Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3, вып. 4. С. 408–420.

УДК 514.74 DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13403

ВЛОЖЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ОСОБЫХ РАСШИРЕНИЙ ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ ГЕОМЕТРИЙ

В. А. Кыров

Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия
kyrovVA@yandex.ru

Для современной науки особое значение имеет изучение геометрий локальной максимальной подвижности, к числу которых относятся евклидовы и псевдоевклидовы геометрии, симплектическая геометрия, геометрии постоянной кривизны. Полной классификации таких геометрий на данный момент не существует. Автором данной статьи разработан метод, названный методом вложения, позволяющий осуществить такую классификацию. Суть этого метода состоит в нахождении функций, определяющих геометрии размерности $n+1$ по известным функциям, задающим геометрии размерности n. При этом искомая функция как аргумент содержит известную функцию геометрии размерности n и еще две переменные. Дополнительно накладывается требование локальной инвариантности этой функции относительно группы преобразований с $(n+1)(n+2)/2$ параметрами. Затем записывается условие локальной инвариантности, из которого выводится функционально-дифференциальное уравнение на искомую функцию. В этой статье решения этого уравнения ищутся аналитически, в виде рядов Тейлора. Сформулированная так задача для псевдоевклидовой геометрии имеет три класса решений (геометрий локальной максимальной подвижности): псевдоевклидова геометрия, особое расширение псевдоевклидовых геометрий, геометрии на псевдосфере. В данной статье ставится задача вложения для особых расширений псевдоевклидовых геометрий. Доказывается, что решениями этой задачи не являются геометрии локальной максимальной подвижности.

Ключевые слова: *функциональное уравнение, дифференциальное уравнение, метрическая функция, геометрия.*

Введение

В математике важное место занимает изучение геометрий локальной максимальной подвижности. К их числу относятся: евклидова геометрия, псевдоевклидова, симплектическая геометрия, сферическая, геометрия Лобачевского и др. [1]. Полной классификации таких геометрий пока нет. $(n+1)$-мерная геометрия локальной максимальной подвижности — это геометрия на многообразии M, $\dim M = n+1$, задаваемая некоторой невырожденной функцией $f : M \times M \to R$, называемой метрической, и допускающая группу движений размерности $(n+1)(n+2)/2$, относительно которой функция f является двухточечным инвариантом.

В работах [2; 3] Г. Г. Михайличенко даётся полная классификация двумерных геометрий локальной максимальной подвижности, которые названы феноменологически симметричными. Эта классификация, кроме хорошо известных двумерных геометрий (евклидова, псевдоевклидова, симплектическая, сферическая и др.), содержит и неизвестные геометрии (симплициальная, гельмгольцева, псевдогельмгольцева и дуальногельмгольцева).

В. А. Кыровым разработан новый метод классификации геометрий локальной максимальной подвижности, названный методом вложения, который апробирован в работах [4–6]. Суть этого метода состоит в нахождении метрических функций всех геометрий локальной максимальной подвижности по известным метрическим функциям геометрий локальной максимальной подвижности размерности на единицу меньше, содержащих их внутри себя как аргумент. С помощью этого метода по метрической функции $(n+1)$-мерного особого расширения псевдоевклидовой n-мерной геометрии $g(i,j) = [\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2]e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}$, где i, j — произвольные две точки $(n+1)$-мерного пространства с координатами $(x_i^1, \dots, x_i^n, x_i^{n+1})$ и $(x_j^1, \dots, x_j^n, x_j^{n+1})$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$, в предположении аналитичности решается задача нахождения метрических функций всех $(n+2)$-мерных геометрий локальной максимальной подвижности. Отметим, что метрическая функция g при $n = 1$ появляется при классификации двумерных геометрий локальной максимальной подвижности (феноменологически симметричные геометрии) [2; 3]. Она также появляется и в работе [5], которая посвящена построению геометрий методом вложения. Для произвольного n в работе [4] доказано, что геометрия с этой метрической функцией является геометрией локальной максимальной подвижности. В данной работе рассматриваются $(n+2)$-мерные геометрии с метрическими функциями вида

$$f(i,j) = \chi\left(\left[\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2\right]e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}, w_i, w_j\right), \tag{0.1}$$

где $(x_i^1, \dots, x_i^n, x_i^{n+1}, w_i)$ и $(x_j^1, \dots, x_j^n, x_j^{n+1}, w_j)$ — координаты точек i и j.

В настоящей работе задача о вложении решается аналитически, т. е. записывается функциональное уравнение, решения которого ищутся в виде рядов Тейлора. Доказывается, что не существует невырожденной метрической функции вида (0.1).

В конце отметим, что решаемая в этой статье задача впервые была сформулирована в работе [4] для дифференцируемых функций и сводилась к решению функциональных уравнений классическими методами. Для чего дифференцированием функциональные уравнения сводились к дифференциальным, которые потом интегрировались. В данном же случае задача формулируется в классе аналитических функций и сводится к поиску решений функциональных уравнений в виде рядов Тейлора, что является принципиальным отличием от работы [4]. При этом для перебора коэффициентов применяется программа, написанная в Maple 17, что существенно упрощает эту процедуру.

