Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3, вып. 4. С. 395–407.

УДК 517.953 DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13402

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А. И. Кожанов[1,a], **А. Х. Кодзоков**[2,b]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2]*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик, Россия*
[a]*kozhanov@math.nsc.ru*, [b]*kodzoko@mail.ru*

В работе изучаются дифференциальные уравнения с кратными характеристиками (дифференциальные уравнения составного типа) вида

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}(u_t - \alpha u_x) + \beta\Delta_y u + \gamma u = f(x, y, t)$$

(α, β, γ — постоянные). Для данных уравнений предлагаются постановки новых краевых задач, для предложенных задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений. Техника доказательства основывается на методе регуляризации. Изучаемые в работе уравнения представляют по своей структуре уравнения, называемые в литературе уравнениями, не разрешенными относительно производной. Для изучаемых задач указываются некоторые возможные обобщения.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения с кратными характеристиками, краевые задачи, регулярные решения, существование и единственность решения.*

Введение

Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^m$ переменных $y_1, \dots, y_m$ с гладкой (для простоты — бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q есть область из пространства $\mathbb{R}^{m+2}$ переменных (x, y, t) таких, что $x \in (0, 1)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $0 < T < +\infty$. Далее, пусть $f(x, y, t)$ — заданная функция, определяемая при $(x, y, t) \in \bar{Q}$, α, β и γ — заданные действительные числа, Δ_y есть оператор Лапласа по переменным $y_1, \dots, y_m$, k — целое неотрицательное число.

В области Q рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}}(u_t - \alpha u_x) + \beta\Delta_y u + \gamma u = f(x, y, t). \tag{1}$$

При $k = 0$, $\alpha \neq 0$ оно представляет собой модель линеаризованного уравнения Линя — Рейснера — Цзяня [1–3]. Задача Коши и начально-краевые задачи для подобных уравнений изучались в работах [4–7]. В случае $k = 0$, $\alpha = 0$, $m = 1$ для уравнения (1) изучалась разрешимость задачи Коши в работах [8; 9]. Заметим, что (1) можно трактовать как уравнение, не разрешённое относительно производной по времени.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 18-51-41009).

По своей структуре изучаемые в работе уравнения имеют некоторое сходство с линеаризованными уравнениями Кадомцева — Петвиашвили [10]; краевые задачи для подобных уравнений изучались в работах [11; 12].

В настоящей работе будут изучаться уравнения вида (1), представляющие собой как обобщение уравнений Линя — Рейснера — Цзяня, так и уравнений, исследовавшихся в [8; 9]. Более точно, в работе будут изучаться уравнения (1) в случаях: а) $k = 1$, $\alpha > 0$; б) $k = 1$, $\alpha = 0$. Случай $k = 1$, $\alpha < 0$ отдельно рассмотрен не будет вследствие того, что он очевидным образом сводится к случаю а). Заметим также следующее. Изучаемые в работе уравнения имеют модельный вид. Вместе с тем полученные ниже результаты легко можно перенести на уравнения (1), в которых α, β и γ есть функции переменных x, y, t, оператор Лапласа Δ_y заменен более общим эллиптическим оператором, действующим по переменным $y_1, \dots, y_m$, в уравнение (1) добавлены младшие члены, и т. п. Что же касается случая $k > 1$, то подходы, представленные ниже, вполне позволяют предложить для него постановки краевых задач, аналогичные приведённым ниже, и исследовать их корректность.

Итак, в настоящей работе будет изучаться разрешимость в области Q краевых задач для уравнений (1) в случае $k = 1$, $\alpha \geq 0$. В случае $\alpha = 0$ разрешимость (существование и единственность решения) будет установлена в пространстве V_0 с нормой

$$\|v\|_{V_0} = \left\{ \int\limits_Q \left(v^2 + v_{xxxt}^2 + \sum_{i,j=1}^m v_{y_i y_j}^2 \right) dxdydt \right\}^{1/2},$$

в случае $\alpha > 0$ — в пространстве V_1, норма в котором определяется равенством

$$\|v\|_{V_1} = \left\{ \int\limits_Q \left(v^2 + v_{xxxt}^2 + v_{xxxx}^2 + \sum_{i,j=1}^m v_{y_i y_j}^2 \right) dxdydt \right\}^{1/2}.$$

Здесь и далее все производные понимаются как обобщённые по С. Л. Соболеву производные. Очевидно, что пространства V_0 и V_1 будут банаховыми.

1. Постановка задач

В области Q рассмотрим уравнение (1) в случае а), при этом для простоты будем считать, что выполняется условие $\alpha = 1$. Через L_1 обозначим дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, y, t)$ определяется равенством

$$L_1 v = v_{xxxt} - v_{xxxx} + \beta \Delta_y v + \gamma v.$$

Краевая задача I: *найти функцию $u(x, y, t)$, являющуюся в области Q решением уравнения*

$$L_1 u = f(x, y, t) \tag{2}$$

и удовлетворяющую условиям

$$u(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in (0, 1) \times \Omega, \tag{3}$$

$$u(0, y, t) = u_x(0, y, t) = 0, \quad (y, t) \in \Omega \times (0, T), \tag{4}$$

$$u_{xx}(1, y, t) = u_{xxx}(1, y, t) = 0, \quad (y, t) \in \Omega \times (0, T), \tag{5}$$

