МЕХАНИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3, вып. 3. С. 338–343.

УДК 531.111.5+531.18+531.133.1 DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13307

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СИСТЕМ ОТСЧЁТА

В. В. Войтик[1,a], **Н. Г. Мигранов**[2,b]

[1] *Башкирский государственный медицинский университет, Уфа, Россия*
[2] *Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия*
[a] *voytik1@yandex.ru*, [b] *ufangm@yandex.ru*

Цель статьи заключается в установлении уравнения, определяющего общий элемент непрерывной симметрии неинерциальной жёсткой системы отсчёта в классическом случае. Основой аналитического метода служит обобщённый принцип относительности А. А. Логунова. Согласно этому принципу лагранжианы эквивалентных систем отсчёта имеют одинаковые параметры: собственные ускорения и угловые скорости. Это условие сильно ограничивает широту преобразований симметрии и позволяет установить дифференциальное уравнение для движения эквивалентной системы отсчёта относительно исходной системы. Решение полученных уравнений в общем виде зависит от решения задачи Дарбу.

Ключевые слова: *обобщённый принцип относительности, эквивалентные системы отсчёта, задача Дарбу.*

Система отсчёта — совокупность системы координат и часов, связанных с телом, по отношению к которому изучается движение каких-либо других материальных точек или тел. В классической физике возможна и наиболее проста идеально жёсткая система отсчёта. Такая система отсчёта полностью характеризуется всего двумя векторами: вектором собственной угловой скорости и вектором собственного ускорения начала отсчёта.

В инерциальной системе отсчёта пространство однородно и изотропно, а время однородно. В произвольной же системе отсчёта пространство в общем случае неоднородно и неизотропно, а время неоднородно. Для любой системы отсчёта будет справедлив так называемый обобщённый принцип относительности А. А. Логунова [1]. Согласно этому принципу «какую бы физическую систему отсчёта мы не избрали (инерциальную или неинерциальную), всегда можно указать бесконечную совокупность других систем отсчёта, таких, в которых все физические явления протекают одинаково с исходной системой отсчёта; так что мы не имеем и не можем иметь никаких экспериментальных возможностей различить на эксперименте, в какой именно системе отсчёта из этой бесконечной совокупности мы находимся» [1, с. 127]. Такие системы отсчёта можно назвать *физически эквивалентными.* Этот принцип является более общим, чем специальный принцип относительности, и его применимость ничем не ограничена. Все эквивалентные системы отсчёта обладают одинаковыми векторными характеристиками: вектором собственной угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ и вектором собственного ускорения начала отсчёта $\mathbf{W}$, но по-разному расположены относительно друг друга и по-разному двигаются. За вычетом преобразования времени общее количество независимых друг от друга видов преобразований симметрии равно 9. Для целей теории симметрии интересно установить относительное движение физически эквивалентных систем отсчёта.

Лагранжиан свободной материальной точки в данной неинерциальной системе отсчёта S с собственным ускорением начала отсчёта $\mathbf{W}$ и частотой собственного вращения $\mathbf{\Omega}$ имеет вид [2, с. 165, формула (39,6)]

$$L = \frac{m}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - m\mathbf{W}\mathbf{r}.$$

Выясним теперь, как выглядит лагранжиан в новой системе отсчёта S''', эквивалентной первоначальной системе S. Преобразование в систему S''' произведём в три приёма. На первом этапе перейдём в систему S', начало которой совпадает с S'''. Для этого совершим поворот вокруг начала системы S на постоянный угол, определяющийся матрицей поворота $b_{\alpha\beta}$: $r_\alpha = b_{\alpha\beta} r'_\beta$. При этом в силу векторности испытывают такой же поворот как вектор скорости $(v_\alpha = b_{\alpha\beta} v'_\beta)$, так и векторы собственной угловой скорости и собственного ускорения начала отсчёта. В результате новые собственная угловая скорость и собственное ускорение станут соответственно равны:

$$\Omega'_\alpha = b_{\beta\alpha}\Omega_\beta, \tag{1}$$

$$W'_\alpha = b_{\beta\alpha}W_\beta, \tag{2}$$

а лагранжиан останется той же формы:

$$L = \frac{m}{2}(\mathbf{v}' + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}')^2 - m\mathbf{W}'\mathbf{r}'. \tag{3}$$

Второй шаг заключается в переходе в систему S'', которая движется поступательно относительно данной системы S' с перемещением на вектор $\mathbf{a}$ за время t. Радиус-векторы в системе S' и в системе S'' связаны друг с другом соотношением

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' + \mathbf{a}, \tag{4}$$

а соответствующее соотношение для скоростей относительно систем S'' и S' находится дифференцированием (4):

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}' = \mathbf{v}'' + \mathbf{u},$$

где

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{a}}{dt}. \tag{5}$$

Подставив эти выражения в (3), получим функцию Лагранжа в системе S'':

$$L = \frac{m}{2}(\mathbf{v}'' + \mathbf{u} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}'' + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{a})^2 - m\mathbf{W}'(\mathbf{r}'' + \mathbf{a}).$$