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим $(n+2)$-мерное аналитическое многообразие M, которое локально диффеоморфно прямому произведению $(n+1)$-мерного аналитического многообразия N и одномерного аналитического многообразия L, $n \geq 1$. Локальный диффеоморфизм осуществляет аналитическое отображение $h : M \to N \times L$. Пусть $\pi_1 : N \times L \to N$ и $\pi_2 : N \times L \to L$ — проекции. Рассмотрим функции $g : N \times N \to R$, с открытой и плотной областью определения S_g в N^2, и $\chi : R \times L \times L \to R$. Построим функцию $f : M \times M \to R$ по следующей формуле:

$$f = \chi(g(\pi_1(h), \pi_1(h)), \pi_2(h), \pi_2(h)),$$

область определения S_f которой открыта и плотна в M^2. На точках эта функция выглядит так:

$$f(i,j) = \chi(g(\pi_1(h(i)), \pi_1(h(j))), \pi_2(h(i)), \pi_2(h(j))), \tag{1.1}$$

где i, j — произвольные две точки из M, причём $\langle i, j\rangle \in S_f$.

Для произвольной точки из M рассмотрим координатную окрестность $U \subset M$, в которой h является диффеоморфизмом и для любых точек $i, j \in U$, $\langle i, j\rangle \in S_f$, существуют окрестности $U(i) \subset U$, $U(j) \subset U$ такие, что $\langle i', j'\rangle \in S_f$ при всех $i' \in U(i)$, $j' \in U(j)$. В силу вышесказанного имеем диффеоморфизм окрестностей $h : U \to V \times W$, где V, W — некоторые координатные окрестности в N и L соответственно. Координаты в окрестности V обозначим $(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1})$, а координату в окрестности W — (w). Тогда в локальных координатах функция (1.1) принимает следующий вид:

$$f = f(i, j) = \chi(\theta, w_i, w_j), \tag{1.2}$$

где $g(\pi_1(h(i)), \pi_1(h(j))) = \theta = \theta(x_i^1, \ldots, x_i^{n+1}, x_j^1, \ldots, x_j^{n+1})$ — метрическая функция особого $(n+1)$-мерного расширения n-мерного псевдоевклидова пространства:

$$\theta = \vartheta(i, j)e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}, \ \vartheta(i, j) = \varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2, \tag{1.3}$$

причём $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$, $\pi_2(h(i)) = w_i$, $\pi_2(h(j)) = w_j$. Пусть выполняются следующие аксиомы.

Аксиома аналитичности. Функция $\chi : R \times L \times L \to R$ аналитична во всех точках области определения.

Аксиома невырожденности. Для функции (1.2) в произвольной точке окрестности $U(i) \times U(j) \subset M^2$ справедливы неравенства

$$\frac{\partial \chi}{\partial \theta} \neq 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial w_i} \neq 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial w_j} \neq 0. \tag{1.4}$$

Пусть группа Ли G действует эффективно и аналитично в $U \subset M$. Это означает, что задано аналитическое инъективное отображение (эффективное действие)

$$\lambda : U \times G \to U',$$

где $U' \subset M$ — открытая область, причём оно имеет свойства:

1) $\lambda(i, e) = i$, $e \in G$ — единица, $i \in U$;

2) $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ab)$, для любых $a, b \in G$ и $i \in U$;

3) для любого $i \in U$ $\lambda(i, a) = i$, только если $a = e$.

Действие λ_a, определяемое произвольным элементом $a \in G$, называется *движением*, если для любых точек $i, j \in U$ таких, что $\langle i, j\rangle \in S_f$, $\langle \lambda_a(i), \lambda_a(j)\rangle \in S_f$, выполняется равенство $f(\lambda_a(i), \lambda_a(j)) = f(i, j)$. Действия группы G можно определить в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j, причём, если эти окрестности пересекаются, то действия в пересечении совпадают [2, § 1]. Множество всех так определённых движений образует аналитическую группу Ли движений.

Аксиома максимальной подвижности. Размерность группы Ли G максимальная и равна $(n+2)(n+3)/2$.

Из этой аксиомы следует, что по группе движений как двухточечный инвариант находится функция f и наоборот, по функции f находится сама группа движений [1]. Если размерность группы движений отлична от максимальной, то данное свойство не выполняется. Оно является ключевым в том классе геометрий, которому посвящена эта статья.

Алгебра Ли группы движений состоит из операторов вида [7, § 16]

$$X = X_1\partial_{x^1} + \cdots + X_{n+1}\partial_{x^{n+1}} + W\partial_w, \tag{1.5}$$

где $X_\alpha = X_\alpha(x^1, \ldots, x^{n+1}, w)$, $W = W(x^1, \ldots, x^{n+1}, w)$ — аналитические функции в U, $\alpha = 1, \ldots, n+1$. Через операторы (1.5) записывается условие локальной инвариантности метрической функции [7, § 17]:

$$X(i)f(i,j) + X(j)f(i,j) = 0, \tag{1.6}$$

которое выполняется в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j, причём метрическая функция $f(i,j)$ определена и аналитична в $U(i) \times U(j)$.