$$u(x, y, t)|_{x \in (0,1),\, y \in \Gamma,\, t \in (0,T)} = 0. \tag{6}$$

Краевая задача II: *найти функцию $u(x,y,t)$, являющуюся в области Q решением уравнения* (2) *и такую, что для неё выполняются условия* (3) *и* (6), *а также условия*

$$u(0,y,t)=0, \quad (y,t)\in(0,1)\times\Omega,$$

$$u_x(1,y,t)=u_{xx}(1,y,t)=u_{xxx}(1,y,t)=0, \quad (y,t)\in(0,1)\times\Omega.$$

Краевая задача III: *найти функцию $u(x,y,t)$, являющуюся в области Q решением уравнения* (2) *и такую, что для неё выполняются условия* (3) *и* (6), *а также условия*

$$u(0,y,t)=u(1,y,t)=0, \quad (y,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{7}$$

$$u_{xx}(0,y,t)=u_{xx}(1,y,t)=0, \quad (y,t)\in\Omega\times(0,T). \tag{8}$$

Рассмотрим теперь уравнение (1) в случае б). Через L_0 обозначим дифференциальный оператор, действие которого определяется равенством

$$L_0v=v_{xxxt}+\beta\Delta_y v+\gamma v.$$

Краевая задача IV: *найти функцию $u(x,y,t)$, являющуюся в области Q решением уравнения*

$$L_0u=f(x,y,t), \tag{9}$$

удовлетворяющую условиям (3), (4) *и* (6), *а также условию*

$$u_{xx}(1,y,t)=0, \quad (y,t)\in\Omega\times(0,T). \tag{10}$$

Краевая задача V: *найти функцию $u(x,y,t)$, являющуюся в области Q решением уравнения* (9) *и такую, что для неё выполняются условия* (3), (6) *и* (7), *а также условие*

$$u_{xx}(0,y,t)=0, \quad (y,t)\in\Omega\times(0,T). \tag{11}$$

2. Разрешимость краевых задач I–V

Исследование разрешимости краевых задач I–V будет проведено с помощью метода регуляризации, метода продолжения по параметру и априорных оценок.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$\beta>0, \quad \gamma<0. \tag{12}$$

Тогда для любой функции $f(x,y,t)$, такой, что $f(x,y,t)\in L_2(Q)$, $f_x(x,y,t)\in L_2(Q)$, $f(1,y,t)=0$ при $t\in(0,T)$, $y\in\Omega$, $\Delta_y f(x,y,t)\in L_2(Q)$, $f(x,y,t)=0$ при $x\in(0,1)$, $t\in(0,T)$, $y\in\Gamma$, краевая задача I имеет в пространстве V_1 решение, и при том ровно одно.

Доказательство. Пусть ε — положительное число, $L_{1,\varepsilon}$ есть дифференциальный оператор, действие которого определяется равенством

$$L_{1,\varepsilon}v=L_1v-\varepsilon v_{xxxxx}+\varepsilon\Delta_y^2 v_{xxx}.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,y,t)$, являющуюся в области Q решением уравнения*

$$L_{1,\varepsilon}u=f(x,y,t) \tag{13_ε}$$

и такую, что для неё выполняются условия (3)–(5), *а также условия*

$$u_{xxxx}(0,y,t)=0, \quad (y,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{14}$$

$$\Delta_y u(x,y,t)|_{x\in(0,1),\, y\in\Gamma,\, t\in(0,T)}=0. \tag{15}$$

Прежде всего покажем, что при фиксированном ε и при функции $f(x,y,t)$ из пространства $L_2(Q)$ краевая задача (13_ε), (3)–(5), (14), (15) будет иметь решение $u(x,y,t)$, такое, что $u(x,y,t)\in V_1$, $\Delta_y^2 u(x,y,t)\in L_2(Q)$.

Воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть λ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим задачу: *найти функцию* $u(x,y,t)$, *являющуюся в области* Q *решением уравнения*

$$u_{xxxt}-\varepsilon u_{xxxxxx}+\varepsilon\Delta_y^2 u_{xxx}-\lambda\left(u_{xxxx}-\beta\Delta_y u-\gamma u\right)=f(x,y,t) \tag{$13_{\varepsilon,\lambda}$}$$

и такую, что для неё выполняются условия (3)–(5), (14) *и* (15). Согласно теореме о методе продолжения по параметру [13, ч. II, гл. 7, § 7.2; 14, гл. III, § 14], краевая задача ($13_{\varepsilon,\lambda}$), (3)–(5), (14), (15) при фиксированном ε и при всех λ из отрезка $[0,1]$ будет иметь решение $u(x,y,t)$, такое, что $u(x,y,t)\in V_1$, $\Delta_y^2 u_{xxx}(x,y,t)\in L_2(Q)$, если выполняются условия:

1) краевая задача ($13_{\varepsilon,0}$), (3)–(5), (14), (15) имеет решение, принадлежащее тому же классу;
2) для всевозможных решений $u(x,y,t)$ краевой задачи ($13_{\varepsilon,\lambda}$), (3)–(5), (14), (15), таких, что $u(x,y,t)\in V_1$, $\Delta_y^2 u_{xxx}(x,y,t)\in L_2(Q)$, выполняется оценка

$$\|u\|^2_{V_1}+\int\limits_Q\left(\Delta_y^2 u\right)^2 dxdydt+\int\limits_Q u^2_{xxxxxx}dxdydt+\int\limits_Q(\Delta_y u_{xxx})^2 dxdydt\le N_0\int\limits_Q f^2 dxdydt \tag{16}$$

с постоянной N_0, определяющейся лишь числами β, γ, T, ε и областью Ω.

