Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3, вып. 4. С. 438–452.

УДК 510.644 DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13405

НАТУРАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МОДИФИКАЦИЙ ЛОГИК КЛИНИ И ДАННА — БЕЛНАПА

Я. И. Петрухин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия
yaroslav.petrukhin@mail.ru

Клини введены понятия регулярной логической связки и регулярной логики, а также рассмотрены трёхзначные примеры таких логик. Функциональные свойства трёхзначных регулярных логик изучены Финном и Комендантской. Опираясь на их результаты, мы строим четырёхзначные аналоги трёхзначных логик Клини. Первым четырёхзначным обобщением трёхзначных логик Клини (точнее говоря, сильной логики Клини) является логика Данна — Белнапа. На множестве истинностных значений этой логики (мы используем семантику Белнапа) может быть задано два различных отношения порядка (истинностный и информационный), с помощью которых можно ввести два набора логических связок. В самой логике Данна — Белнапа представлен только один из них (основанный на истинностном порядке). Фиттинг рассматривает оба набора сразу. Мы же изучаем логику (называем её логикой Белнапа — Фиттинга) в которой используются связки, основанные на информационном порядке. Используя эти связки (точнее говоря, подставляя их в равенства Финна и Комендантской вместо связок сильной логики Клини), мы получаем новый класс четырёхзначных логик, являющихся аналогами трёхзначных регулярных логик. Все элементы этого класса логик формализованы в виде натуральных исчислений.

Ключевые слова: *натуральное исчисление, четырёхзначная логика, логики Клини, логика Данна — Белнапа, регулярная логика.*

1. Введение

1.1. Предварительные определения

Напомним, что логической матрицей $\mathfrak{M}$ называется упорядоченная тройка $\langle \mathfrak{T}, \mathfrak{F}, \mathfrak{D} \rangle$, где $\mathfrak{T}$ — множество истинностных значений, $\mathfrak{F}$ — множество функций на $\mathfrak{T}$, а $\mathfrak{D}$ — множество выделенных значений. Для всякой логической матрицы $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{T}, f_{F_1}, \ldots, f_{F_n}, \mathfrak{D} \rangle$ можно задать соответствующий ей пропозициональный язык $\mathfrak{L}$ над алфавитом $\langle \mathfrak{P}, F_1, \ldots, F_n, (,) \rangle$, где $\mathfrak{P}$ — множество $\{p_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ пропозициональных переменных, а $F_1, \ldots, F_n$ — связки той же местности, что и $f_{F_1}, \ldots, f_{F_n}$. Множество всех формул языка $\mathfrak{L}$ и понятие оценки формулы A в матрице $\mathfrak{M}$ определяются стандартно. В любой рассматриваемой в этой работе логической матрице $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{T}, \mathfrak{F}, \mathfrak{D} \rangle$ отношение следования определяется таким образом: множество формул Γ влечёт формулу A тогда и только тогда, когда при любой оценке v если значение всякой формулы G из Γ принадлежит $\mathfrak{D}$, то и значение формулы A принадлежит $\mathfrak{D}$. Символически это определение можно записать следующим образом: $\Gamma \models_{\mathfrak{M}} A$ тогда и только тогда, когда при любой оценке v если $v(G) \in \mathfrak{D}$ (для всех $G \in \Gamma$), то $v(A) \in \mathfrak{D}$. Условимся в дальнейшем для любой логической матрицы $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{T}, \mathfrak{F}, \mathfrak{D} \rangle$ обозначать буквами x и y произвольные элементы $\mathfrak{T}$.

1.2. Логики Клини

Одной из наиболее известных трёхзначных логик является сильная логика С. К. Клини $\mathbf{K_3}$ [1]. Она имеет логическую матрицу $\mathfrak{M}_{\mathbf{K_3}} = \langle\{1, 1/2, 0\}, f_\neg, f_\vee, f_\wedge, \{1\}\rangle$, где $f_\neg(x) = 1 - x$, $f_\vee(x,y) = \max(x,y)$, $f_\wedge(x,y) = \min(x,y)$. Ф. Г. Асеньо [2] была описана логика, благодаря исследованиям Г. Приста [3; 4] сейчас известная как **LP** (логика парадокса). Эта логика есть не что иное, как $\mathbf{K_3}$ с двумя выделенными значениями (1 и 1/2). Помимо $\mathbf{K_3}$ в [1] исследуется слабая логика Клини $\mathbf{K_3^w}$. Она имеет логическую матрицу $\mathfrak{M}_{\mathbf{K_3^w}} = \langle\{1, 1/2, 0\}, f_\neg, f_{\overset{\leftrightarrow}{\vee}}, f_{\overset{\leftrightarrow}{\vee}}, \{1\}\rangle$, где, как и в $\mathfrak{M}_{\mathbf{K_3}}$, $f_\neg(x) = 1 - x$, а функции $f_{\overset{\leftrightarrow}{\vee}}$ и $f_{\overset{\leftrightarrow}{\wedge}}$, как показал Ф. К. Финн [5], могут быть определены через $f_\neg$, min и max следующим образом:

$$f_{\overset{\leftrightarrow}{\vee}}(x,y) \quad = \quad \max(\min(x,y), \min(x, f_\neg(x)), \min(y, f_\neg(y))); \tag{1}$$

$$f_{\overset{\leftrightarrow}{\wedge}}(x,y) \quad = \quad \min(\max(x,y), \max(x, f_\neg(x)), \max(y, f_\neg(y))). \tag{2}$$

Аналог $\mathbf{K_3^w}$ с двумя выделенными значениями был описан С. Холденом [6]. Следуя [7], будем называть его **PWK** (паранепротиворечивая слабая логика Клини). Мотивом построения $\mathbf{K_3}$ и $\mathbf{K_3^w}$ послужила теория рекурсии. Эти логики называют *регулярными*, поскольку их связки регулярны в следующем смысле:

> «Мы приходим к выводу, что для того, чтобы пропозициональные связки были частично-рекурсивными операторами (или хотя бы производили частично-рекурсивные предикаты, будучи применены к частично-рекурсивным предикатам), таблицы для них нужно выбрать *регулярными* в следующем смысле: данный столбец (строка) содержит 1 в строке (столбце) для 1/2 только при условии, что этот столбец (эта строка) состоит целиком из 1; аналогично для 0.» [8, с. 298].

Как следует из работы Е. Ю. Комендантской [9], существуют ещё две трёхзначные логики с регулярными связками: логика М. Фиттинга [10] $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$ и логика Е. Ю. Комендантской $\mathbf{K_3^{\leftarrow}}$. Они имеют логические матрицы $\mathfrak{M}_{\mathbf{K_3^{\rightarrow}}} = \langle\{1, 1/2, 0\}, f_\neg, f_{\overset{\rightarrow}{\vee}}, f_{\overset{\rightarrow}{\vee}}, \{1\}\rangle$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{K_3^{\leftarrow}}} = \langle\{1, 1/2, 0\}, f_\neg, f_{\overset{\leftarrow}{\vee}}, f_{\overset{\leftarrow}{\vee}}, \{1\}\rangle$ соответственно. Как следует из работы [9], функции $f_{\overset{\rightarrow}{\vee}}$, $f_{\overset{\rightarrow}{\wedge}}$, $f_{\overset{\leftarrow}{\vee}}$ и $f_{\overset{\leftarrow}{\wedge}}$ могут быть определены через $f_\neg$, min и max следующим образом:

$$f_{\overset{\rightarrow}{\vee}}(x,y) \quad = \quad \max(\min(f_\neg(x), y), x); \tag{3}$$

$$f_{\overset{\rightarrow}{\wedge}}(x,y) \quad = \quad \min(\max(f_\neg(x), y), x); \tag{4}$$

$$f_{\overset{\leftarrow}{\vee}}(x,y) \quad = \quad \max(\min(x, f_\neg(y)), y); \tag{5}$$

$$f_{\overset{\leftarrow}{\wedge}}(x,y) \quad = \quad \min(\max(x, f_\neg(y)), y). \tag{6}$$

Кроме того, в [9] показано, что $f_{\overset{\leftrightarrow}{\vee}}$ и $f_{\overset{\leftrightarrow}{\wedge}}$ можно определить через связки $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$ и $\mathbf{K_3^{\leftarrow}}$:

$$f_{\overset{\leftrightarrow}{\vee}}(x,y) \quad = \quad f_{\overset{\rightarrow}{\vee}}(f_{\overset{\rightarrow}{\wedge}}(x,y), f_{\overset{\rightarrow}{\wedge}}(y,x)); \tag{7}$$

$$f_{\overset{\leftrightarrow}{\wedge}}(x,y) \quad = \quad f_{\overset{\rightarrow}{\wedge}}(f_{\overset{\rightarrow}{\vee}}(x,y), f_{\overset{\rightarrow}{\vee}}(y,x)); \tag{8}$$

$$f_{\overset{\leftrightarrow}{\vee}}(x,y) \quad = \quad f_{\overset{\leftarrow}{\vee}}(f_{\overset{\leftarrow}{\wedge}}(x,y), f_{\overset{\leftarrow}{\wedge}}(y,x)); \tag{9}$$

$$f_{\overset{\leftrightarrow}{\wedge}}(x,y) \quad = \quad f_{\overset{\leftarrow}{\wedge}}(f_{\overset{\leftarrow}{\vee}}(x,y), f_{\overset{\leftarrow}{\vee}}(y,x)). \tag{10}$$

Аналоги логик $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$ и $\mathbf{K_3^{\leftarrow}}$ с двумя выделенными значениями ($\mathbf{K_3^{\leftarrow 2}}$ и $\mathbf{K_3^{\leftarrow 2}}$) описаны в [11]. Там же построены натуральные исчисления для них, а также для

$\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$, $\mathbf{K_3^{\leftarrow}}$, $\mathbf{K_3^{w}}$ и **PWK**.[1] Натуральные исчисления для $\mathbf{K_3}$ и **LP** построены в [4] Г. Пристом. Независимым образом эти же исчисления появились в работах Б. Коя и А. Тамминги [13; 14].