Пусть $k \in U \subset M$ — начало некоторой системы координат в U, в которой эта точка имеет нулевые координаты $(0, \ldots, 0)$. В такой системе координат справедливы разложения в ряд Тейлора для компонент оператора (1.5) и метрической функции [8, гл. 11]:

$$\left\{\begin{array}{c} X_1 = X_1(w) + D_1(X_1)(w)x^1 + \cdots + D_{n+1}(X_1)(w)x^{n+1} + \cdots, \\ \cdots \\ X_{n+1} = X_{n+1}(w) + D_1(X_{n+1})(w)x^1 + \cdots + D_{n+1}(X_{n+1})(w)x^{n+1} + \cdots, \\ W = W(w) + D_1(W)(w)x^1 + \cdots + D_{n+1}(W)(w)x^{n+1} + \cdots, \end{array}\right. \tag{1.7}$$

$$f(\theta, w_i, w_j) = f(w_i, w_j) + D_1(f)(w_i, w_j)\theta + \frac{1}{2}D_{11}(f)(w_i, w_j)\theta^2 + \cdots,$$

где, например, $X_\gamma(w) = X_\gamma(0, \ldots, 0, w)$, $D_\alpha(X_\gamma)(w) = \dfrac{\partial X_\gamma(x^1, \ldots, x^{n+1}, w)}{\partial x^\alpha}\Big|_{x=0}$, $D_{\alpha\beta}(X_\gamma)(w) = \dfrac{\partial^2 X_\gamma(x^1, \ldots, x^{n+1}, w)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\Big|_{x=0}$, $x = (x^1, \ldots, x^{n+1})$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n+1$, $f(w_i, w_j) = f(0, w_i, w_j)$, $D_1(f)(w_i, w_j) = \dfrac{\partial f(\theta, w_i, w_j)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0}$. Основные результаты работы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Рассмотрим произвольную точку $k \in M$ и её координатную окрестность $U(k)$. Возьмём также две точки $i, j \in U(k)$ с окрестностями $U(i)$ и $U(j)$, такие, что*

$$U(i) \cup U(j) \subset U(k), \quad \langle i, j\rangle, \langle i', j'\rangle \in S_f \quad \forall i' \in U(i)\ \forall j' \in U(j).$$

Тогда метрическая функция $f(i,j) = \chi(\theta, w_i, w_j)$, где χ — аналитическая функция,

$$\theta = [\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2]e^{2x_i^{n+1} + 2x_j^{n+1}}, \ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1,$$

в окрестности $U(i) \cup U(j)$ аналитического многообразия M вырождена и поэтому не задаёт $(n+2)$-мерную геометрию локальной максимальной подвижности.

2. Доказательство теоремы

Искомая метрическая функция (1.2) является двухточечным инвариантом группы движений размерности $(n+2)(n+3)/2$, поэтому условие локальной инвариантности (1.6) в явном виде записывается так:

$$2p(i,j)e^{2x_i^{n+1} + 2x_j^{n+1}}\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta} + W(i)\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i} + W(j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_j} = 0, \tag{2.1}$$

где

$$p(i,j) = \varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_1(i) - X_1(j)) + \cdots +$$
$$+\varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_n(i) - X_n(j)) + \vartheta(i,j)(X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)).$$

Заметим, что выражение (2.1) выполняется тождественно по координатам точек i и j из окрестностей $U(i)$ и $U(j)$, причём $U(i) \cup U(j) \subset U(k)$, где $U(k)$ — координатная окрестность. Ниже доказываются леммы для тождества (2.1) из предположения аналитичности в $U(i) \times U(j)$ входящих в него функций. Эти же леммы справедливы также и в предположении принадлежности входящих в тождество (2.1) функций классу C^3 в $U(i) \times U(j)$. При доказательстве лемм полагаем $l = 1, 2, \ldots, n+1$, $k, s, m = 1, 2 \ldots, n$.

Лемма 1. *В тождестве* (2.1) $p(i,j) \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное, пусть выполняется равенство

$$\begin{gathered} \varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_1(i) - X_1(j)) + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_n(i) - X_n(j)) + \\ + \vartheta(i,j)(X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)) = 0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Дифференцируя это равенство по переменной w_i, а результат по переменным $x_j^1, \ldots, x_j^{n+1}$, будем иметь $X'_{1w} = 0$, $\ldots$, $X'_{(n+1)w} = 0$, следовательно, $X_l = X_l(x^1, \ldots, x^{n+1})$. В результате выражение (2.2) превращается в функциональное уравнение на операторы алгебры Ли группы движений $(n+1)$-мерного особого расширения n-мерной псевдоевклидовой геометрии с метрической функцией (1.3) [4]. Размерность этой группы движений — $(n+1)(n+2)/2$. Уравнение (2.2) имеет следующие решения: $X_k = \varepsilon_k a_k(\varepsilon_1 (x_1)^2 + \cdots + \varepsilon_n (x^n)^2) - 2x^k(a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n) - \varepsilon_k c_{ks} x^s - 2bx^k + c_k$, $X_{n+1} = a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n + b$, причём, a_k, $c_{ks} = -c_{sk}$, $c_k, b = \mathrm{const}$.

Запишем теперь тождество (2.1) с учётом (2.2):

$$W(i)\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i} + W(j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_j} = 0. \tag{2.3}$$

Пусть сначала $W = 0$. Тогда произвольный оператор алгебры Ли группы движений геометрии с метрической функцией (1.2) имеет вид

$$\begin{gathered} X = (\varepsilon_k a_k(\varepsilon_1 (x_1)^2 + \cdots + \varepsilon_n (x^n)^2) - 2x^k(a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n) - \varepsilon_k c_{ks} x^s - 2bx^k + c_k)\partial_{x^k} + \\ + (a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n + b)\partial_{x^{n+1}}. \end{gathered}$$

Придавая попеременно произвольным постоянным c_l, c_{sk}, a_k, b значения 0 и 1, получаем $(n+1)(n+2)/2$ базисных операторов, а должно быть $(n+2)(n+3)/2$. Противоречие.