Выполнение пункта 1) очевидно, поскольку краевая задача ($13_{\varepsilon,0}$), (3)–(5), (14), (15) представляет собой первую начально-краевую задачу для параболического относительно функции $w(x,y,t)=u_{xxx}(x,y,t)$ уравнения; найдя же функцию $u_{xxx}(x,y,t)$, нетрудно затем с помощью условия (4) и условия $u_{xx}(1,y,t)=0$ найти саму функцию $u(x,y,t)$ (принадлежность которой требуемому классу очевидна).

Покажем, что и пункт 2) выполняется. Рассмотрим последовательно равенства

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_\Omega\left[u_{xxxt}-\varepsilon u_{xxxxxx}+\varepsilon\Delta_y^2 u_{xxx}-\lambda\left(u_{xxxx}-\beta\Delta_y u-\gamma u\right)\right]u_{xxx}dxdyd\tau=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_\Omega f u_{xxx}dxdyd\tau, \tag{17}$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_\Omega\left[u_{xxxt}-\varepsilon u_{xxxxxx}+\varepsilon\Delta_y^2 u_{xxx}-\lambda\left(u_{xxxx}-\beta\Delta_y u-\gamma u\right)\right]\Delta_y u_{xxx}dxdyd\tau=$$

$$=-\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_\Omega f\Delta_y u_{xxx}dxdyd\tau, \tag{18}$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \left[u_{xxxt} - \varepsilon u_{xxxxxx} + \varepsilon \Delta_y^2 u_{xxx} - \lambda \left(u_{xxxx} - \beta \Delta_y u - \gamma u\right)\right] \Delta_y^2 u_{xxx} dx dy d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega f \Delta_y^2 u_{xxx} dx dy d\tau, \tag{19}$$

в которых t есть произвольное число из отрезка $[0, T]$. Интегрируя по частям слева, складывая полученные равенства, учитывая условие (12) и затем применяя неравенство Юнга и лемму Гроноулла, получим, что для решений $u(x, y, t)$ краевой задачи $(13_{\varepsilon,\lambda})$, (3)–(5), (14), (15) выполняется оценка

$$\int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \left\{ u_{xxx}^2(x,y,t) + \sum_{i=1}^m u_{xxxy_i}^2(x,y,t) + \left[\Delta u_{xxx}(x,y,t)\right]^2 \right\} dx dy +$$

$$+\varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \left\{ u_{xxxx}^2 + \sum_{i=1}^m u_{xxxxy_i}^2 + \left(\Delta_y u_{xxxx}\right)^2 + \sum_{i=1}^m \left(\Delta_y u_{xxxy_i}\right)^2 + \left(\Delta_y^2 u_{xxx}\right)^2 \right\} dx dy d\tau \leq$$

$$\leq N_1 \int\limits_Q f^2 dx dy dt, \tag{20}$$

в которой $t \in [0, T]$, постоянная N_1 определяется числами T и ε.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$-\int\limits_0^t \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \left[u_{xxxt} - \varepsilon u_{xxxxxx} + \varepsilon \Delta_y^2 u_{xxx} - \lambda \left(u_{xxxx} - \beta \Delta_y u - \gamma u\right)\right] u_{xxxxxx} dx dy d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega f u_{xxxxxx} dx dy d\tau, \tag{21}$$

в котором вновь t есть произвольное число из отрезка $[0, T]$. Интегрируя по частям, применяя неравенство Юнга и используя оценку (20), получим, что для решений $u(x, y, t)$ краевой задачи $(13_{\varepsilon,\lambda})$, (3)–(5), (14), (15) имеет место оценка

$$\int\limits_0^1 \int\limits_\Omega u_{xxxx}^2(x,y,t) dx dy + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega u_{xxxxxx}^2 dx dy d\tau \leq N_2 \int\limits_Q f^2 dx dy dt, \tag{22}$$

в которой вновь $t \in [0, T]$, постоянная N_2 определяется числами β, γ, T и ε.

Из оценок (20) и (22), а также из самого уравнения $(13_{\varepsilon,\lambda})$ очевидным образом следует, что имеет место третья оценка

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega u_{xxx\tau}^2 dx dy d\tau \leq N_3 \int\limits_Q f^2 dx dy dt, \tag{23}$$

в которой $t \in [0, T]$, постоянная N_3 определяется числами β, γ, T и ε.

Оценки (20), (22) и (23) и дают требуемую оценку (16). Следовательно, пункт 2) для краевой задачи $(13_{\varepsilon,\lambda})$, (3)–(5), (14), (15) выполняется. Вместе с выполнением пункта 1) это означает, что краевая задача (13_ε), (3)–(5), (14), (15) имеет решение $u(x,y,t)$, такое, что $u(x,y,t) \in V_1$, $\Delta_y^2 u_{xxx}(x,y,t) \in L_2(Q)$.

Итак, краевая задача (13_ε), (3)–(5), (14), (15) имеет решение $u^\varepsilon(x,y,t)$, принадлежащее указанному выше классу. Покажем, что для этого решения (а фактически для всего семейства $\{u^\varepsilon(x,y,t)\}_{\varepsilon>0}$ решений задач (13_ε), (3)–(5), (14), (15)) при выполнении всех условий теоремы на функцию $f(x,y,t)$ будет иметь место априорная оценка, равномерная по ε (индекс ε при получении оценок писать не будем).