1.3. Логика Данна — Белнапа и её связь с логиками Клини. Модификации логик Клини и Данна — Белнапа

Исследования логики **FDE**, которую сейчас принято называть логикой Данна — Белнапа, были начаты Н. Д. Белнапом в [15] и продолжены в совместной с А. Р. Андерсеном статье [16]. Семантика для **FDE** появилась в докторской диссертации Д. М. Данна [17] (см. также статью Д. М. Данна [18]). Опираясь на идеи Д. М. Данна, Н. Д. Белнап [19; 20] построил свою семантику для **FDE**, которая легла в основу логической матрицы $\mathfrak{M}_{\mathbf{FDE}} = \langle\{1, b, n, 0\}, f^t_\neg, f^t_\vee, f^t_\wedge, \{1, b\}\rangle$[2]. Н. Д. Белнап [19; 20], следуя идеям Д. М. Данна [18], предлагает трактовать значения $1, b, n, 0$ как $\{\mathfrak{t}\}, \{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}, \varnothing, \{\mathfrak{f}\}$ (где $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$ — классические истина и ложь). Ясно, что $\{\{\mathfrak{t}\}, \{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}, \varnothing, \{\mathfrak{f}\}\}$ есть множество всех подмножеств $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}$. Такая трактовка истинностных значений позволяет задать на них два различных отношения порядка: $\leqslant_t$ (истинностный) и $\leqslant_i$ (информационный), таких, что $0 \leqslant_t b \leqslant_t 1$, $0 \leqslant_t n \leqslant_t 1$ (значения b и n несравнимы), $n \leqslant_i 1 \leqslant_i b$, $n \leqslant_i 0 \leqslant_i b$ (значения 1 и 0 несравнимы). В случае $\leqslant_t$ значения упорядочены по «истинности», а в случае $\leqslant_i$ — по информации, причём $\leqslant_i$ совпадает с теоретико-множественным включением. Условимся через $\min_t$ и $\max_t$ обозначать минимум и максимум, заданные на множестве $\{1, b, n, 0\}$, если на нём задан порядок $\leqslant_t$, и через $\min_i$ и $\max_i$, если на $\{1, b, n, 0\}$ задан порядок $\leqslant_i$. Функции $f^t_\neg, f^t_\vee, f^t_\wedge$ матрицы $\mathfrak{M}_{\mathbf{FDE}}$ определяются следующим образом: $f^t_\neg(1) = 0$, $f^t_\neg(0) = 1$, $f^t_\neg(b) = b$, $f^t_\neg(n) = n$; $f^t_\vee(x, y) = \max_t(x, y)$ и $f^t_\wedge(x, y) = \min_t(x, y)$. Кроме того, на множестве $\{1, b, n, 0\}$ можно задать ещё один набор функций: $f^i_\neg(1) = 1$, $f^i_\neg(0) = 0$, $f^i_\neg(b) = n$, $f^i_\neg(n) = b$; $f^i_\vee(x, y) = \max_i(x, y)$ и $f^i_\wedge(x, y) = \min_i(x, y)$. Заметим, что $f^t_\neg$ является инверсией порядка $\leqslant_t$, а $f^i_\neg$ — инверсией порядка $\leqslant_i$. Функции $f^i_\neg$, $f^i_\vee$ и $f^i_\wedge$ впервые явным образом были сформулированы М. Л. Гинзбургом [23; 24] и подробно изучены М. Фиттингом [25; 26], который назвал их конфляцией (conflation), «доверчивостью» (gullibility) и «консенсусом» (consensus) соответственно.

Условимся обозначать через **BF** (Belnap — Fitting) логику, имеющую матрицу $\mathfrak{M}_{\mathbf{BF}} = \langle\{1, b, n, 0\}, f^t_\neg, f^i_\vee, f^i_\wedge, \{1, b\}\rangle$. Для дальнейшего удобства выпишем определения функций $f^t_\neg$, $f^i_\vee$ и $f^i_\wedge$ в следующем виде:

A	$f^t_\neg$
1	0
b	b
n	n
0	1

$f^i_\vee$	1	b	n	0
1	1	b	1	b
b	b	b	b	b
n	1	b	n	0
0	b	b	0	0

$f^i_\wedge$	1	b	n	0
1	1	1	n	n
b	1	b	n	0
n	n	n	n	n
0	n	0	n	0

Важное соотношение между **FDE** с одной стороны и $\mathbf{K_3}$ и **LP** с другой выявил М. Фиттинг [25; 26]. Оказалось, что ограничение **FDE** на множестве $\{1, n, 0\}$ по классу утверждений о следовании совпадает с $\mathbf{K_3}$, а на $\{1, b, 0\}$ — с **LP**. Это позволило М. Фиттингу назвать **FDE** четырёхзначным обобщением трёхзначных логик

[1] В связи с формализацией **PWK** см. также [7; 12].

[2] Разница между семантикой Н. Д. Белнапа и приведённой нами матрицей состоит в определении следования. Н. Д. Белнап определял его не через выделенные значения, а через отношение порядка $\leqslant_t$ (см. ниже). Однако оба эти определения являются эквивалентными, что было доказано различными методами Д. М. Фонтом [21] и Д. В. Зайцевым и Я. В. Шрамко [22]

$\mathbf{K_3}$ и $\mathbf{LP}$. Это наблюдение позволило сформулировать проблему поиска обобщений других трёхзначных логик на четырёхзначный случай.

Один из подходов к обобщению логик $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$, $\mathbf{K_3^{\rightarrow 2}}$, $\mathbf{K_3^{\leftarrow}}$, $\mathbf{K_3^{\leftarrow 2}}$, $\mathbf{K_3^{w}}$, $\mathbf{PWK}$ предложила Н. Е. Томова [27]. Ей были описаны четырёхзначные регулярные логики. При этом, как замечено в [28], среди логик из [27] есть те, связки которых получаются в результате замены функций $f_\neg$, min и max на $f^t_\neg$, $\min_t$ и $\max_t$ в равенствах (1)–(6). Кроме того, оказалось, что в четырёхзначном случае, в отличие от трёхзначного, равенства (1) и (2) задают один набор связок, а равенства (7)–(10) — другой. В [28] построены натуральные исчисления для логик, получающихся в результате только что описанных модификаций равенств (1)–(10).[3]

В этой статье мы построим натуральные исчисления для логик, получающихся в результате замены в равенствах (1)–(6) функций $f_\neg$, min и max на $f^t_\neg$, $\min_i$ и $\max_i$.

Условимся обозначать через $\mathbf{BF}^{\leftrightarrow}$ логику, имеющую матрицу $\mathfrak{M}^{\leftrightarrow}_{\mathbf{BF}} = \langle \{1, b, n, 0\}, f^t_\neg, f^i_{\underset{\vee}{\leftrightarrow}}, f^i_{\underset{\wedge}{\leftrightarrow}}, \{1, b\} \rangle$. Функции $f^i_{\underset{\vee}{\leftrightarrow}}$ и $f^i_{\underset{\wedge}{\leftrightarrow}}$ получаются в результате замены в равенствах (1), (2) функций $f_\neg$, min и max на $f^t_\neg$, $\min_i$ и $\max_i$. Для дальнейшего удобства выпишем определения функций $f^i_{\underset{\vee}{\leftrightarrow}}$ и $f^i_{\underset{\wedge}{\leftrightarrow}}$ в виде

$f^i_{\underset{\vee}{\leftrightarrow}}$	1	b	n	0
1	1	b	n	b
b	b	b	n	b
n	n	n	n	n
0	b	b	n	0

$f^i_{\underset{\wedge}{\leftrightarrow}}$	1	b	n	0
1	1	b	n	n
b	b	b	b	b
n	n	b	n	n
0	n	b	n	0

Через $\mathbf{BF}^{\rightarrow}$ будем обозначать логику, имеющую матрицу $\mathfrak{M}^{\rightarrow}_{\mathbf{BF}} = \langle \{1, b, n, 0\}, f^t_\neg, f^i_{\underset{\vee}{\rightarrow}}, f^i_{\underset{\wedge}{\rightarrow}}, \{1, b\} \rangle$. Функции $f^i_{\underset{\vee}{\rightarrow}}$ и $f^i_{\underset{\wedge}{\rightarrow}}$ получаются в результате замены в равенствах (3), (4) функций $f_\neg$, min и max на $f^t_\neg$, $\min_i$ и $\max_i$. Для дальнейшего удобства выпишем определения функций $f^i_{\underset{\vee}{\rightarrow}}$ и $f^i_{\underset{\wedge}{\rightarrow}}$ в следующем виде:

$f^i_{\underset{\vee}{\rightarrow}}$	1	b	n	0
1	1	b	1	b
b	b	b	b	b
n	n	n	n	n
0	b	b	0	0