Пусть теперь $W \neq 0$. Тогда от выражения (2.3) переходим к тождеству

$$\frac{W(i)}{W(j)} = \varphi(\theta, w_i, w_j), \tag{2.4}$$

для чего левую и правую части делим на ненулевое произведение $W(j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i}$ и вводим обозначение $\varphi(\theta, w_i, w_j) = -\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_j} / \frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i}$. Дифференцируем (2.4) по x_i^k и по x_j^k:

$$\frac{W'_{x^k}(i)}{W(j)} = 2\varepsilon_k(x_i^k - x_j^k)e^{2x_i^{n+1} + 2x_j^{n+1}}\varphi_\theta, \quad -\frac{W(i)W'_{x^k}(j)}{W^2(j)} = -2\varepsilon_k(x_i^k - x_j^k)e^{2x_i^{n+1} + 2x_j^{n+1}}\varphi_\theta,$$

затем складываем результаты и разделяем переменные:

$$\frac{W'_{x^k}(i)}{W(i)} = \frac{W'_{x^k}(j)}{W(j)} = \alpha_k = \mathrm{const}.$$

Таким образом, получаем $W'_{x^k} = \alpha_k W$. После интегрирования имеем

$$W = c(w, x^{n+1}) e^{\alpha_1 x^1 + \dots + \alpha_n x^n} \neq 0.$$

Полученное подставляем в (2.4):

$$e^{\alpha_1 u^1 + \dots + \alpha_n u^n} = \varphi(\theta, w_i, w_j) c(w_j, x_j^{n+1}) / c(w_i, x_i^{n+1}), \quad u^k = x_i^k - x_j^k.$$

Продифференцируем это равенство по u^k:

$$\alpha_k e^{\alpha_1 u^1 + \dots + \alpha_n u^n} = 2\varepsilon_k u^k e^{2x_i^{n+1} + 2x_j^{n+1}} \varphi'_\theta(\theta, w_i, w_j) c(w_j, x_j^{n+1}) / c(w_i, x_i^{n+1}).$$

Затем k-е равенство умножаем на $\varepsilon_s u^s$ и вычитаем из него s-е, умноженное на $\varepsilon_k u^k$:

$$(\alpha_k \varepsilon_s u^s - \alpha_s \varepsilon_k u^k) e^{\alpha_1 u^1 + \dots + \alpha_n u^n} = 0.$$

Из последнего следует, что $\alpha_k = 0$. Тогда $W = c(w, x^{n+1})$. Подставляем найденное в (2.4) и дифференцируем по x_i^{n+1} и по x_j^{n+1}:

$$\frac{W'_{x^{n+1}}(i)}{W(j)} = 2\theta\varphi_\theta, \quad -\frac{W(i) W'_{x^{n+1}}(j)}{W^2(j)} = 2\theta\varphi_\theta.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем

$$\frac{W'_{x^{n+1}}(i)}{W(i)} + \frac{W'_{x^{n+1}}(j)}{W(j)} = 0.$$

После разделения переменных имеем $W'_{x^{n+1}} = 0$, тогда $W = c(w)$. Подставляя найденное в (2.3), получим равенство

$$c(w_i) \frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i} + c(w_j) \frac{\partial f(i,j)}{\partial w_j} = 0.$$

Делаем замену $\int dw/c(w) = \overline{w}$. Тогда в новых координатах $W = 1$.

Таким образом, произвольный оператор алгебры Ли группы движений геометрии с метрической функцией (1.2) имеет вид

$$X = (\varepsilon_k a_k (\varepsilon_1 (x_1)^2 + \dots + \varepsilon_n (x^n)^2) - 2x^k (a_1 x^1 + \dots + a_n x^n) - \varepsilon_k c_{ks} x^s - 2bx^k + c^k) \partial_{x^k} + \\ + (a_1 x^1 + \dots + a_n x^n + b) \partial_{x^{n+1}} + \partial_{\overline{w}}.$$

Видно, что этот оператор является линейной комбинацией $(n+1)(n+2)/2 + 1$ базисных операторов, которых должно быть $(n+2)(n+3)/2$. Противоречие. □

Лемма 2. *В тождестве* (2.1) $W \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное, пусть в (2.1) $W = 0$. Тогда из леммы 1 следует, что $\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta} = 0$. Это противоречит условию невырожденности (1.4) метрической функции (1.2). □

Лемма 3. *В тождестве* (2.1) *для функции* $W(x^1, \dots, x^{n+1}, w)$ *справедливо неравенство*

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial W}{\partial x^{n+1}}\right)^2 \neq 0.$$

Доказательство. Предположим противное, т. е. $W = W(w) \neq 0$. Тогда в (2.1) осуществляем замену координат $\int dw/W(w) = \overline{w}$. Очевидно, что в новых координатах $W(\overline{w}) = 1$. В результате (2.1) примет вид

$$2p(i,j)e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta} + \frac{\partial f(i,j)}{\partial \overline{w}_i} + \frac{\partial f(i,j)}{\partial \overline{w}_j} = 0.$$

Разделив последнее тождество на ненулевую производную $\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta}e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}$, получаем функциональное уравнение

$$\begin{gathered}\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_1(i) - X_1(j)) + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_n(i) - X_n(j)) + \\ +\vartheta(i,j)(X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)) = \phi(\theta, x_i^{n+1}, x_j^{n+1}, \overline{w}_i, \overline{w}_j),\end{gathered} \tag{2.5}$$

где

$$\phi(\theta, x_i^{n+1}, x_j^{n+1}, \overline{w}_i, \overline{w}_j) = -\Big(\frac{\partial f(i,j)}{\partial \overline{w}_i} + \frac{\partial f(i,j)}{\partial \overline{w}_j}\Big)/2\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta}e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}.$$