Вновь рассмотрим равенства (17)–(19), но теперь в этих равенствах положим $\lambda = 1$. Интегрируя слева по частям так же, как раньше, и дополнительно в равенствах (18) и (19) интегрируя по частям справа по переменным $y_1,\dots,y_m$, далее, вновь применяя неравенство Юнга и лемму Гронуолла, получим, что для решений $u(x,y,t)$ выполняется оценка

$$\int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \Big\{ u_{xxx}^2(x,y,t) + \sum_{i=1}^m u_{xxxy_i}^2(x,y,t) + [\Delta u_{xxx}(x,y,t)]^2 \Big\} dxdy +$$

$$+\varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \Big\{ u_{xxxx}^2 + \sum_{i=1}^m u_{xxxxy_i}^2 + (\Delta u_{xxxx})^2 + \sum_{i=1}^m (\Delta u_{xxxy_i})^2 + \big(\Delta^2 u_{xxx}\big)^2 \Big\} dxdyd\tau \le$$

$$\le N_4 \int\limits_Q \left[f^2 + \sum_{i=1}^m f_{y_i}^2 + (\Delta_y f)^2 \right] dxdydt, \tag{24}$$

в которой $t \in [0,T]$, постоянная N_4 определяется лишь числом T.

Аналогично, рассматривая равенство (21), взятое при $\lambda = 1$, дополнительно интегрируя справа по частям (по переменной x), получим вторую априорную равномерную по ε оценку

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{xxxx}^2(x,y,t) dxdy + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega u_{xxxxx}^2 dxdyd\tau \le$$

$$\le N_5 \int\limits_Q \left[f^2 + \sum_{i=1}^m f_{y_i}^2 + (\Delta_y f)^2 + f_x^2 \right] dxdydt, \tag{25}$$

постоянная N_5 в которой определяется лишь числами β, γ и T.

Последняя требуемая оценка

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega u_{xxx\tau}^2 dxdyd\tau \le N_6 \int\limits_Q \left[f^2 + \sum_{i=1}^m f_{y_i}^2 + (\Delta_y f)^2 + f_x^2 \right] dxdydt \tag{26}$$

вновь очевидным образом вытекает из предыдущих; постоянная N_6 здесь определяется лишь числами β, γ и T.

Все необходимые равномерные по ε оценки получены. Покажем, что эти оценки дают возможность осуществить процедуру предельного перехода и в пределе получить решение краевой задачи I.

Выберем последовательность $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^\infty$, такую, что $\varepsilon_l > 0$, $\varepsilon_l \to 0$. Соответствующие решения краевых задач (13_{ε_l}), (3)–(5), (14), (15) будем обозначать $u_l(x,y,t)$.

Оценки (24)–(26) и свойство рефлексивности гильбертовых пространств означают, что существуют последовательности $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел и функция $u(x,y,t)$, такие, что при $k \to \infty$ имеет место слабая в пространстве $L_2(Q)$ сходимость последовательностей

$$u_{l_k}(x,y,t) \to u(x,y,t),\ u_{l_kxxxx}(x,y,t) \to u_{xxxx}(x,y,t),\ u_{l_kxxxt}(x,y,t) \to u_{xxxt}(x,y,t),$$

$$\Delta_y u_{l_k}(x,y,t) \to \Delta_y u(x,y,t),\ \varepsilon_{l_k} u_{l_kxxxxx}(x,y,t) \to 0,\ \varepsilon_{l_k} \Delta_y^2 u_{l_kxxx}(x,y,t) \to 0.$$

Заметим, что из свойства слабой замкнутости гильбертовых пространств следует, что предельные функции $u(x,y,t)$, $u_{xxxx}(x,y,t)$, $u_{xxxt}(x,y,t)$, $\Delta_y u(x,y,t)$ будут принадлежать пространству $L_2(Q)$. Далее, отсюда очевидным образом следует, что для предельной функции $u(x,y,t)$ будет выполняться уравнение (2) и краевые условия (3)–(5). Следовательно, предельная функция $u(x,y,t)$ будет искомым решением краевой задачи I.

Единственность решений краевой задачи следует из простейшего анализа равенства (17), взятого при $\varepsilon = 0$, $\lambda = 1$ и $f(x,y,t) \equiv 0$. Из этого равенства и граничных условий (3)–(5) вытекает $u(x,y,t) \equiv 0$ в Q. А это и означает единственность решений краевой задачи I.

Теорема полностью доказана. □

Теорема 2. *Пусть выполняется условие*

$$\beta < 0, \quad \gamma \geq 0.$$

Тогда для любой функции $f(x,y,t)$, такой, что $f(x,y,t) \in L_2(Q)$, $f_x(x,y,t) \in L_2(Q)$, $f(1,y,t) = 0$ при $t \in (0,T)$, $y \in \Omega$, $\Delta_y f(x,y,t) \in L_2(Q)$, $f(x,y,t) = 0$ при $x \in (0,1)$, $t \in (0,T)$, $y \in \Gamma$, краевая задача II имеет в пространстве V_1 решение, и при том ровно одно.

Доказательство этой теоремы проводится полностью аналогично доказательству теоремы 1.

Перейдем к исследованию разрешимости краевой задачи III. Прежде всего заметим, что в этой задаче, в отличие от задач I и II, стороны цилиндра Q $\{x = 0\}$ и $\{x = 1\}$ равноправны, и что эта задача требует применения иных подходов, нежели те, которые применялись при исследованиях разрешимости задач I и II (для сравнения см. работы [6] и [12]).