$f^i_{\underset{\wedge}{\rightarrow}}$	1	b	n	0
1	1	1	n	n
b	b	b	b	b
n	n	n	n	n
0	n	0	n	0

Обозначим через $\mathbf{BF}^{\leftarrow}$ логику, имеющую матрицу $\mathfrak{M}^{\leftarrow}_{\mathbf{BF}} = \langle \{1, b, n, 0\}, f^t_\neg, f^i_{\underset{\vee}{\leftarrow}}, f^i_{\underset{\wedge}{\leftarrow}}, \{1, b\} \rangle$. Функции $f^i_{\underset{\vee}{\leftarrow}}$ и $f^i_{\underset{\wedge}{\leftarrow}}$ получаются в результате замены в равенствах (5), (6) функций $f_\neg$, min и max на $f^t_\neg$, $\min_i$ и $\max_i$. Для дальнейшего удобства выпишем определения функций $f^i_{\underset{\vee}{\leftarrow}}$ и $f^i_{\underset{\wedge}{\leftarrow}}$ в виде

$f^i_{\underset{\vee}{\leftarrow}}$	1	b	n	0
1	1	b	n	b
b	b	b	n	b
n	1	b	n	0
0	b	b	n	0

$f^i_{\underset{\wedge}{\leftarrow}}$	1	b	n	0
1	1	b	n	n
b	1	b	n	0
n	n	b	n	n
0	n	b	n	0

[3] Ещё один подход к обобщению трёхзначных регулярных логик на четырёхзначный случай предложил М. Фиттинг [10]. Натуральные исчисления для сформулированных им логик посторены в [29].

Условимся также обозначать через $\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}$ логику, имеющую матрицу $\mathfrak{M}^{\Leftrightarrow}_{\mathbf{BF}} = \langle\{1, b, n, 0\},\ f^t_{\neg}, f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}, f^i_{\underset{\wedge}{\Leftrightarrow}},\ \{1, b\}\rangle$. Функции $f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}$ и $f^i_{\underset{\wedge}{\Leftrightarrow}}$ получаются в результате замены в равенствах (7), (8) функций $f_{\underset{\vee}{\rightarrow}}$ и $f_{\underset{\wedge}{\rightarrow}}$ на $f^i_{\underset{\vee}{\rightarrow}}$ и $f^i_{\underset{\wedge}{\rightarrow}}$ или (что эквивалентно) в результате замены в равенствах (9), (10) функций $f_{\underset{\vee}{\leftarrow}}$ и $f_{\underset{\wedge}{\leftarrow}}$ на $f^i_{\underset{\vee}{\leftarrow}}$ и $f^i_{\underset{\wedge}{\leftarrow}}$. Для дальнейшего удобства выпишем определения функций $f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}$ и $f^i_{\underset{\wedge}{\Leftrightarrow}}$ в следующем виде:

$f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}$	1	b	n	0
1	1	b	n	b
b	b	b	b	b
n	n	n	n	n
0	b	b	n	0

$f^i_{\underset{\wedge}{\Leftrightarrow}}$	1	b	n	0
1	1	b	n	n
b	b	b	b	b
n	n	n	n	n
0	n	b	n	0

Отличие функций $f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}$ и $f^i_{\underset{\wedge}{\Leftrightarrow}}$ от $f^i_{\underset{\vee}{\leftrightarrow}}$ и $f^i_{\underset{\wedge}{\leftrightarrow}}$ соответственно состоит в том, что $f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}(b, n) = b$ и $f^i_{\underset{\wedge}{\Leftrightarrow}}(n, b) = n$, в то время как $f^i_{\underset{\vee}{\leftrightarrow}}(b, n) = n$ и $f^i_{\underset{\wedge}{\leftrightarrow}}(n, b) = b$.

Уточним некоторые понятия, введённые нами в начале статьи в общем виде. Языком логик $\mathbf{BF}$, $\mathbf{BF}^{\rightarrow}$, $\mathbf{BF}^{\leftarrow}$, $\mathbf{BF}^{\leftrightarrow}$ и $\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}$ является пропозициональный язык $\mathcal{L}$ над алфавитом $\langle\mathcal{P},\ \neg,\ \vee,\ \wedge,\ (,)\rangle$, где $\mathcal{P}$ есть множество $\{p_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ пропозициональных переменных, $\neg$ — отрицание, $\vee$ — дизъюнкция, $\wedge$ — конъюнкция. Множество $\mathcal{F}$ всех формул определяется стандартно. В случае логики $\mathbf{BF}$ оценкой называется функция v, такая, что $v(p) \in \{1, b, n, 0\}$ (для всех $p \in \mathcal{P}$), $v(\neg A) = f^t_{\neg}(v(A))$, $v(A \vee B) = f^i_{\vee}(v(A), v(B))$, $v(A \wedge B) = f^i_{\wedge}(v(A), v(B))$. В случае логики $\mathbf{BF}^{\sim}$, где $\sim\, \in \{\rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrow, \Leftrightarrow\}$, определение оценки для дизъюнкции и конъюнкции отличается и выглядит следующим образом: $v(A \vee B) = f^i_{\underset{\vee}{\sim}}(v(A), v(B))$ и $v(A \wedge B) = f^i_{\underset{\wedge}{\sim}}(v(A), v(B))$. Отношение следования определяется следующим образом: $\Gamma \models_{\mathbf{L}} A$, где $\mathbf{L} \in \{\mathbf{BF}, \mathbf{BF}^{\rightarrow}, \mathbf{BF}^{\leftarrow}, \mathbf{BF}^{\leftrightarrow}, \mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}\}$, тогда и только тогда, когда при любой оценке v если $v(G) \in \{1, b\}$ (для всех $G \in \Gamma$), то $v(A) \in \{1, b\}$. Кроме того, логики $\mathbf{BF}, \mathbf{BF}^{\rightarrow}, \mathbf{BF}^{\leftarrow}, \mathbf{BF}^{\leftrightarrow}$ и $\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}$ не имеют тавтологий, поскольку $f^t_{\neg}(n) = n$, $f^i_{\vee}(n, n) = n$, $f^i_{\wedge}(n, n) = n$, $f^i_{\underset{\vee}{\sim}}(n, n) = n$ и $f^i_{\underset{\wedge}{\sim}}(n, n) = n$, где $\sim\, \in \{\rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrow, \Leftrightarrow\}$. Таким образом, отношение «$\Gamma \models_{\mathbf{L}} A$», где $\mathbf{L} \in \{\mathbf{BF}, \mathbf{BF}^{\rightarrow}, \mathbf{BF}^{\leftarrow}, \mathbf{BF}^{\leftrightarrow}, \mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}\}$, имеет смысл только если $\Gamma \neq \varnothing$.

Заметим, что подобно свойствам логик $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$, $\mathbf{K_3^{\rightarrow 2}}$, $\mathbf{K_3^{\leftarrow}}$, $\mathbf{K_3^{\leftarrow 2}}$, $\mathbf{K_3^{w}}$ и $\mathbf{PWK}$, свойства логик $\mathbf{BF}^{\rightarrow}$, $\mathbf{BF}^{\leftarrow}$ и $\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}$ оказались весьма необычны: их конъюнкции и дизъюнкции не только некоммутативны, но и неассоциативны (см. таблицу).

В следующем разделе мы сформулируем корректные и полные натуральные исчисления для логик $\mathbf{BF}$, $\mathbf{BF}^{\rightarrow}$, $\mathbf{BF}^{\leftarrow}$, $\mathbf{BF}^{\leftrightarrow}$ и $\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}$. Отметим также, что настоящая статья является продолжением наших исследований по построению натуральных исчислений для многозначных логик [11; 12; 28–31].

2. Натуральные исчисления

Мы предлагаем натуральное исчисление $\mathfrak{ND}_{\mathbf{BF}}$ для логики $\mathbf{BF}$ со следующими правилами вывода:

$$(\neg\neg I)\ \frac{A}{\neg\neg A}, \quad (\neg\neg E)\ \frac{\neg\neg A}{A}, \quad (\vee I_1)\ \frac{A}{A \vee B}, \quad (\vee I_2)\ \frac{B}{A \vee B},$$

$$(\vee E_1)\ \frac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix}}{C}, \quad (\wedge I_1)\ \frac{A \quad B}{A \wedge B}, \quad (\wedge E_1)\ \frac{A \wedge B}{A}, \quad (\wedge E_2)\ \frac{A \wedge B}{B},$$

$$(\neg\wedge I)\ \frac{\neg A\wedge\neg B}{\neg(A\wedge B)},\quad (\neg\wedge E)\ \frac{\neg(A\wedge B)}{\neg A\wedge\neg B},\quad (\neg\vee I)\ \frac{\neg A\vee\neg B}{\neg(A\vee B)},\quad (\neg\vee E)\ \frac{\neg(A\vee B)}{\neg A\vee\neg B}.$$

Свойства конъюнкций и дизъюнкций ($p, q, r \in \mathcal{P}$).