Затем решаем уравнение (2.5) методом, описанным подробно при доказательстве леммы 1. Тождество (2.5) дифференцируем по x_i^k, по x_j^k:

$$\left\{\begin{gathered}\varepsilon_k(X_k(i) - X_k(j)) + \varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)X_{1x^k}(i) + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)X_{nx^k}(i) + \\ +2\varepsilon_k(x_i^k - x_j^k)(X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)) + \vartheta X_{(n+1)x^k}(i) = \\ = 2\varepsilon_k(x_i^k - x_j^k)\phi_\theta(\theta, x_i^{n+1}, x_j^{n+1}, \overline{w}_i, \overline{w}_j)e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}, \\ \varepsilon_k(X_k(i) - X_k(j)) + \varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)X_{1x^k}(j) + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)X_{nx^k}(j) + \\ +2\varepsilon_k(x_i^k - x_j^k)(X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)) - \vartheta X_{(n+1)x^k}(j) = \\ = 2\varepsilon_k(x_i^k - x_j^k)\phi_\theta(\theta, x_i^{n+1}, x_j^{n+1}, \overline{w}_i, \overline{w}_j)e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}.\end{gathered}\right. \tag{2.6}$$

Из первого уравнения вычитаем второе:

$$\begin{gathered}\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_{1x^k}(i) - X_{1x^k}(j)) + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_{nx^k}(i) - X_{nx^k}(j)) + \\ +\vartheta(X_{(n+1)x^k}(i) + X_{(n+1)x^k}(j)) = 0.\end{gathered}$$

Теперь полученное равенство дифференцируем дважды в следующем порядке: по x_i^m и x_j^s; x_i^m и $\overline{w}_j$; x_i^m и x_j^{n+1}:

$$\left\{\begin{gathered}-\varepsilon_m X_{mx^kx^s}(j) - \varepsilon_s X_{sx^kx^m}(i) + 2\varepsilon_m(x_i^m - x_j^m)X_{(n+1)x^kx^s}(j) - \\ -2\varepsilon_s(x_i^s - x_j^s)X_{(n+1)x^kx^m}(i) = 0, \quad m \neq s, \\ X_{mx^kx^m}(j) + X_{mx^kx^m}(i) + 2(x_i^m - x_j^m)(X_{(n+1)x^kx^m}(i) - X_{(n+1)x^kx^m}(j)) + \\ +2(X_{(n+1)x^k}(i) + X_{(n+1)x^k}(j)) = 0, \\ X_{mx^k\overline{w}}(j) + 2(x_i^m - x_j^m)X_{(n+1)x^k\overline{w}}(j) = 0, \\ \varepsilon_m X_{mx^kx^{n+1}}(j) + 2\varepsilon_m(x_i^m - x_j^m)X_{(n+1)x^kx^{n+1}}(j) = 0.\end{gathered}\right. \tag{2.7}$$

Из третьего уравнения системы (2.7) получаем $X_{mx^k\overline{w}} = 0$, $X_{(n+1)x^k\overline{w}} = 0$. Дифференцируя первое уравнение в (2.7) по x_i^m и по x_j^s, а второе уравнение по x_i^m и по x_j^m, затем разделяем переменные: $X_{(n+1)x^kx^sx^m} = 0$. Четвёртое уравнение системы (2.7) дифференцируем по x_i^m и учитываем предыдущее:

$$X_{(n+1)x^kx^{n+1}} = 0, \quad X_{(n+1)x^kx^m} = a_{km} = a_{mk}, \quad X_{mx^kx^{n+1}} = 0.$$

Тогда $X_{(n+1)x^k} = a_{k1}x^1 + \dots + a_{kn}x^n + p_k$, $a_{km}, p_k = \mathrm{const}$. С учётом последнего, первое и второе уравнения системы (2.7) принимают вид

$$\begin{gathered}-\varepsilon_m X_{mx^kx^s}(j) - \varepsilon_s X_{sx^kx^m}(i) - 2\varepsilon_s x_i^s a_{km} + 2\varepsilon_m x_i^m a_{ks} - 2\varepsilon_m x_j^m a_{ks} + 2\varepsilon_s x_j^s a_{km} = 0, \\ X_{mx^kx^m}(j) + X_{mx^kx^m}(i) + 2(a_{k1}x_i^1 + \dots + a_{kn}x_i^n + a_{k1}x_j^1 + \dots + a_{kn}x_i^n + 2p_k) = 0,\end{gathered}$$

причём $m \neq s$. Разделяя переменные, имеем

$$X_{mx^kx^s} = -2x^m a_{ks} + 2\varepsilon_s\varepsilon_m x^s a_{km} + \varepsilon_m c_{mks},\ c_{mks} = c_{msk} = -c_{skm} = \mathrm{const}, \quad m \neq s,$$
$$X_{mx^kx^m} = -2(a_{k1}x^1 + \cdots + a_{kn}x^n + p_k).$$

Легко проверить, что $c_{mks} = -c_{skm} = -c_{smk} = c_{kms} = c_{ksm} = -c_{msk}$, с другой стороны $c_{mks} = c_{msk}$, поэтому $c_{mks} = 0$. Тогда имеем

$$X_{mx^kx^s} = -2x^m a_{ks} + 2\varepsilon_m\varepsilon_s x^s a_{km}, \quad m \neq s, \quad X_{mx^kx^m} = -2(a_{k1}x^1 + \cdots + a_{kn}x^n + p_k),$$
$$X_{mx^k\overline{w}} = 0, \quad X_{mx^kx^{n+1}} = 0, \quad a_{km} = a_{mk}.$$

