. C. Wilks [et al.] // *Physics of Plasmas*. — 2013. — Vol. 20. — P. 012701.
2. **Sherman, F. S.** Shock-wave structure in binary mixtures of chemically inert perfect gases / F. S. Sherman // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1960. — Vol. 8, no. 3. — P. 465–480.
3. **Goldman, E.** The structure of shock-waves in gas mixtures / E. Goldman, L. Sirovich // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1969. — Vol. 35, no. 3. — P. 575–597.
4. **Руев, Г. А.** Структура ударной волны в смесях газов / Г. А. Руев, В. М. Фомин, Н. Н. Яненко // *Докл. АН СССР*. — 1981. — Т. 261, № 2. — С. 285–290.
5. **Буряков, О. В.** Распространение волны разрежения и ударной волны в гетерогенной смеси двух изотермических газов / О. В. Буряков, В. Ф. Куропатенко // *Вопр. атом. науки и техники. Сер. Методики и программы числ. решения задач мат. физики*. — 1981. — Вып. 2 (8). — С. 3–7.
6. **Казаков, Ю. В.** Структура изотермических ударных волн в газовзвесах / Ю. В. Казаков, А. В. Федоров, В. М. Фомин // *Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи: сб. ст.* — М. : Наука, 1987. — С. 108–115.
7. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах / С. П. Киселев, Г. А. Руев, А. П. Трунев, В. М. Фомин, М. Ш. Шавалиев. — Новосибирск : Наука, 1992. — 261 с.
8. **Skews, B. W.** Shock wave propagation in porous media / B. W. Skews, A. Levy, D. Levi-Nevroni // *Handbook of Shock Waves*, ed. by G. Ben-Dor, O. Igra, T. Elperin. — Boston : Academic Press, 2000. — P. 546–780.
9. **Буряков, О. В.** Структура фронта ударной волны в гетерогенной смеси двух изотермических газов при наличии сил взаимодействия компонент / О. В. Буряков, В. Ф. Куропатенко // *Вопр. атом. науки и техники. Сер. Методики и программы числ. решения задач мат. физики*. — 1985. — Вып. 3. — С. 19–24.
10. **Федоров, А. В.** Структура ударной волны в смеси двух твердых тел (гидродинамическое приближение) / А. В. Федоров // *Моделирование в механике*. — 1991. — Т. 5, № 4. — С. 135–158.
11. Теория бифуркаций / В. И. Арнольд, Ю. С. Афраймович, Ю. С. Ильяшенко, Л. П. Шильников // *Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы математики. Фундамент. направления*. — 1986. — Т. 5. — С. 5–218.

Поступила в редакцию 14.08.2018

После переработки 26.09.2018

Сведения об авторах

Воронин Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: voron@csu.ru.

Адарченко Владимир Анатольевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики имени академика Е. И. Забабахина, Снежинск, Россия; e-mail: v.a.adarchenko@vniitf.ru.

Панов Александр Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: pan@csu.ru.

THE STRUCTURE OF A SHOCK WAVE'S FRONT IN A HETEROGENEOUS MIXTURE OF TWO ISOTHERMAL VISCOSITY GASES

S.M. Voronin^{1,a}, V.A. Adarchenko^{2,b}, A.V. Panov^{1,c}

¹*Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*

²*Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk, Russia*

^a*voron@csu.ru*, ^b*v.a.adarchenko@vniitf.ru*, ^c*pan@csu.ru*

The problem of a shock wave frontline structure is studied for a heterogeneous mixture of two viscous gases with pair interaction forces. In the pending physical model we assume that the both components of the mixture have isothermal equations of the state and the pair interaction is carried out through the momentum exchange between the components. The pair interaction force is assumed to be linear with respect to the difference of the components velocities. In the work we justify the method of construction of discontinuous solutions for ideal gases by the analysis of the limiting transition from viscous mixture to ideal one in the framework of the theory of fast-slow dynamical systems. It is noted that in the limit case only four shock wave types with different structures of the frontline are possible. For all four types we provide results of numerical calculations of the shock wave frontline structure.

Keywords: *shock wave, structure of front, heterogeneous mixture, pair interaction, isothermal gas.*

References

1. Bellei C., Amendt P.A., Wilks S.C. [et al.]. Species separation in inertial confinement fusion fuels. *Physics of Plasmas*, 2013, vol. 20, p. 012701.
2. Sherman F.S. Shock-wave structure in binary mixtures of chemically inert perfect gases. *Journal of Fluid Mechanics*, 1960, vol. 8, no. 3, pp. 465–480.
3. Goldman E., Sirovich L. The structure of shock-waves in gas mixtures. *Journal of Fluid Mechanics*, 1969, vol. 35, no. 3, pp. 575–597.
4. Ruev G.A., Fomin V.M., Yanenko N.N. Struktura udarnoy volny v smesyakh gazov [Shock wave structure in gase mixtures]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1981, vol. 261, no. 2, pp. 285–290. (In Russ.).
5. Buryakov O.V., Kuropatenko V.F. Rasprostraneniye volny razrezheniya i udarnoy volny v geterogennoy smesi dvukh izotermicheskikh gazov [The propagation of a rarefaction wave and a shock wave in a heterogeneous mixture of two isothermal gases] *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Metody i programmy chislennogo resheniya zadach matematicheskoy fiziki* [Issues of nuclear science and engineering. Ser. Methods and programs for the numerical solution of mathematical physics problems], 1981, iss. 2 (8), pp. 3–7. (In Russ.).
6. Kazakov Yu.V., Fedorov A.V., Fomin V.M. Struktura izotermicheskikh udarnykh voln v gazovzvesyakh [The structure of isothermal shock waves in gas suspension].

- Problemy teorii fil'tratsii i mekhanika protsessov povysheniya nefteotdachi* [Problems of the filtration theory and mechanics of oil recovery processes]. Moscow, Nauka Publ., 1987. Pp. 108–115. (In Russ.).
7. **Kiselev S.P., Ruev A.P., Trunev A.P., Fomin V.M., Shavaliyev M.Sh.** *Udarnovolnovye protsessy v dvukhkomponentnykh i dvukhfaznykh sredakh* [Shock-wave processes in two-component and biphasic media]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1992. 261 p. (In Russ.).
 8. **Skews B.W., Levy A., Levi-Hevroni D.** Shock wave propagation in porous media. *Handbook of Shock Waves*, ed. by G. Ben-Dor, O. Igra, T. Elperin. Boston, Academic Press., 2000. Pp. 546–780.
 9. **Buryakov O.V., Kuropatenko V.F.** Структура фронта ударной волны в гетерогенной смеси двух изотермических газов при наличии сил взаимодействия компонент [The structure of the front of the shock wave in a heterogeneous mixture of two isothermal gases in the presence of interaction forces of the components]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Metody i programmy chislennogo resheniya zadach matematicheskoy fiziki* [Issues of nuclear science and engineering. Ser. Methods and programs for the numerical solution of mathematical physics problems], 1985, iss. 3, pp. 19–24. (In Russ.).
 10. **Fedorov A.V.** Структура фронта ударной волны в смеси двух твёрдых тел (гидродинамическое приближение) [Structure of the shock wave front in a mixture of two solid bodies]. *Modelirovanie v mekhanike* [Modelling in mechanics], 1991, vol. 5, no. 4, pp. 135–158. (In Russ.).
 11. **Arnold V.I., Afrajmovich V.S., Il'yashenko Yu.S., Shil'nikov L.P.** *Dynamical Systems V. Bifurcation Theory and Catastrophe Theory*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1994. IX+274 p.

Accepted article received 14.08.2018

Corrections received 26.09.2018