Утверждения о следовании	$\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$	$\mathbf{K_3^{\rightarrow 2}}$	$\mathbf{K_3^{\leftarrow}}$	$\mathbf{K_3^{\leftarrow 2}}$	$\mathbf{K_3^{w}}$	**PWK**
$(p\wedge q)\wedge r\models p\wedge(q\wedge r)$	+	+	+	+	+	+
$p\wedge(q\wedge r)\models(p\wedge q)\wedge r$	+	+	+	+	+	+
$p\wedge q\models q\wedge p$	+	−	+	−	+	+
$(p\vee q)\vee r\models p\vee(q\vee r)$	+	+	+	+	+	+
$p\vee(q\vee r)\models(p\vee q)\vee r$	+	+	+	+	+	+
$p\vee q\models q\vee p$	−	+	−	+	−	+

Утверждения о следовании	**BF**	$\mathbf{BF^{\rightarrow}}$	$\mathbf{BF^{\leftarrow}}$	$\mathbf{BF^{\Leftrightarrow}}$	$\mathbf{BF^{\leftrightarrow}}$
$(p\wedge q)\wedge r\models p\wedge(q\wedge r)$	+	+	+	+	+
$p\wedge(q\wedge r)\models(p\wedge q)\wedge r$	+	−	−	−	+
$p\wedge q\models q\wedge p$	+	−	−	−	+
$(p\vee q)\vee r\models p\vee(q\vee r)$	+	−	−	−	+
$p\vee(q\vee r)\models(p\vee q)\vee r$	+	+	+	+	+
$p\vee q\models q\vee p$	+	−	−	−	+

Определение 1. *Выводом формулы* F из множества формул Γ *в исчислении* $\mathfrak{ND}_{\mathbf{BF}}$ называем непустую линейно упорядоченную последовательность формул, такую, что каждая формула является посылкой (т. е. принадлежит Γ), допущением или получается из предыдущих формул с помощью одного из правил исчисления $\mathfrak{ND}_{\mathbf{BF}}$ и после применения правила $(\vee E_1)$ каждая формула, начиная с A и до C включительно, а также начиная с B и до C включительно, является исключённой из вывода. Если существует вывод F из Γ в $\mathfrak{ND}_{\mathbf{BF}}$, то пишем $\Gamma\vdash_{\mathbf{BF}} F$.

Приведённое выше определение стандартно для натуральных исчислений линейного типа. Его более строгая формулировка (на примере натуральных исчислений для логик $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$) приводится в статье В. О. Шангина [32].

Правилами вывода натурального исчисления $\mathfrak{ND}_{\mathbf{BF}}^{\rightarrow}$ для логики $\mathbf{BF}^{\rightarrow}$ являются $(\neg\neg I)$, $(\neg\neg E)$, $(\vee I_1)$, $(\wedge I_1)$, $(\wedge E_1)$, $(\neg\wedge I)$, $(\neg\wedge E)$, $(\neg\vee I)$, $(\neg\vee E)$, а также

$$(\vee I_3)\ \frac{\neg A\quad B}{A\vee B},\quad (\vee E_2)\ \frac{A\vee B\quad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix}\quad \begin{matrix}[\neg A][B]\\ C\end{matrix}}{C},\quad (\wedge I_2)\ \frac{A\quad \neg A}{A\wedge B},\quad (\wedge E_3)\ \frac{A\wedge B}{\neg A\vee B}.$$

Определение 2. *Выводом формулы* F из множества формул Γ *в исчислении* $\mathfrak{ND}_{\mathbf{BF}}^{\rightarrow}$ называем непустую линейно упорядоченную последовательность формул, такую, что каждая формула является посылкой (т. е. принадлежит Γ), допущением или получается из предыдущих формул с помощью одного из правил исчисления $\mathfrak{ND}_{\mathbf{BF}}^{\rightarrow}$ и после применения правила $(\vee E_2)$ каждая формула, начиная с A и до C включительно, а также начиная с $\neg A$ и до C включительно **или** с B и до C включительно, является исключённой из вывода. Если существует вывод F из Γ в $\mathfrak{ND}_{\mathbf{BF}}^{\rightarrow}$, то пишем $\Gamma\vdash_{\mathbf{BF}^{\rightarrow}} F$.

Пример вывода в $\mathfrak{ND}_{\mathbf{BF}}^{\rightarrow}$ приведён на рисунке. Опираясь на него, рассмотрим особенности применения правила $(\vee E_2)$. Для получения 14-го шага используются допущения 5 и 6. Таким образом, 14-й шаг выводим из 5-го *или* 6-го допущения. Для получения 13-го шага используется допущение 10 (формула p_3). Таким образом,

1	$p_1 \vee (p_2 \vee p_3)$	посылка
2	$\quad p_1$	допущение
3	$\quad p_1 \vee p_2$	$(\vee I_1)$: 2
4	$\quad (p_1 \vee p_2) \vee p_3$	$(\vee I_1)$: 3
5	$\quad \neg p_1$	допущение
6	$\quad p_2 \vee p_3$	допущение
7	$\qquad p_2$	допущение
8	$\qquad p_1 \vee p_2$	$(\vee I_3)$: 5, 7
9	$\qquad (p_1 \vee p_2) \vee p_3$	$(\vee I_1)$: 8
10	$\qquad p_3$	допущение
11	$\qquad \neg p_1 \vee \neg p_2$	$(\vee I_1)$: 5
12	$\qquad \neg(p_1 \vee p_2)$	$(\neg \vee I)$: 11
13	$\qquad (p_1 \vee p_2) \vee p_3$	$(\vee I_3)$: 10, 12
14	$\quad (p_1 \vee p_2) \vee p_3$	$(\vee E_2)$: 6, [7–9], [10–13]
15	$(p_1 \vee p_2) \vee p_3$	$(\vee E_2)$: 1, [2–4], [5–14]

Вывод $(p_1 \vee p_2) \vee p_3$ из $p_1 \vee (p_2 \vee p_3)$ в $\mathfrak{ND}^{\rightarrow}_{\mathbf{BF}}$.

13-й шаг выводим из формулы $\neg p_2$ *или* формулы p_3 (см. формулировку правила $(\vee E_2)$).

Правилами вывода натурального исчисления $\mathfrak{ND}^{\leftarrow}_{\mathbf{BF}}$ для логики $\mathbf{BF}^{\leftarrow}$ являются $(\neg\neg I)$, $(\neg\neg E)$, $(\vee I_2)$, $(\wedge I_1)$, $(\wedge E_2)$, $(\neg \wedge I)$, $(\neg \wedge E)$, $(\neg \vee I)$, $(\neg \vee E)$, а также

$$(\vee I_4)\ \frac{A \quad \neg B}{A \vee B}, \quad (\vee E_3)\ \frac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A][\neg B]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix}}{C}, \quad (\wedge I_3)\ \frac{B \quad \neg B}{A \wedge B}, \quad (\wedge E_4)\ \frac{A \wedge B}{A \vee \neg B}.$$

Понятие вывода в $\mathfrak{ND}^{\leftarrow}_{\mathbf{BF}}$ определяется аналогично понятию вывода в $\mathfrak{ND}^{\rightarrow}_{\mathbf{BF}}$ (с учётом отличий правила $(\vee E_3)$ от $(\vee E_2)$). Если существует вывод F из Γ в $\mathfrak{ND}^{\leftarrow}_{\mathbf{BF}}$, то пишем $\Gamma \vdash_{\mathbf{BF}^{\leftarrow}} F$.

Правилами вывода натурального исчисления $\mathfrak{ND}^{\leftrightarrow}_{\mathbf{BF}}$ для логики $\mathbf{BF}^{\leftrightarrow}$ являются $(\neg\neg I)$, $(\neg\neg E)$, $(\vee I_3)$, $(\vee I_4)$, $(\wedge I_1)$, $(\wedge I_2)$, $(\wedge I_3)$, $(\neg \wedge I)$, $(\neg \wedge E)$, $(\neg \vee I)$, $(\neg \vee E)$, а также

$$(\vee I_5)\ \frac{A \quad B}{A \vee B}, \quad (\vee E_4)\ \frac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A][B]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A][\neg B]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg A][B]\\ C\end{matrix}}{C},$$

$$(\wedge E_5)\ \frac{A \wedge B \quad \begin{matrix}[A][B]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A][\neg A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B][\neg B]\\ C\end{matrix}}{C}.$$

Понятие вывода в $\mathfrak{ND}^{\leftrightarrow}_{\mathbf{BF}}$ определяется аналогично понятию вывода в $\mathfrak{ND}^{\rightarrow}_{\mathbf{BF}}$ (с учётом отличий правил $(\vee E_4)$ и $(\wedge E_6)$ от $(\vee E_2)$). Если существует вывод F из Γ в $\mathfrak{ND}^{\leftrightarrow}_{\mathbf{BF}}$, то пишем $\Gamma \vdash_{\mathbf{BF}^{\leftrightarrow}} F$.

Правилами вывода натурального исчисления $\mathfrak{ND}^{\Leftrightarrow}_{\mathbf{BF}}$ для логики $\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}$ являются $(\neg\neg I)$, $(\neg\neg E)$, $(\vee I_3)$, $(\vee I_4)$, $(\wedge I_1)$, $(\wedge I_2)$, $(\wedge E_3)$, $(\wedge E_4)$, $(\neg\wedge I)$, $(\neg\wedge E)$, $(\neg\vee I)$, $(\neg\vee E)$, а также

$$(\vee I_5)\ \frac{A \quad \neg A}{A \vee B}, \quad (\wedge I_4)\ \frac{\neg A \quad B \quad \neg B}{A \wedge B}, \quad (\wedge E_6)\ \frac{A \wedge B}{A \vee B},$$

$$(\vee E_5)\ \ \frac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A][B]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A][\neg B]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg A][B]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A][\neg A]\\ C\end{matrix}}{C}.$$

Понятие вывода в $\mathfrak{ND}^{\Leftrightarrow}_{\mathbf{BF}}$ определяется аналогично понятию вывода в $\mathfrak{ND}^{\rightarrow}_{\mathbf{BF}}$ (с учётом отличий правила $(\vee E_5)$ от $(\vee E_2)$). Если существует вывод F из Γ в $\mathfrak{ND}^{\Leftrightarrow}_{\mathbf{BF}}$, то пишем $\Gamma \vdash_{\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}} F$.