Теперь интегрируем полученное:

$$X_{mx^k} = \varepsilon_m a_{mk}(\varepsilon_1(x^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x^n)^2) - 2x^m(a_{k1}x^1 + \cdots + a_{kn}x^n + p_k),$$
$$X_{(n+1)x^k} = a_{k1}x^1 + \cdots + a_{kn}x^n + p_k.$$

Интегрируя последнее, имеем

$$X_m = X_m(x^1, \ldots, x^n) + A_m(x^{n+1}, \overline{w}),$$
$$X_{n+1} = X_{n+1}(x^1, \ldots, x^n) + p_1x^1 + \cdots + p_nx^n + B(x^{n+1}, \overline{w}).$$

Найденные выражения подставляем в (2.6), умножаем на $\varepsilon_m(x_i^m - x_j^m)$ и вычитаем равенство, полученное из (2.6) переобозначением индекса $k \to m$, умноженное на $\varepsilon_k(x_i^k - x_j^k)$, причём, $m \neq k$, после чего сравниваем коэффициенты перед степенями x^m. Тогда будем иметь $A_m, B = \mathrm{const}$. В итоге получаем произвольный оператор алгебры Ли группы движений, зависящий от $n(n+5)/2+1$ постоянных a_{mk}, p_k, A_m, B, среди которых независимых постоянных $\omega \leq n(n+5)/2+1$. Придавая этим постоянным значения 0 и 1, получаем базис, состоящий из $\omega + 1 < (n+2)(n+3)/2$ операторов. Противоречие. □

Функциональное уравнение (2.1) удобно переписать в виде

$$\begin{gathered}\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_1(i) - X_1(j)) + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_n(i) - X_n(j)) + \\ +[\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2](X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)) + \\ +W(i)F_1e^{-2x_i^{n+1} - 2x_j^{n+1}} + W(j)F_2e^{-2x_i^{n+1} - 2x_j^{n+1}} = 0,\end{gathered} \tag{2.8}$$

где введены обозначения

$$F_1(\theta, w_i, w_j) = \frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i} / 2\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta}, \quad F_2(\theta, w_i, w_j) = \frac{\partial f(i,j)}{\partial w_j} / 2\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta}. \tag{2.9}$$

Из (1.4) очевидно следует аналитичность функций (2.9) и справедливость неравенств $F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$ в $U(i) \times U(j)$. Тогда имеем разложение в ряд Тейлора [8, гл. 11]

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(\theta, w_i, w_j) = f_1(w_i, w_j) + D_1(f_1)(w_i, w_j)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f_1)(w_i, w_j)\theta^2 + \cdots, \\ F_2(\theta, w_i, w_j) = f_2(w_i, w_j) + D_1(f_2)(w_i, w_j)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f_2)(w_i, w_j)\theta^2 + \cdots \end{array}\right. \tag{2.10}$$

Разложения (1.7) и (2.10) подставляем в тождество (2.8) и сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных $x_i^1, \ldots, x_i^{n+1}$, $x_j^1, \ldots, x_j^{n+1}$. Эта задача существенно упрощается с применением математического пакета программ MAPLE 17 ([9], гл. 8). Программа, написанная для решения поставленной задачи в случае $n = 2$, имеет следующий вид:

$$X1(i) := mtaylor(X1(x_i, y_i, z_i, w_i), [x_i, y_i, z_i], 6):$$
$$X1(j) := mtaylor(X1(x_j, y_j, z_j, w_j), [x_j, y_j, z_j], 6):$$
$$X2(i) := mtaylor(X2(x_i, y_i, z_i, w_i), [x_i, y_i, z_i], 6):$$
$$X2(j) := mtaylor(X2(x_j, y_j, z_j, w_j), [x_j, y_j, z_j], 6):$$
$$X3(i) := mtaylor(X3(x_i, y_i, z_i, w_i), [x_i, y_i, z_i], 6):$$
$$X3(j) := mtaylor(X3(x_j, y_j, z_j, w_j), [x_j, y_j, z_j], 6):$$
$$W(i) := mtaylor(W(x_i, y_i, z_i, w_i), [x_i, y_i, z_i], 6):$$
$$W(j) := mtaylor(W(x_j, y_j, z_j, w_j), [x_j, y_j, z_j], 6):$$
$$F1 := mtaylor(f1(m, w_i, w_j), m, 3) - mtaylor(f1(m, w_i, w_j), m, 0):$$
$$F2 := mtaylor(f2(m, w_i, w_j), m, 3) - mtaylor(f2(m, w_i, w_j), m, 0):$$

$$e := e1 * (x_i - x_j) * (X1(i) - X1(j)) + e2 * (y_i - y_j) * (X2(i) - X2(j)) +$$
$$+(e1 * (x_i - x_j)^2 + e2 * (y_i - y_j)^2) * (X3(i) + X3(j)) + (W(i) * F1 + W(j) * F2)/G:$$
$$p := simplify(e):$$
$$tt := collect(p, [x_i, x_j, y_i, y_j, z_i, z_j, m], distributed):$$
$$ttt := subs(m = G * (e1 * (x_i - x_j)^2 + e2 * (y_i - y_j)^2), tt):$$
$$kk := simplify(ttt):$$
$$subs(x_i = 0, x_j = 0, y_i = 0, y_j = 0, z_i = 0, z_j = 0, kk):$$
$$subs(x_i = 0, x_j = 0, y_i = 0, y_j = 0, z_i = 0, z_j = 0, diff(kk, x_i)):$$
$$subs(x_i = 0, x_j = 0, y_i = 0, y_j = 0, z_i = 0, z_j = 0, diff(kk, x_i, x_i)):$$

Аналогично можно написать программу и для любого n.