Теорема 3. *Пусть выполняется условие*

$$\beta < 0, \quad \gamma \geq 0.$$

Тогда для любой функции $f(x,y,t)$, такой, что $f(x,y,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,y,t) \in L_2(Q)$, $f_{tt}(x,y,t) \in L_2(Q)$, $f_x(x,y,t) \in L_2(Q)$, $f_{xt}(x,y,t) \in L_2(Q)$, $f(x,y,0) = 0$ при $x \in (0,1)$, $y \in \Omega$, $f(0,y,t) = f(1,y,t) = 0$ при $y \in \Omega$, $t \in (0,T)$, краевая задача III имеет в пространстве V_1 решение, и при том ровно одно.

Доказательство. Вновь воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру. Для произвольного числа ε и для числа λ из отрезка $[0,1]$ определим оператор $L_{1,\varepsilon,\lambda}$ с помощью равенства

$$L_{1,\varepsilon,\lambda} u = \varepsilon(u_{xxtt} - u_{xxxxt} - \Delta_y u_{xxt}) + \lambda L_1 u.$$

Рассмотрим семейство краевых задач: *найти функцию* $u(x,y,t)$*, являющуюся в области* Q *решением уравнения*

$$L_{1,\varepsilon,\lambda}u = f(x,y,t) \qquad (27_{\varepsilon,\lambda})$$

и такую, что для неё выполняются условия (3), (6)–(8)*, а также условие*

$$u_t(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in (0,1)\times\Omega. \qquad (28)$$

Через $W^{2,2,1}_{2,x,y,t}(Q)$ обозначим линейное пространство функций $v(x,y,t)$, принадлежащих пространству $L_2(Q)$ и таких, что их обобщённые производные $v_x(x,y,t)$, $v_{xx}(x,y,t)$, $v_{y_i}(x,y,t)$, $v_{y_i,y_j}(x,y,t)$, $i,j=1\dots m$, $v_t(x,y,t)$ существуют и также принадлежат $L_2(Q)$, с нормой

$$\|v\|_{W^{2,2,1}_{2,x,y,t}(Q)} = \left\{\int\limits_Q \left(v^2 + v_x^2 + v_{xx}^2 + \sum_{i=1}^m v_{y_i}^2 + \sum_{i,j=1}^m v_{y_iy_j}^2 + v_t^2\right)dxdydt\right\}^{1/2}.$$

Далее, определим пространства V_2, V_3 и $\mathfrak{F}$:

$$V_2 = \left\{v(x,y,t) : v(x,y,t) \in V_1, v_{xxt}(x,y,t) \in W^{2,2,1}_{2,x,y,t}(Q)\right\},$$

$$V_3 = \{v(x,y,t) : v(x,y,t) \in V_2, v_t(x,y,t) \in V_2\},$$

$$\mathfrak{F} = \{v(x,y,t) : v(x,y,t) \in L_2(Q), v_t(x,y,t) \in L_2(Q), v(x,y,0) = 0, x \in (0,1), y \in \Omega\}.$$

Зададим нормы в этих пространствах:

$$\|v\|_{V_2} = \left(\|v\|^2_{V_1} + \|v_{xxt}\|^2_{W^{2,2,1}_{2,x,y,t}(Q)}\right)^{1/2},$$

$$\|v\|_{V_3} = \left(\|v\|^2_{V_2} + \|v_t\|^2_{V_2}\right)^{1/2}, \ \|v\|_{\mathfrak{F}} = \left(\|v\|^2_{L_2(Q)} + \|v_t\|^2_{L_2(Q)}\right)^{1/2}.$$

Очевидно, что все определённые выше пространства будут банаховыми.

Покажем с помощью теоремы о методе продолжения по параметру, что краевая задача $(27_{\varepsilon,\lambda})$, (3), (6)–(8), (28) при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x,y,t)$ пространству $\mathfrak{F}$ будет разрешима в пространстве V_3 для любого числа λ из отрезка $[0,1]$.

Прежде всего заметим, что краевая задача $(27_{\varepsilon,0})$, (3), (6)–(8), (28) при фиксированном ε и при функции $f(x,y,t)$ из пространства $\mathfrak{F}$ имеет решение $u(x,y,t)$, принадлежащее пространству V_3 — это следует из общей теории параболических уравнений [15; 16], поскольку краевая задача $(27_{\varepsilon,0})$, (6), (8), (28) представляет собой первую начально-краевую задачу для параболического уравнения относительно функции $w(x,y,t) = u_{xxt}(x,y,t)$; найдя же функцию $w(x,y,t)$, нетрудно с помощью условий (3) и (7) найти и саму функцию $u(x,y,t)$.

Далее, необходимая априорная оценка

$$\|u\|_{V_3} \le C_0\|f\|_{\mathfrak{F}}, \qquad (29)$$

равномерная по λ, всевозможных решений $u(x,y,t)$ краевой задачи $(27_{\varepsilon,\lambda})$, (3), (6)–(8), (28) также является очевидной, поскольку она представляет собой обычную энергетическую оценку [15; 16] решений первой начально-краевой задачи для параболического относительно функции $u_{xxt}(x,y,t)$ уравнения с подчинёнными младшими членами, а также для этого же уравнения, продифференцированного по переменной t (уточним лишь, что необходимое для продифференцированного уравнения условие $u_{tt}(x,y,0)=0$ очевидным образом вытекает из условия (3) и из условия $f(x,y,0)=0$).