3. Доказательство основной теоремы

Лемма 1. *Все правила вывода исчислений $\mathfrak{ND}_{\mathbf{BF}}$ и $\mathfrak{ND}^{\sim}_{\mathbf{BF}}$ (где $\sim \in \{\rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrow, \Leftrightarrow\}$) являются корректными.*

Доказательство. В качестве примера рассмотрим исчисление $\mathfrak{ND}^{\Leftrightarrow}_{\mathbf{BF}}$ и докажем корректность правила $(\wedge I_4)$. Условимся на протяжении доказательства леммы 1 писать $\Gamma \models A$ вместо $\Gamma \models_{\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}} A$. Покажем, что для любых $\Gamma, \Delta, \Theta \subseteq \mathcal{F}$ и $A, B \in \mathcal{F}$ верно, что если $\Gamma \models \neg A$, $\Delta \models B$ и $\Theta \models \neg B$, то $\Gamma \cup \Delta \cup \Theta \models A \wedge B$. Допустим, что $\Gamma \models \neg A$, $\Delta \models B$ и $\Theta \models \neg B$. Тогда при любой оценке v верно, что если $v(G) \in \{1, b\}$ (для всех $G \in \Gamma$), то $v(\neg A) \in \{1, b\}$. Отсюда получаем, что при любой оценке v верно, что если $v(G) \in \{1, b\}$ (для всех $G \in \Gamma$), то $v(A) \in \{0, b\}$. Кроме того, при любой оценке v верно, что если $v(D) \in \{1, b\}$ (для всех $D \in \Delta$), то $v(B) \in \{1, b\}$, и при любой оценке v верно, что если $v(T) \in \{1, b\}$ (для всех $T \in \Theta$), то $v(B) \in \{0, b\}$. Допустим, что $v(C) \in \{1, b\}$ при любой оценке v (для всех $C \in \Gamma \cup \Delta \cup \Theta$). Тогда $v(A) \in \{0, b\}$, $v(B) \in \{1, b\}$ и $v(B) \in \{0, b\}$ при любой оценке v. Отсюда $v(A) \in \{0, b\}$ и $v(B) = b$ при любой оценке v. Отсюда по семантическим определениям получаем, что $v(A \wedge B) = b$ при любой оценке v. Итак, при любой оценке v если $v(C) \in \{1, b\}$ (для всех $C \in \Gamma \cup \Delta \cup \Theta$), то $v(A \wedge B) \in \{1, b\}$. Но тогда $\Gamma \cup \Delta \cup \Theta \models A \wedge B$. Таким образом, если $\Gamma \models \neg A$, $\Delta \models B$ и $\Theta \models \neg B$, то $\Gamma \cup \Delta \cup \Theta \models A \wedge B$. □

Лемма 2. *Для любой логики $\mathbf{L} \in \{\mathbf{BF}, \mathbf{BF}^{\rightarrow}, \mathbf{BF}^{\leftarrow}, \mathbf{BF}^{\leftrightarrow}, \mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}\}$ и любых $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ и $A \in \mathcal{F}$ верно, что если $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} A$, то $\Gamma \models_{\mathbf{L}} A$.*

Доказательство. Индукцией по длине вывода с использованием леммы 1 получаем требуемое. □

Теорема 1. *Для любой логики $\mathbf{L} \in \{\mathbf{BF}, \mathbf{BF}^{\rightarrow}, \mathbf{BF}^{\leftarrow}, \mathbf{BF}^{\leftrightarrow}, \mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}\}$ и любых $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ и $A \in \mathcal{F}$ верно, что $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} A$, если и только если $\Gamma \models_{\mathbf{L}} A$.*

Доказательство. В свете леммы 2 достаточно доказать, что для любой логики $\mathbf{L} \in \{\mathbf{BF}, \mathbf{BF}^{\rightarrow}, \mathbf{BF}^{\leftarrow}, \mathbf{BF}^{\leftrightarrow}, \mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}\}$ и любых $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ и $A \in \mathcal{F}$ верно, что если $\Gamma \models_{\mathbf{L}} A$, то $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} A$. Мы воспользуемся модификацией метода Хенкина [33] для многозначных логик, описанной в [13; 14]. В качестве примера приведём доказательство теоремы 1 для логики $\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}$. Для остальных логик доказательство аналогично. На протяжении доказательства теоремы 1 будем понимать $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \models A$ как $\Gamma \vdash_{\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}} A$ и $\Gamma \models_{\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}} A$, соответственно.

Определение 3. Множество формул Γ называем $\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}$-*теорией*, если выполняются следующие условия:

(Г1) $\Gamma \neq \mathcal{F}$;

(Г2) если $\Gamma \vdash A$, то $A \in \Gamma$;

(Г3) если $A \vee B \in \Gamma$, то ($A \in \Gamma$ и $B \in \Gamma$), или ($A \in \Gamma$ и $\neg B \in \Gamma$), или ($\neg A \in \Gamma$ и $B \in \Gamma$), или ($A \in \Gamma$ и $\neg A \in \Gamma$).

Определение 4. Пусть $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ и $A \in \mathcal{F}$. Называем $c(A, \Gamma)$ *канонической оценкой* в случае, когда

$$c(A,\Gamma) = \begin{cases} 1, \text{ если } A \in \Gamma \text{ и } \neg A \notin \Gamma; \\ b, \text{ если } A \in \Gamma \text{ и } \neg A \in \Gamma; \\ n, \text{ если } A \notin \Gamma \text{ и } \neg A \notin \Gamma; \\ 0, \text{ если } A \notin \Gamma \text{ и } \neg A \in \Gamma. \end{cases}$$

Лемма 3. *Пусть* Γ — $\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}$-*теория,* $A, B \in \mathcal{F}$, *тогда*

(1) $f^t_{\neg}(c(A,\Gamma)) = c(\neg A, \Gamma)$;

(2) $f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}(c(A,\Gamma), c(B,\Gamma)) = c(A \vee B, \Gamma)$;

(3) $f^i_{\underset{\wedge}{\Leftrightarrow}}(c(A,\Gamma), c(B,\Gamma)) = c(A \wedge B, \Gamma)$.

Доказательство. (1) Пусть $c(A,\Gamma) \in \{1, b\}$. Тогда $A \in \Gamma$. Применяя $(\neg\neg I)$, получаем $\neg\neg A \in \Gamma$. Таким образом, $f^t_{\neg}(c(A,\Gamma)) = 1 = f^t_{\neg}(0) = c(\neg A, \Gamma)$ и $f^t_{\neg}(c(A,\Gamma)) = b = f^t_{\neg}(b) = c(\neg A, \Gamma)$.

Пусть $c(A,\Gamma) \in \{0, n\}$. Тогда $A \notin \Gamma$. Допустим, что $\neg\neg A \in \Gamma$. Применяя $(\neg\neg E)$, получаем $A \in \Gamma$. Противоречие. Тогда $\neg\neg A \notin \Gamma$. Таким образом, $f^t_{\neg}(c(A,\Gamma)) = 0 = f^t_{\neg}(1) = c(\neg A, \Gamma)$ и $f^t_{\neg}(c(A,\Gamma)) = n = f^t_{\neg}(n) = c(\neg A, \Gamma)$.

(2) Случай (A). Пусть $c(A,\Gamma) = 1$ и $c(B,\Gamma) = 1$. Тогда $A \in \Gamma$, $\neg A \notin \Gamma$, $B \in \Gamma$, $\neg B \notin \Gamma$. Используя $(\wedge I_1)$ и $(\wedge E_6)$, имеем $A \vee B \in \Gamma$. Допустим, что $\neg(A \vee B) \in \Gamma$. Тогда по правилу $(\neg \vee E)$ $\neg A \vee \neg B \in \Gamma$. Поэтому в силу (Г3) ($\neg A \in \Gamma$ и $\neg B \in \Gamma$), или ($\neg A \in \Gamma$ и $\neg\neg B \in \Gamma$), или ($\neg\neg A \in \Gamma$ и $\neg B \in \Gamma$), или ($\neg A \in \Gamma$ и $\neg\neg A \in \Gamma$). Отсюда, учитывая, что $\neg\neg C \in \Gamma$ эквивалентно $C \in \Gamma$ (где $C \in \{A, B\}$), получаем противоречие. Тогда $\neg(A \vee B) \notin \Gamma$. Таким образом, $f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}(c(A,\Gamma), c(B,\Gamma)) = 1 = f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}(1,1) = c(A \vee B, \Gamma)$.

Случай (B). Пусть $c(A,\Gamma) = 1$ и $c(B,\Gamma) = b$. Тогда $A \in \Gamma$, $\neg A \notin \Gamma$, $B \in \Gamma$, $\neg B \in \Gamma$. Используя $(\wedge I_1)$ и $(\wedge E_6)$, получаем, что $A \vee B \in \Gamma$. Используя $(\neg\neg I)$, получаем $\neg\neg A \in \Gamma$. Применяя $(\vee I_3)$, получаем, что $\neg A \vee \neg B \in \Gamma$. С помощью $(\neg \vee I)$ получаем, что $\neg(A \vee B) \in \Gamma$. Таким образом, $f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}(c(A,\Gamma), c(B,\Gamma)) = b = f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}(1,b) = c(A \vee B, \Gamma)$.