Сравнивая коэффициенты перед одинаковыми степенями произведений переменных $x_i^1, \ldots, x_i^{n+1}$, $x_j^1, \ldots, x_j^{n+1}$, сначала замечаем, что

$$D_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(w_i) f_1(w_i, w_j) = 0, \quad D_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(w_j) f_2(w_i, w_j) = 0,$$

где $\alpha_l = 1, 2, \ldots, n+1$, $l = 1, 2, \ldots$ Из леммы 2 вытекает, что в последовательности $D_1(w)$, $D_2(w)$, $D_3(w)$, $D_{11}(w)$, $D_{12}(w), \ldots$ есть хотя бы одна ненулевая компонента, следовательно, $f_1(w_i, w_j) = f_2(w_i, w_j) = 0$. Также заметим, что

$$D_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(w_i) D_{\gamma_1\gamma_2\cdots}(f_1)(w_i, w_j) = 0, \quad D_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(w_j) D_{\gamma_1\gamma_2\cdots}(f_2)(w_i, w_j) = 0,$$

где $\gamma_l = 1$, $l = 1, 2, \ldots$ Из сделанного выше замечания тогда следует, что

$$D_{\gamma_1\gamma_2\cdots}(f_1)(w_i, w_j) = D_{\gamma_1\gamma_2\cdots}(f_2)(w_i, w_j) = 0,$$

поэтому $(D_1(f_1)(w_i, w_j))^2 + (D_1(f_2)(w_i, w_j))^2 = 0$.

Из разложения в ряд Тейлора равенства (2.8) следует, что

$$D_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(w_i) D_1(f_1)(w_i, w_j) = p_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(w_i), \quad D_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(w_j) D_1(f_2)(w_i, w_j) = p_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(w_j),$$

где $\alpha_l = 1, 2 \ldots, n+1$, $l = 1, 2, \ldots$ Дифференцируя полученное по w_j и w_i соответственно, имеем

$$D_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(w_i) \frac{\partial D_1(f_1)(w_i, w_j)}{\partial w_j} = 0, \quad D_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(w_j) \frac{\partial D_1(f_2)(w_i, w_j)}{\partial w_i} = 0,$$

следовательно,

$$\frac{\partial D_1(f_1)(w_i, w_j)}{\partial w_j} = 0, \quad \frac{\partial D_1(f_2)(w_i, w_j)}{\partial w_i} = 0.$$

Интегрируя найденное и возвращаясь в предыдущее, получим

$$D_1(f_1)(w_i,w_j)=D_1(f_1)(w_i),\ D_1(f_2)(w_i,w_j)=D_1(f_2)(w_j),\ D_1(f_1)(w)=D_1(f_2)(w)\neq 0.$$

С учётом полученного, из (2.10) и (2.9) получаем равенства

$$F_1(\theta,w_i,w_j)=\frac{\partial f}{\partial w_i}/2\frac{\partial f}{\partial\theta}=D_1(f_1)(w_i)\theta,\ F_2(\theta,w_i,w_j)=\frac{\partial f}{\partial w_j}/2\frac{\partial f}{\partial\theta}=D_1(f_1)(w_j)\theta,$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{D_1(f_1)(w_i)}\frac{\partial f}{\partial w_i}=2\theta\frac{\partial f}{\partial\theta},\quad \frac{1}{D_1(f_1)(w_j)}\frac{\partial f}{\partial w_j}=2\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}. \tag{2.11}$$

Интегрируя первое уравнение системы (2.11), будем иметь $f=\varphi(\theta e^{K(w_i)},w_j)$, где $K(w)=2\int D_1(f_1)(w)dw$. Подставляем найденное во второе уравнение системы (2.11):

$$\frac{1}{D_1(f_1)(w_j)}\frac{\partial\varphi}{\partial w_j}=2u\frac{\partial\varphi}{\partial u},\quad u=\theta e^{K(w_i)}.$$

Интегрируя последнее уравнение, приходим к метрической функции

$$\begin{gathered}f(i,j)=\psi\big(\theta e^{K(w_i)+K(w_j)}\big)=\\ =\psi\left(\left[\varepsilon_1(x_i^1-x_j^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_i^n-x_j^n)^2\right]e^{2x_i^{n+1}+K(w_i)+2x_j^{n+1}+K(w_j)}\right).\end{gathered}$$

Полученная метрическая функция явно вырождена, поскольку замена координат $v=2x^{n+1}+K(w)$ приводит к уменьшению входящих в неё переменных:

$$f(i,j)=\psi\left(\left[\varepsilon_1(x_i^1-x_j^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_i^n-x_j^n)^2\right]e^{v_i+v_j}\right).$$

Таким образом, сформулированная выше теорема доказана.

Заключение

Поставленная задача об аналитическом вложении полностью решена. Следует отметить, что эта задача является частью большой задачи вложения, в рамках которой находятся, например, все геометрии локальной подвижности с метрическими функциями вида

$$\begin{gathered}f(i,j)=\chi\left(\left[\varepsilon_1(x_i^1-x_j^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_i^n-x_j^n)^2\right]e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}+\right.\\ \left.+\varepsilon e^{2x_i^{n+1}-2x_j^{n+1}}+\varepsilon e^{-2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}},w_i,w_j\right).\end{gathered}$$

Выражаю благодарность Михайличенко Геннадию Григорьевичу за поддержку и обсуждение полученных результатов.