Как уже говорилось выше, из разрешимости в пространстве V_3 задачи $(27_{\varepsilon,0})$, (3), (6)–(8), (28), оценки (29) и теоремы о методе продолжения по параметру следует, что краевая задача $(27_{\varepsilon,1})$, (3), (6)–(8), (28) будет иметь решение $u^\varepsilon(x,y,t)$, принадлежащее пространству V_3. Покажем, что для семейства $\{u^\varepsilon(x,y,t)\}_{\varepsilon>0}$ имеет место априорная оценка, равномерная по ε и позволяющая организовать процедуру предельного перехода.

Положим $G=(0,1)\times\Omega$. Интегрируя по частям в равенствах

$$\int_0^t\int_G L_{1,\varepsilon,1}u^\varepsilon u^\varepsilon_{xx\tau}\,dxdyd\tau=\int_0^t\int_G fu^\varepsilon_{xx\tau}\,dxdyd\tau,$$

$$\int_0^t\int_G (L_{1,\varepsilon,1}u^\varepsilon)_\tau u^\varepsilon_{xx\tau\tau}\,dxdyd\tau=\int_0^t\int_G f_\tau u^\varepsilon_{xx\tau\tau}\,dxdyd\tau,$$

$$\int_0^t\int_G L_{1,\varepsilon,1}u^\varepsilon(u^\varepsilon_{xxxx\tau}+\Delta_y u^\varepsilon_{xx\tau})\,dxdyd\tau=\int_0^t\int_G f(u^\varepsilon_{xxxx\tau}+\Delta_y u^\varepsilon_{xx\tau})\,dxdyd\tau,$$

используя условия теоремы на функцию $f(x,y,t)$ и применяя неравенство Юнга, получим, что для решения u^ε краевой задачи $(27_{\varepsilon,1})$, (3), (6)–(8), (28) имеет место оценка

$$\varepsilon\left\{\int_G u^2_{xxtt}(x,y,t)\,dxdy+\int_0^t\int_G\left[(u^\varepsilon_{xxxx\tau})^2+(\Delta_y u^\varepsilon_{xx\tau})^2\right]dxdyd\tau\right\}+$$
$$+\int_G\left[(u^\varepsilon_{xxxt}(x,y,t))^2+(u^\varepsilon_{xxxx}(x,y,t))^2+(\Delta_y u^\varepsilon(x,y,t))^2\right]dxdy\le$$
$$\le C\int_Q(f^2+f_t^2+f_{tt}^2+f_x^2+f_{xt}^2)\,dxdydt, \tag{30}$$

в которой постоянная C не зависит от ε. Этой оценки вполне достаточно для предельного перехода, т. е. для выбора сходящейся последовательности $\{u^{\varepsilon_l}(x,y,t)\}_{l=1}^\infty$, такой, что предельная функция $u(x,y,t)$ будет принадлежать пространству V_1 и будет представлять собой решение краевой задачи II (см. завершение доказательства теоремы 1).

Единственность в пространстве V_1 решений краевой задачи III очевидна (вытекает, например, из анализа равенства $\int_0^t\int_G L_1uu_{xx\tau}\,dxdyd\tau=0$). Теорема доказана. $\square$

Перейдем к исследованию разрешимости краевых задач IV и V.

Теорема 4. *Пусть выполняется условие*

$$\beta<0,\quad \gamma\ge 0.$$

Тогда для любой функции $f(x,y,t)$, такой, что $f(x,y,t)\in L_2(Q)$, $f_t(x,y,t)\in L_2(Q)$, $f_x(x,y,t)\in L_2(Q)$, $f_{tt}(x,y,t)\in L_2(Q)$, $f_{xt}(x,y,t)\in L_2(Q)$, $f_{xtt}(x,y,t)\in L_2(Q)$,

$f(x,y,0) = 0$ при $(x,y) \in G$, $f(0,y,t) = f(1,y,t) = 0$ при $y \in \Omega$, $t \in (0,T)$, краевая задача IV имеет в пространстве V_0 решение, и при том ровно одно.

Доказательство. Вновь воспользуемся методом регуляризации. Именно, для положительного числа ε рассмотрим задачу: *найти функцию $u(x,y,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_{xxxt} - \varepsilon u_{xxxx} + \beta\Delta_y u + \gamma u = f(x,y,t)$$

и такую, что для неё выполняются условия (3), (6)–(8). Согласно теореме 3, эта задача при выполнении всех приведённых выше условий на функцию $f(x,y,t)$ имеет решение $u^\varepsilon(x,y,t)$, принадлежащее пространству V_1. Для семейства $\{u^\varepsilon(x,y,t)\}_{\varepsilon>0}$ имеет место априорная оценка

$$\int\limits_G [u^\varepsilon_{xxxt}(x,y,t)]^2 dxdy + \int\limits_G \left[\Delta_y u^\varepsilon(x,y,t)\right]^2 dxdy + \varepsilon \int\limits_Q (u^\varepsilon_{xxxx})^2 dxdydt \leq R_0$$

с постоянной R_0, определяющейся лишь функцией $f(x,y,t)$, числами T, β и γ. Её доказательство проводится так же, как проводилось доказательство оценки (30). Эта оценка позволяет стандартным образом организовать процедуру выбора последовательности, сходящейся к решению краевой задачи IV, принадлежащему пространству V_0.