Случай (C). Пусть $c(A,\Gamma) = 1$ и $c(B,\Gamma) = n$. Тогда $A \in \Gamma$, $\neg A \notin \Gamma$, $B \notin \Gamma$, $\neg B \notin \Gamma$. Используя (Г3) и $(\neg \vee E)$, легко показать, что $A \vee B \notin \Gamma$ и $\neg(A \vee B) \notin \Gamma$. Таким образом, $f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}(c(A,\Gamma), c(B,\Gamma)) = n = f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}(1,n) = c(A \vee B, \Gamma)$.

Случай (D). Пусть $c(A,\Gamma) = 1$ и $c(B,\Gamma) = 0$. Тогда $A \in \Gamma$, $\neg A \notin \Gamma$, $B \notin \Gamma$, $\neg B \in \Gamma$. Используя $(\vee I_4)$, получаем, что $A \vee B \in \Gamma$. С помощью $(\neg\neg I)$, $(\vee I_3)$ и $(\neg \vee I)$ получаем, что $\neg(A \vee B) \in \Gamma$. Таким образом, $f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}(c(A,\Gamma), c(B,\Gamma)) = b = f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}(1,0) = c(A \vee B, \Gamma)$.

Случай (E). Пусть $c(A,\Gamma) = b$ и $c(B,\Gamma) \in \{1, b, n, 0\}$. Тогда $A \in \Gamma$, $\neg A \in \Gamma$. По правилу $(\vee I_5)$ имеем $A \vee B \in \Gamma$. Используя $(\neg\neg I)$, $(\vee I_5)$ и $(\neg \vee I)$, получаем, что $\neg(A \vee B) \in \Gamma$. Таким образом, $f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}(c(A,\Gamma), c(B,\Gamma)) = b = f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}(b,d) = c(A \vee B, \Gamma)$, где $d \in \{1, b, n, 0\}$.

Случай (F). Пусть $c(A,\Gamma)=0$ и $c(B,\Gamma)=1$. Тогда $A\notin\Gamma$, $\neg A\in\Gamma$, $B\in\Gamma$, $\neg B\notin\Gamma$. С помощью $(\vee I_3)$ получаем, что $A\vee B\in\Gamma$. Используя $(\neg\neg I)$, $(\vee I_4)$ и $(\neg\vee I)$, получаем, что $\neg(A\vee B)\in\Gamma$. Таким образом, $f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}(c(A,\Gamma),c(B,\Gamma))=b=f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}(0,1)=c(A\vee B,\Gamma)$.

Случай (G). Пусть $c(A,\Gamma)=0$ и $c(B,\Gamma)=0$. Тогда $A\notin\Gamma$, $\neg A\in\Gamma$, $B\notin\Gamma$, $\neg B\in\Gamma$. Посредством (Г3) получаем, что $A\vee B\notin\Gamma$. Используя $(\wedge I_1)$ и $(\neg\vee I)$, получаем, что $\neg(A\vee B)\in\Gamma$. Таким образом, $f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}(c(A,\Gamma),c(B,\Gamma))=0=f^i_{\underset{\vee}{\Leftrightarrow}}(0,0)=c(A\vee B,\Gamma)$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

(3) Случай (A). Пусть $c(A,\Gamma)=1$ и $c(B,\Gamma)=1$. Тогда $A\in\Gamma$, $\neg A\notin\Gamma$, $B\in\Gamma$, $\neg B\notin\Gamma$. По правилу $(\wedge I_1)$ $A\wedge B\in\Gamma$. Допустим, что $\neg(A\wedge B)\in\Gamma$. Используя $(\neg\wedge E)$, получаем $\neg A\wedge\neg B\in\Gamma$. Применяя $(\wedge E_5)$, получаем $\neg A\vee\neg B\in\Gamma$. Используя (Г3), получаем противоречие. Следовательно, $\neg(A\wedge B)\notin\Gamma$. Таким образом, $f^i_{\underset{\wedge}{\Leftrightarrow}}(c(A,\Gamma),c(B,\Gamma))=1=f^i_{\underset{\wedge}{\Leftrightarrow}}(1,1)=c(A\wedge B,\Gamma)$.

Случай (B). Пусть $c(A,\Gamma)=1$ и $c(B,\Gamma)=b$. Тогда $A\in\Gamma$, $\neg A\notin\Gamma$, $B\in\Gamma$, $\neg B\in\Gamma$. По правилу $(\wedge I_1)$ $A\wedge B\in\Gamma$, по правилу $(\neg\neg I)$ $\neg\neg A\in\Gamma$ и $\neg\neg B\in\Gamma$, по правилу $(\wedge I_4)$ $\neg A\wedge\neg B\in\Gamma$, по правилу $(\neg\wedge I)$ $\neg(A\wedge B)\in\Gamma$. Таким образом, $f^i_{\underset{\wedge}{\Leftrightarrow}}(c(A,\Gamma),c(B,\Gamma))=b=f^i_{\underset{\wedge}{\Leftrightarrow}}(1,b)=c(A\wedge B,\Gamma)$.

Случай (C). Пусть $c(A,\Gamma)=1$ и $c(B,\Gamma)=n$. Тогда $A\in\Gamma$, $\neg A\notin\Gamma$, $B\notin\Gamma$, $\neg B\in\Gamma$. Допустим, что $A\wedge B\in\Gamma$. Тогда по правилу $(\wedge E_5)$ $A\vee B\in\Gamma$. Используя (Г3), получаем противоречие. Следовательно, $A\wedge B\notin\Gamma$. Допустим, что $\neg(A\wedge B)\in\Gamma$. Тогда по правилу $(\neg\wedge E)$ $\neg A\wedge\neg B\in\Gamma$. По правилу $(\wedge E_5)$ $\neg A\vee\neg B\in\Gamma$. Используя (Г3), получаем противоречие. Следовательно, $\neg(A\wedge B)\notin\Gamma$. Таким образом, $f^i_{\underset{\wedge}{\Leftrightarrow}}(c(A,\Gamma),c(B,\Gamma))=n=f^i_{\underset{\wedge}{\Leftrightarrow}}(1,n)=c(A\wedge B,\Gamma)$.

Случай (D). Пусть $c(A,\Gamma)=b$ и $c(B,\Gamma)\in\{1,b,n,0\}$. Тогда $A\in\Gamma$, $\neg A\in\Gamma$. По правилу $(\wedge I_2)$ получаем $A\wedge B\in\Gamma$. Используя $(\neg\neg I)$, $(\wedge I_2)$ и $(\neg\wedge I)$, получаем, что $\neg(A\wedge B)\in\Gamma$. Таким образом, $f^i_{\underset{\wedge}{\Leftrightarrow}}(c(A,\Gamma),c(B,\Gamma))=b=f^i_{\underset{\wedge}{\Leftrightarrow}}(b,d)=c(A\wedge B,\Gamma)$, где $d\in\{1,b,n,0\}$.

Случай (E). Пусть $c(A,\Gamma)=0$ и $c(B,\Gamma)=0$. Тогда $A\notin\Gamma$, $\neg A\in\Gamma$, $B\notin\Gamma$, $\neg B\in\Gamma$. Допустим, что $A\wedge B\in\Gamma$. Тогда по правилу $(\wedge E_5)$ $A\vee B\in\Gamma$. Используя (Г3), получаем противоречие. Следовательно, $A\wedge B\notin\Gamma$. Используя $(\wedge I_1)$ и $(\neg\wedge I)$, получаем, что $\neg(A\wedge B)\in\Gamma$. Таким образом, $f^i_{\underset{\wedge}{\Leftrightarrow}}(c(A,\Gamma),c(B,\Gamma))=0=f^i_{\underset{\wedge}{\Leftrightarrow}}(0,0)=c(A\wedge B,\Gamma)$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. □

Лемма 4. *Пусть Γ — $\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}$-теория, а v_Γ — такая функция, что $v_\Gamma(p)=c(p,\Gamma)$ для всех $p\in\mathcal{P}$. Тогда $v_\Gamma(A)=c(A,\Gamma)$ для всех $A\in\mathcal{F}$.*

Доказательство. Индукция по построению A с использованием леммы 3 приводит к требуемому результату. □

Лемма 5. (Лемма Линденбаума). *Пусть $\Gamma\subseteq\mathcal{F}$ и $F\in\mathcal{F}$. Если $\Gamma\nvdash F$, то существует $\Gamma_\infty\subseteq\mathcal{F}$ и (1) $\Gamma\subseteq\Gamma_\infty$, (2) $\Gamma_\infty\nvdash F$, (3) Γ_∞ — $\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}$-теория.*

Доказательство. Допустим, что $\Gamma\nvdash F$. Задаётся перечисление $A_1,A_2\ldots,A_n,\ldots$ всех элементов $\mathcal{F}$. Пусть $\Gamma_0=\Gamma$, $\Gamma_{n+1}=\Gamma_n\cup\{A_{n+1}\}$, если $\Gamma_n\cup\{A_{n+1}\}\nvdash F$, и $\Gamma_{n+1}=\Gamma_n$ иначе. Пусть $\Gamma_\infty=\bigcup_{i=0}^{\infty}\Gamma_i$. В свете определения Γ_∞ ясно, что (1) $\Gamma\subseteq\Gamma_\infty$. Используя математическую индукцию по i, несложно доказать, что (2) $\Gamma_\infty\nvdash F$.