Список литературы

1. **Михайличенко, Г. Г.** Групповая и феноменологическая симметрия в геометрии / Г. Г. Михайличенко // Сиб. мат. журн. — 1984. — Т. 25, № 5. — С. 99–113.
2. **Михайличенко, Г. Г.** Математические основы и результаты теории физических структур / Г. Г. Михайличенеко. — Горно-Алтайск : ГАГУ, 2016. — 296 с.
3. **Михайличенко, Г. Г.** Двумерные геометрии / Г. Г. Михайличенко // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 24, № 2. — С. 346–348.

4. **Кыров, В. А.** Функциональные уравнения в псевдоевклидовой геометрии / В. А. Кыров // Сиб. журн. индустр. математики. — 2010. — Т. 13, № 4. — С. 38–51.
5. **Кыров, В. А.** Аналитический метод вложения евклидовой и псевдоевклидовой геометрий / В. А. Кыров, Г. Г. Михайличенко // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2017. — Т. 23, № 2. — С. 167–181.
6. **Кыров, В. А.** Аналитический метод вложения симплектической геометрии / В. А. Кыров, Г. Г. Михайличенко // Сиб. электрон. мат. изв. — 2017. — Т. 14 — С. 657–672.
7. **Овсянников, Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400 с.
8. **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. — М. : Физматлит, 1963. — 524 с.
9. **Дьяков, В. П.** Maple 10/11/12/13/14 в математических расчётах / В. П. Дьяконов. — М. : ДМК Пресс, 2011. — 802 с.

Поступила в редакцию 11.03.2018
После переработки 25.07.2018

Сведения об авторе

Кыров Владимир Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики и информатики, Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия; e-mail: kyrovVA@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2018. Vol. 3, iss. 4. P. 408–420.

DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13403

THE EMBEDDING OF MULTIDIMENSIONAL SPECIAL EXTENSIONS OF PSEUDO-EUCLIDEAN GEOMETRIES

V. A. Kyrov

Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russia
kyrovVA@yandex.ru

For modern science, the study of geometries of local maximum mobility is of particular importance, including Euclidean and pseudo-Euclidean geometries, symplectic geometry, and geometries of constant curvature. There is no complete classification of such geometries at the exist. The author of this article developed a method, called the method of embedding, which makes it possible to carry out such a classification. The essence of this method consists in finding functions that define geometries of dimension $n+1$ using known functions that define geometries of dimension n. In this case, the desired function as an argument contains a known function of dimension geometry n and two more variables. In addition, the requirement of local invariance of this function with respect to the transformation group with $(n+1)(n+2)/2$ parameters is imposed. Then the condition of local invariance is written, from which the functional-differential equation is derived to the desired function. In this paper, the solutions of this equation are sought analytically, in the form of Taylor row. The problem formulated for pseudo-Euclidean geometry has three classes of solutions (geometries of local maximum mobility): pseudo-Euclidean geometry, special expansion of pseudo-Euclidean geometries, geometry on the pseudo sphere. In this paper we pose the embedding problem for special extensions of pseudo-Euclidean geometries. It is proved that the solutions of this problem are not the geometries of the local maximum mobility.

Keywords: *functional equation, differential equation, metric function, geometry.*

References

1. **Mikhailichenko G.G.** Group and phenomenological symmetries in geometry. *Siberian Mathematical Journal*, 1984, vol. 25, no. 5, pp. 764–774.
2. **Mikhailichenko G.G.** *Matematicheskiye osnovy i rezul'taty teorii fizicheskikh struktur* [The mathematical basics and results of the theory of physical structures]. Gorno-Altaisk, Gorno-Altaysk State University, 2016. 296 p. (In Russ.).
3. **Mikhailichenko G.G.** Dvumernye geometrii [Two-dimensional geometries]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1981, vol. 24, no. 2, pp. 346–348. (In Russ.).
4. **Kyrov V.A.** Funktsional'nye uravneniya v psevdoyevklidovoy geometrii [Functional equations in pseudo-Euclidean geometry]. *Sibirskiy znurnal Industrial'noy matematiki* [Siberian journal of industrial mathematics], 2010, vol. 13, no. 4, pp. 38–51. (in Russ).
5. **Kyrov V.A., Mikhailichenko G.G.** Analiticheskiy metod vlozheniya yevklidovoy i psevdoyevklidovoy geometriy [An analytic method for the embedding of the Euclidean and pseudo-Euclidean geometries]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of RAS], 2017, vol. 23, no. 2, pp. 167–181. (In Russ).
6. **Kyrov V.A., Mikhailichenko G.G.** Analiticheskiy metod vlozheniya simplekticheskoy geometrii [The analytic method of the symplectic geometry embedding]. *Sibirskiye elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2017, vol. 14, pp. 657–672. (In Russ).

7. **Ovsyannikov L.V.** *Group Analysis of Differential Equations.* New York, Academic Press, 1982. 432 p.
8. **Fikhtengolts G.M.** *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [A course of differential and integral calculus]. Vol. 2. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 524 p. (In Russ.).
9. **Dyakonov V.P.** *Maple 10/11/12/13/14 v matematicheskikh raschyotakh* [Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations]. Moscow, DMK Press Publ., 2011. 802 p. (In Russ.).

Accepted article received 11.03.2018
Corrections received 25.07.2018