Единственность решений очевидна. Теорема доказана. □

Теорема 5. *Пусть выполняется условие*

$$\beta > 0, \quad \gamma \leq 0.$$

Тогда для любой функции $f(x,y,t)$ такой, что $f(x,y,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,y,t) \in L_2(Q)$, $f_x(x,y,t) \in L_2(Q)$, $f_{tt}(x,y,t) \in L_2(Q)$, $f_{xt}(x,y,t) \in L_2(Q)$, $f_{xtt}(x,y,t) \in L_2(Q)$, $f(x,y,0) = 0$ при $(x,y) \in G$, $f(0,y,t) = f(1,y,t) = 0$ при $y \in \Omega$, $t \in (0,T)$, краевая задача V имеет в пространстве V_0 решение, и при том ровно одно.

Доказательство. Заменой $z = 1 - x$ краевая задача V сводится к краевой задаче IV (в частности, условие (11) сводится к условию (10)). Имея же разрешимость в пространстве V_0 краевой задачи IV автоматически получим разрешимость краевой задачи V. Теорема доказана. □

Список литературы

1. **Lin, C. C.** On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid / C. C. Lin, E. Reissner, H. S. Tsien // Journal of Mathematical Physics. — 1948. — Vol. 27, no. 3. — P. 220–231.
2. **Мамонтов, Е. В.** Об уравнениях малых возмущений в нестационарном околозвуковом потоке газа / Е. В. Мамонтов // Нестационарные проблемы механики: сб. науч. тр. — Новосибирск : Сиб. отд-е АН СССР, Ин-т гидродинамики, 1978. — № 37. — С. 139–143.
3. **Глазатов, С. Н.** О разрешимости пространственно-периодической задачи для уравнения Линя — Рейсснера — Цзяня трансзвуковой газовой динамики / С. Н. Глазатов // Мат. заметки. — 2010. — Т. 87, вып. 1. — С. 137–140.
4. **Ларькин, Н. А.** К теории линеаризованного уравнения Линя — Рейсснера — Цзяня / Н. А. Ларькин // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики: сб. науч. тр. — Новосибирск : Сиб. отд-е АН СССР, Ин-т математики, 1980. — С. 126–131.

5. **Ларькин, Н. А.** О линеаризованном уравнении нестационарной газовой динамики / Н. А. Ларькин // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа: сб. науч. тр. — Новосибирск : Сиб. отд-е АН СССР, Ин-т математики, 1983. — С. 107–118.
6. **Кожанов, А. И.** О постановке и разрешимости краевой задачи для одного класса уравнений, не разрешённых относительно временно́й производной / А. И. Кожанов // Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики: сб. науч. тр. — Новосибирск : Сиб. отд-е АН СССР, Ин-т математики, 1987. — С. 84–98.
7. **Глазатов, С. Н.** Задача с данными на характеристике для линеаризованного уравнения трансзвуковой газовой динамики / С. Н. Глазатов // Сиб. мат. журн. — 1996. — Т. 37, № 5. — С. 1019–1029.
8. **Умаров, Х. Г.** Полугруппы операторов и точные решения задач анизотропной фильтрации / Х. Г. Умаров. — М. : Физматлит, 2009. — 219 с.
9. **Умаров, Х. Г.** Явный вид решения линеаризованного трехмерного уравнения Линя — Рейсснера — Цзяня с постоянными коэффициентами / Х. Г. Умаров // Вестн. Уфим. гос. авиац. техн. ун-та. — 2011. — Т. 45, № 5. — С. 113–119.
10. **Кадомцев, Б. Б.** Об устойчивости уединённых волн в слабо диспергирующих средах / Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили // Докл. АН СССР. — 1970. — Т. 192, № 4. — С. 753–756.
11. **Абылкаиров, У. Т.** Разрешимость краевой задачи для линейного уравнения Кадомцева — Петвиашвили / У. Т. Абылкаиров // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики: сб. науч. тр. — Новосибирск : Сиб. отд-е АН СССР, Ин-т математики, 1980. — С. 3–6.
12. **Кожанов, А. И.** Краевые задачи для некоторых классов уравнений, не разрешённых относительно временно́й производной / А. И. Кожанов // Мат. заметки Якут. гос. ун-та. — 2013. — Т. 20, вып. 1. — С. 35–43.
13. **Берс, Л.** Уравнения с частными производными / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. — М. : Мир, 1966. — 352 с.
14. **Треногин, В. А.** Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М. : Наука, 1980. — 496 с.
15. **Ладыженская, О. А.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. — М. : Наука, 1967. — 736 с.
16. **Ладыженская, О. А.** Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. — М. : Физматлит, 1973. — 407 с.

Поступила в редакцию 07.07.2018
После переработки 11.09.2018

Сведения об авторах

Кожанов Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия; e-mail: kozhanov@math.nsc.ru.

Кодзоков Азамат Хасанович, старший преподаватель кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик, Россия; e-mail: kodzoko@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2018. Vol. 3, iss. 4. P. 395–407.

DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13402

BOUNDARY PROBLEMS FOR A CLASS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

A.I. Kozhanov[1,a], **A.Kh. Kodzokov**[2,b]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*
[2]*Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik, Russia*
[a]*kozhanov@math.nsc.ru,* [b]*kodzoko@mail.ru*

In this paper we study differential equations with multiple characteristics (differential equations of the composite type) of the form

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(u_t - \alpha u_x\right) + \beta\Delta_y u + \gamma u = f(x, y, t),$$

(α, β, γ are constants). For these equations, we propose the formulation of new boundary-value problems, for the proposed problems we prove the existence and uniqueness theorems for regular solutions (having all the generalized in the sense of S.L. Sobolev derivatives entering the equation). The technique of proof is based on the regularization method. The equations studied in this paper represent, by their structure, equations that are called in the literature by equations that are not resolved with respect to the derivative. Some possible generalizations are indicated for the problems under study.