Покажем, что (3) Γ_∞ есть $\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}$-теория. Поскольку $\Gamma_\infty\nvdash F$, то $\Gamma_\infty\neq\mathcal{F}$. Покажем, что если $\Gamma_\infty\vdash A$, то $A\in\Gamma_\infty$. В самом деле, если $\Gamma_\infty\vdash A$, то A есть A_k для некоторого k и $\Gamma_k\vdash A_k$. Если $A\notin\Gamma_\infty$, то $\Gamma_{k-1}\cup\{A_k\}\vdash F$. Но тогда $\Gamma_\infty\cup\{A_k\}\vdash F$, поскольку $\Gamma_{k-1} \subseteq \Gamma_\infty$. Отсюда и из того, что $\Gamma_\infty \vdash A_k$, получаем $\Gamma_\infty \vdash F$, что противоречит утверждению (2). Следовательно, $A \in \Gamma_\infty$. Итак, если $\Gamma_\infty \vdash A$, то $A \in \Gamma_\infty$.

Покажем, что если $A \vee B \in \Gamma_\infty$, то ($A \in \Gamma_\infty$ и $B \in \Gamma_\infty$), или ($A \in \Gamma_\infty$ и $\neg B \in \Gamma_\infty$), или ($\neg A \in \Gamma_\infty$ и $B \in \Gamma_\infty$), или ($A \in \Gamma_\infty$ и $\neg A \in \Gamma_\infty$). Допустим, что $A \vee B \in \Gamma_\infty$, и ($A \notin \Gamma_\infty$ или $B \notin \Gamma_\infty$), и ($A \notin \Gamma_\infty$ или $\neg B \notin \Gamma_\infty$), и ($\neg A \notin \Gamma_\infty$ или $B \notin \Gamma_\infty$), и ($A \notin \Gamma_\infty$ или $\neg A \notin \Gamma_\infty$). Тогда $\Gamma_\infty \vdash A \vee B$, и ($\Gamma_\infty \cup \{A\} \vdash F$ или $\Gamma_\infty \cup \{B\} \vdash F$), и ($\Gamma_\infty \cup \{A\} \vdash F$ или $\Gamma_\infty \cup \{\neg B\} \vdash F$), и ($\Gamma_\infty \cup \{\neg A\} \vdash F$ или $\Gamma_\infty \cup \{B\} \vdash F$), и ($\Gamma_\infty \cup \{A\} \vdash F$ или $\Gamma_\infty \cup \{\neg A\} \vdash F$). Применяя правило ($\vee E_4$), получаем $\Gamma_\infty \vdash F$. Противоречие. Итак, если $A \vee B \in \Gamma_\infty$, то ($A \in \Gamma_\infty$ и $B \in \Gamma_\infty$), или ($A \in \Gamma_\infty$ и $\neg B \in \Gamma_\infty$), или ($\neg A \in \Gamma_\infty$ и $B \in \Gamma_\infty$), или ($A \in \Gamma_\infty$ и $\neg A \in \Gamma_\infty$). Следовательно, Γ_∞ есть $\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}$-теория. □

Пусть $\Gamma \nvdash A$. Тогда, по лемме 5 существует $\Gamma_\infty \subseteq \mathcal{F}$ и (1) $\Gamma \subseteq \Gamma_\infty$, (2) $\Gamma_\infty \nvdash F$, (3) Γ_∞ — $\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}$-теория. По лемме 4 найдётся такая оценка v_{Γ_∞}, что $v_{\Gamma_\infty}(G) \in \{1, b\}$ (для всех $G \in \Gamma$) и $v_{\Gamma_\infty}(A) \notin \{1, b\}$. Но тогда $\Gamma \not\models A$. Таким образом, если $\Gamma \models A$, то $\Gamma \vdash A$. Теорема 1 доказана. □

4. Заключение

В статье сформулированы логики $\mathbf{BF}, \mathbf{BF}^{\rightarrow}, \mathbf{BF}^{\leftarrow}, \mathbf{BF}^{\leftrightarrow}$ и $\mathbf{BF}^{\Leftrightarrow}$: представлена их семантика, а также формализация в виде натуральных исчислений. Темой будущих исследований может стать рассмотрение аналогов этих логик с другим множеством выделенных значений: $\{1\}$ или $\{1, b, n\}$.

Автор выражает искреннюю благодарность анонимному рецензенту за сделанные полезные замечания.

Список литературы

1. **Kleene, S. C.** On a notation for ordinal numbers / S. C. Kleene // Journal of Symbolic Logic. — 1938. — Vol. 3, no. 4. — P. 150–155.
2. **Asenjo, F. G.** A calculus of antinomies / F. G. Asenjo // Notre Dame Journal of Formal Logic. — 1966. — Vol. 7, no. 1. — P. 103–105.
3. **Priest, G.** The logic of paradox / G. Priest // Journal of Philosophical Logic. — 1979. — Vol. 8, no. 1. — P. 219–241.
4. **Priest, G.** Paraconsistent logic / G. Priest. — Handbook of Philosophical Logic. 2nd ed. Vol. 6, ed. by M. Gabbay, F. Guenthner. — Dordrecht : Kluwer, 2002. — P. 287–393.
5. **Финн, В. К.** Аксиоматизация некоторых трёхзначных исчислений высказываний и их алгебр / В. К. Финн // Философия в современном мире. Философия и логика. — 1974. — С. 398–438.
6. **Halldén, S.** The logic of nonsense / S. Halldén. — Uppsala : Uppsala Universitets Arskrift, 1949. — 132 p.
7. On paraconsistent weak Kleene logic: axiomatisation and algebraic analysis / S. Bonzio, J. Gil-Férez, F. Paoli, L. Peruzzi // Studia Logica. — 2017. — Vol. 105, no. 2. — P. 253–297.
8. **Клини, С. К.** Введение в метаматематику / С. К. Клини. — М. : Изд-во иностр. лит., 1957. — 526 с.
9. **Комендантская, Е. Ю.** Функциональная взаимовыразимость регулярных логик Клини / Е. Ю. Комендантская // Логич. исследования. — 2009. — № 15. — С. 116–128.
10. **Fitting, M.** Kleene's three valued logics and their children / M. Fitting // Fundamenta informaticae. — 1994. — Vol. 20, no. 1–3. — P. 113–131.
11. **Petrukhin, Y.** Natural deduction for three-valued regular logics / Y. Petrukhin // Logic and Logical Philosophy. — 2017. — Vol. 26, no. 2. — P. 197–206.

12. **Петрухин, Я. И.** Корреспондентский анализ для паранепротиворечивой слабой логики Клини / Я. И. Петрухин, В. О. Шангин // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 7: Философия. — 2017. — № 6. — С. 52–62.
13. **Kooi B.** Completeness via correspondence for extensions of the logic of paradox / B. Kooi, A. Tamminga // The Review of Symbolic Logic. — 2012. — Vol. 5, no. 4. — P. 720–730.
14. **Tamminga, A.** Correspondence analysis for strong three-valued logic / A. Tamminga // Logical Investigations. — 2014. — Vol. 20. — P. 255–268.
15. **Belnap, N. D.** Tautological entailments / N. D. Belnap // Journal of Symbolic Logic. — 1959. — Vol. 24, no. 4. — P. 316.
16. **Anderson, A. R.** Tautological entailments / A. R. Anderson, N. D. Belnap // Philosophical Studies. — 1962. — Vol. 13, no. 1–2. — P. 9–24.
17. **Dunn, J. M.** The Algebra of Intensional Logics / J. M. Dunn. — Doctoral Dissertation. — Pittsburgh : University of Pittsburgh, 1966.
18. **Dunn, J. M.** Intuitive semantics for first-degree entailment and coupled trees / J. M. Dunn // Philosophical Studies. — 1976. — Vol. 29, no. 3. — P. 149–168.
19. **Belnap, N. D.** A useful four-valued logic / N. D. Belnap. — Modern Uses of Multiple-Valued Logic, ed. by J. M. Dunn, G. Epstein. — Boston : Reidel Publishing Company, 1977. — P. 8–37.
20. **Belnap, N. D.** How a computer should think / N. D. Belnap. — Contemporary Aspects of Philosophy, ed. by G. Rule. — Stocksfield : Oriel Press, 1977. — P. 30–55.
21. **Font, J. M.** Belnap's four-valued logic and de Morgan lattices / J. M. Font // Logic Journal of the IGPL. — 1997. — Vol. 5, no. 3. — P. 1–29.
22. **Зайцев, Д. В.** Логическое следование и выделенные значения / Д. В. Зайцев, Я. В. Шрамко // Логич. исследования. — 2004. — № 11. — С. 126–137.
23. **Ginsberg, M. L.** Multivalued logics / M. L. Ginsberg. — Proceedings of the Fifth National Conference on Artificial Intelligence. — Morgan Kaufmann Publ., 1986. — P. 243–247.
24. **Ginsberg, M. L.** Multivalued logics: a uniform approach to reasoning in artificial intelligence / M. L. Ginsberg // Computational Intelligence. — 1988. — Vol. 4, no. 3. — P. 265–316.
25. **Fitting, M.** Negation as refutation / M. Fitting. — Proceedings of the Fourth Annual Symposium on Logic in Computer Science. — New Jersey : IEEE Press Piscataway, 1989. — P. 63–70.
26. **Fitting, M.** Kleene's logic, generalized / M. Fitting // Journal of Logic and Computation. — 1992. — Vol. 1, no. 6. — P. 797–810.
27. **Томова, Н. Е.** О четырёхзначных регулярных логиках / Н. Е. Томова // Логич. исследования. — 2009. — № 15. — С. 223–228.
28. **Petrukhin, Y.** Natural deduction for four-valued both regular and monotonic logics / Y. Petrukhin // Logic and Logical Philosophy. — 2018. — Vol. 27, no. 1. — P. 53–66.
29. **Petrukhin, Y. I.** Natural deduction for Fitting's four-valued generalizations of Kleene's logics / Y. I. Petrukhin // Logica Universalis. — 2017. — Vol. 11, no. 4. — P. 525–532.
30. **Петрухин, Я. И.** Натуральное исчисление для логики Юрьева / Я. И. Петрухин // Челяб. физ.-мат. журн. — 2017. — Т. 2, вып. 1. — С. 46–52.
31. **Petrukhin, Y. I.** Correspondence analysis for logic of rational agent / Y. I. Petrukhin // Челяб. физ.-мат. журн. — 2017. — Т. 2, вып. 3. — P. 329–337.
32. **Shangin, V. O.** A precise definition of an inference (by the example of natural deduction systems for logics $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$) / V. O. Shangin // Logical Investigations. — 2017. — Vol. 23, no. 1. — P. 83–104.
33. **Henkin, L.** The completeness of the first-order functional calculus / L. Henkin // Journal of Symbolic Logic. — 1949. — Vol. 14, no. 3. — P. 159–166.

Поступила в редакцию 08.06.2018
После переработки 08.07.2018

Сведения об авторе

Петрухин Ярослав Игоревич, аспирант кафедры логики философского факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия; e-mail: yaroslav.petrukhin@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2018. Vol. 3, iss. 4. P. 438–452.

DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13405

NATURAL DEDUCTION SYSTEMS FOR SOME MODIFICATIONS OF KLEENE'S AND DUNN — BELNAP'S LOGICS

Y.I. Petrukhin

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
yaroslav.petrukhin@mail.ru

Kleene introduced the notions of regular logical connective and regular logic as well as considered three-valued examples of such logics. Finn and Komendantskaya studied functional properties of regular three-valued logics. Base ourselves upon their results, we present four-valued analogues of Kleene's three-valued logics. The first four-valued generalization of Kleene's three-valued logics (more exactly, of strong Kleene's logic) is Dunn–Belnap's logic. Two different orders (truth and information ones) can be defined on the set of truth values of this logic (we follow Belnap's semantics). Using them, one can define two sets of logical connectives. Only one of them (which is based on truth order) is presented in Dunn–Belnap's logic itself. Fitting considers two sets at the same time. We study logic (we call it Belnap–Fitting's logic) which have the connectives based on information order. Using these connectives (more exactly, we substitute them into Finn and Komendantskaya's equations instead of the connectives of strong Kleene's logic), we obtain a new class of four-valued logics which are analogues of regular three-valued ones. All the elements of this class are formalized via natural deduction systems.

Keywords: *natural deduction system, four-valued logic, Kleene's logics, Dunn–Belnap's logic, regular logic.*

References

1. **Kleene S.C.** On a notation for ordinal numbers. *Journal of Symbolic Logic*, 1938, vol. 3, no. 4, pp. 150–155.
2. **Asenjo F.G.** A calculus of antinomies. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1966, vol. 7, no. 1, pp. 103–105.
3. **Priest G.** The logic of paradox. *Journal of Philosophical Logic*, 1979, vol. 8, no. 1, pp. 219–241.
4. **Priest G.** Paraconsistent logic. *Handbook of Philosophical Logic*, 2nd ed., vol. 6, ed. by M. Gabbay, F. Guenthner. Dordrecht, Kluwer, 2002. Pp. 287–393.
5. **Finn V.K.** Aksiomatizatsiya nekotorykh tryokhznachnykh ischislenii vyskazyvanii i ikh algebr [Axiomatization of some three-valued propositional calculi and their algebras]. *Filosofiya v sovremennom mire. Filosofiya i logika* [Philosophy in the contemporary world. Philosophy and logic], 1974, pp. 398–438. (In Russ.)
6. **Halldén S.** *The logic of nonsense*, Uppsala, Uppsala Universitets Arskrift, 1949. 132 p.
7. **Bonzio S., Gil-Férez J., Paoli F., Peruzzi L.** On paraconsistent weak Kleene logic: axiomatisation and algebraic analysis. *Studia Logica*, 2017, vol. 105, no. 2, pp. 253–297.
8. **Kleene S.C.** *Introduction to Metamathematics*, New York, Toronto, D. Van Nostrand Company, Inc., 1952. X + 550 p.
9. **Komendantskaya E.Y.** Funktsional'naya vzaimovyrazimost' regulyarnykh logik Klini [Functional interdependence of regular Kleene logics]. *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], 2009, no. 15, pp. 116–128. (In Russ.)
10. **Fitting M.** Kleene's three-valued logics and their children. *Fundamenta Informaticae*, 1994, vol. 20, no. 1–3, pp. 113–131.

11. **Petrukhin Y.** Natural deduction for three-valued regular logics. *Logic and Logical Philosophy*, 2017, vol. 26, no. 2, pp. 197–206.
12. **Petrukhin Y.I., Shangin V.O.** Korrespondentskii analiz dlya paraneprotivorechivoy slaboy logiki Klini [Correspondence analysis for paraconsistent weak Kleene logic]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 7: Filosofiya* [Moscow University Philosophical Bulletin], 2017, no. 6, pp. 52–62. (In Russ.).
13. **Kooi B., Tamminga A.** Completeness via correspondence for extensions of the logic of paradox. *The Review of Symbolic Logic*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 720–730.
14. **Tamminga A.** Correspondence analysis for strong three-valued logic. *Logical Investigations*, 2014, vol. 20, pp. 255–268.
15. **Belnap N.D.** Tautological entailments. *Journal of Symbolic Logic*, 1959, vol. 24, no. 4, p. 316.
16. **Anderson A.R., Belnap N.D.** Tautological entailments. *Philosophical Studies*, 1962, vol. 13, no. 1-2, pp. 9–24.
17. **Dunn J.M.** *The Algebra of Intensional Logics*, Doctoral Dissertation, Pittsburgh, University of Pittsburgh, 1966.
18. **Dunn J.M.** Intuitive semantics for first-degree entailment and coupled trees. *Philosophical Studies*, 1976, vol. 29, no. 3, pp. 149–168.
19. **Belnap N.D.** A useful four-valued logic. *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, ed. by J. M. Dunn, G. Epstein. Boston, Reidel Publishing Company, 1977. Pp. 8–37.
20. **Belnap N.D.** How a computer should think. *Contemporary Aspects of Philosophy*, ed. by G. Rule. Stocksfield, Oriel Press, 1977. Pp. 30–55.
21. **Font J.M.** Belnap's four-valued logic and de Morgan lattices. *Logic Journal of the IGPL*, 1997, vol. 5, no. 3, pp. 1–29.
22. **Zaitsev D.V., Shramko Y.V.** Logicheskoye sledovaniye i vydelennye znacheniya [Logical entailment and designated values]. *Logicheskie issledovaniya* [Logical Investigations], 2004, no. 11, pp. 126–137. (In Russ.).
23. **Ginsberg M.L.** Multivalued logics. *Proceedings of the Fifth National Conference on Artificial Intelligence*. Morgan Kaufmann Publ., 1986. Pp. 243–247.
24. **Ginsberg M.L.** Multivalued logics: a uniform approach to reasoning in artificial intelligence. *Computational Intelligence*, 1988, vol. 4, no. 3, pp. 265–316.
25. **Fitting M.** Negation as refutation. *Proceedings of the Fourth Annual Symposium on Logic in Computer Science*. New Jersey, IEEE Press Piscataway, 1989. Pp. 63–70.
26. **Fitting M.** Kleene's logic, generalized. *Journal of Logic and Computation*, 1992, vol. 1, no. 6, pp. 797–810.
27. **Tomova N.E.** O chetyryokhznachnykh regulyarnykh logikakh [On four-valued regular logics]. *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], 2009, no. 15, pp. 223–228. (In Russ.).
28. **Petrukhin Y.** Natural deduction for four-valued both regular and monotonic logics. *Logic and Logical Philosophy*, 2018, vol. 27, no. 1, pp. 53–66.
29. **Petrukhin Y.I.** Natural deduction for Fitting's four-valued generalizations of Kleene's logics. *Logica Universalis*, 2017, vol. 11, no. 4, pp. 525–532.
30. **Petrukhin Y.I.** Natural'noye ischisleniye dlya logiki Yur'yeva [Natural deduction for Yuriev's logic]. *Chelyabinskiy fiziko-matematicheskiy zhurnal* [Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal], 2017, vol. 2, no. 1, pp. 46–52. (In Russ.).
31. **Petrukhin Y.I.** Correspondence analysis for logic of rational agent. *Chelyabinskiy fiziko-matematicheskiy zhurnal* [Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal], 2017, vol. 2, no. 3, pp. 329–337.
32. **Shangin V.O.** A precise definition of an inference (by the example of natural deduction systems for logics $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$). *Logical Investigations*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 83–104.
33. **Henkin L.** The completeness of the first-order functional calculus. *Journal of Symbolic Logic*, 1949, vol. 14, no. 3, pp. 159–166.

Accepted article received 08.06.2018
Corrections received 08.07.2018