Keywords: *differential equations with multiple characteristics, boundary value problems, regular solutions, existence and uniqueness of a solution.*

References

1. **Lin C.C., Reissner E., Tsien H.S.** On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid.*Journal of Mathematical Physics*, 1948, vol. 27, no. 3, pp. 220–231.
2. **Mamontov E.V.** Ob uravneniyakh malykh vozmushcheniy v nestatsionarnom okolozvukovom potoke gaza.[On the equations of small perturbations in a nonstationary transonic flow of gas]. *Nestacionarnye problemy mekhaniki* [Nonstationary problems of mechanics], Novosibirsk, Siberian Branch of USSR Academy of Sciences, Hidrodynamics Institute, 1978, no. 37. Pp. 139–143. (In Russ.).
3. **Glazatov S.N.** On solvability of a spatial periodic problem for the Lin — Reissner — Tsien equation of transonic gas dynamics. *Mathematical Notes*, 2010, vol. 87, iss. 1–2, pp. 130–134.
4. **Larkin N.A.** K teorii linearizovannogo uravneniya Linya — Reysnera — Tszyanya [To the theory of the Lin — Reissner — Tsien linearized equation] *Korrektnye krayevye zadachi dlya neklassicheskikh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Well-posed boundary value problems for nonclassical equations of mathematical physics], Novosibirsk, Siberian Branch of USSR Academy of Sciences, Mathematics Institute, 1980. Pp. 126–131. (In Russ.).
5. **Larkin N.A.** O linearizovannom uravnenii nestatsionarnoy gazovoy dinamiki [On the linearized equation of the nonstationary gas dynamics]. *Neklassicheskie uravneniya i uravneniya smeshannogo tipa* [Nonclassical equations and equations of mixed type], Novosibirsk, Siberian Branch of USSR Academy of Sciences, Mathematics Institute, 1983. Pp. 107–118. (In Russ.).

6. **Kozhanov A.I.** O postanovke i razreshimosti krayevoy zadachi dlya odnogo klassa uravneniy, ne razreshyonnykh otnositel'no vremennoy proizvodnoy [On the statement and solvability of the boundary value problem for a class of equations not solved with respect to the time derivative]. *Krayevye zadachi dlya neklassicheskikh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Boundary value problems for nonclassical equations of the mathematical physycs], Novosibirsk, Siberian Branch of USSR Academy of Sciences, Mathematics Institute, 1987. Pp. 84–98. (In Russ.).
7. **Glazatov S.N.** A problem with data on a characteristic for a linearized equation of transonic gas dynamics. *Siberian Mathematical Journal*, 1996, vol. 37, iss. 5, pp. 898–906.
8. **Umarov Kh.G.** *Polugruppy operatorov i tochnye resheniya zadach anizotropnoy filtratsii* [Semigroups of operators and exact solutions of the anisotropic filtration problems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 216 p. (In Russ.).
9. **Umarov Kh.G.** Yavnyy vid resheniya linearizovannogo tryokhmernogo uravneniya Linya — Reysnera — Tszyanya s postoyannymi koehffitsientami [The explicit form of the solution of the linearized three-dimensional equations of the Lin — Reissner — Tsien with constant coefficients]. *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionnogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Ufa State Aviation Technical University], 2011, vol. 45, no. 5, pp. 113–119. (In Russ.).
10. **Kadomtsev A.I., Petviashvili V.I.** Ob ustoychivosti uyedinyonnykh voln v slabo dispergiruyushchikh sredakh [On the stability of solitary waves in weakly dispersing media]. *Doklady AN SSSR* [Reports of USSR Academy of Sciences], 1970, vol. 192, no. 4, pp. 753–756. (In Russ.).
11. **Abylkairov U.T.** Razreshimost' krayevoy zadachi dlya lineynogo uravneniya Kadomtseva — Petviashvili [Solvability of a boundary value problem for the linear Kadomtsev — Petviashvili equation]. *Korrektnye krayevye zadachi dlya neklassicheskikh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Well-posed boundary value problems for nonclassical equations of mathematical physics], Novosibirsk, Siberian Branch of USSR Academy of Sciences, Mathematics Institute, 1980. Pp. 3–6. (In Russ.).
12. **Kozhanov A.I.** Krayevye zadachi dlya nekotorykh klassov uravneniy, ne razreshyonnykh otnositel'no vremennoy proizvodnoy [Boundary value problems for certain classes of equations not solved with respect to the time derivative]. *Matematicheskie zametki Yakutskogo gosudarstvennogo universiteta* [Mathematical Notes of Yakut State University], 2013, vol. 20, no. 1, pp. 35–43. (In Russ.).
13. **Bers L., John F., Schechter M.** *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 1964. 343 p.
14. **Trenogin V.A.** *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 496 p. (In Russ.).
15. **Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N.** *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type.* American Mathematical Society, 1988. 648 p.
16. **Ladyzhenskaya O.A.** *Krayevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary value problems of mathematical physics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1973. 407 p. (In Russ.).

Accepted article received 07.07.2018
Corrections received 11.09.2018