Выделим теперь в этом лагранжиане первые два члена, аналогичные (3). В результате получим, что

$$L = \frac{m}{2}(\mathbf{v}'' + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}'')^2 - m\mathbf{W}'\mathbf{r}'' + m\left(\mathbf{v}'' + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}''\right)\left(\mathbf{u} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{a}\right) +$$

$$+\frac{m}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{a})^2 - m\mathbf{W}'\mathbf{a}.$$

Последние два члена в этом лагранжиане есть заданные функции времени, и они могут быть представлены как производные по времени от некоторой другой функции. Поэтому их можно опустить. Далее в третьем члене раскроем скобки. Таким образом получим

$$L = \frac{m}{2}(\mathbf{v}'' + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}'')^2 - m\mathbf{W}'\mathbf{r}'' + m\mathbf{v}''\left(\mathbf{u} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{a}\right) + m\left(\mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}''\right)\left(\mathbf{u} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{a}\right). \quad (6)$$

Заметим, что

$$m\mathbf{v}''\left(\mathbf{u} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{a}\right) = m\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}''\left(\mathbf{u} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{a}\right)\right] - m\mathbf{r}''\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{a}\right),$$

$$m\left(\mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}''\right)\left(\mathbf{u} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{a}\right) = \mathbf{m}\left[\left(\mathbf{u} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{a}\right) \times \mathbf{\Omega}'\right]\mathbf{r}''.$$

Подставим эти выражения в функцию Лагранжа (6) и снова опустим полную производную. Получим окончательно

$$L = \frac{m}{2}(\mathbf{v}'' + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}'')^2 - m\left[\mathbf{W}' + \frac{d}{dt}\left(\mathbf{u} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{a}\right) + \mathbf{\Omega}' \times \left(\mathbf{u} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{a}\right)\right]\mathbf{r}''. \quad (7)$$

На заключительном, третьем этапе перейдём в систему отсчёта S''', начало которой совпадает с системой S'', но которая в данный момент вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ относительно S''. При этом скорость точки в системе S'' складывается из скорости точки в системе S''' и скорости вращения $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}''$ осей системы S'':

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{v}''' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}''.$$

Подставив это выражение и определение (5) в функцию Лагранжа (7) и учитывая, что $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}'''$, получим

$$L = \frac{m}{2}[\mathbf{v}''' + (\boldsymbol{\omega} + \mathbf{\Omega}') \times \mathbf{r}''']^2 -$$

$$-m\left[\mathbf{W}' + \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{a}\right) + \mathbf{\Omega}' \times \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{a}\right)\right]\mathbf{r}'''.$$

Если новая система отсчёта S''' физически эквивалентна старой системе S, должны выполняться совместно два условия:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}' \quad (8)$$

и

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{a}\right) + \mathbf{\Omega}' \times \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{a}\right) = \mathbf{W} - \mathbf{W}'; \quad (9)$$

только в этом случае характеристики систем отсчёта S и S''' будут между собой равны.

Уравнения (8), (9), где $\mathbf{\Omega}'$ и $\mathbf{W}'$ удовлетворяют выражениям (1), (2), и являются искомыми дифференциальными уравнениями движения начала отсчёта эквивалентной системы. Всего общее решение уравнений (8), (9) будет иметь соответственно 6 и 9 произвольных постоянных, как и должно быть.

Рассмотрим сначала первое уравнение. Правая часть уравнения (8) является известной функцией времени (и постоянного угла поворота), а левая часть (8) в некоторой системе угловых координат зависит от них и их первых производных. Задача решения уравнения (8) в литературе известна как задача Дарбу [3, с. 127, п. 3.11]. Данная задача заключается в определении зависимости углов как функции времени, если известна угловая скорость как конкретная функция времени. Эта задача в аналитической форме разрешима не всегда [4, с. 15, п. 4]. Некоторые методы приближённого решения обсуждались в [5].

Во втором уравнении после очевидной замены

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{a} = \mathbf{X} \tag{10}$$

уравнение (9) преобразуется в векторное линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{X} = \mathbf{W} - \mathbf{W}'. \tag{11}$$

Его общее решение, как известно, является суммой решения однородного (с правой частью равной нулю) дифференциального уравнения первого порядка и частного решения (11). Общее же решение неоднородного уравнения (11) может быть найдено из решения однородного уравнения, например, методом вариации постоянных. Рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{X} = \mathbf{0}. \tag{12}$$

Умножив скалярно это уравнение на $\mathbf{X}$, легко заметить, что величина вектора $\mathbf{X}$ в процессе движения сохраняется $\mathbf{X}^2 = A_\alpha^2 = \mathrm{const}$. Следовательно, это движение представляет собой вращение с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}'$ и решение (12) в координатной форме будет иметь вид $X_\alpha = A_\beta a_{\beta\alpha}$, где $a_{\beta\alpha}$ есть некоторая матрица поворота. Подставив это решение в (12), получим, что

$$A_\beta \left(\frac{da_{\beta\alpha}}{dt} + e_{\alpha\mu\gamma} {\Omega'}_\mu a_{\beta\gamma} \right) = 0.$$

Данное равенство выполняется для произвольного постоянного вектора A_β только в том случае, если

$$\frac{da_{\beta\alpha}}{dt} + e_{\alpha\mu\gamma} \Omega'_\mu a_{\beta\gamma} = 0.$$

Умножим это равенство на $\frac{1}{2} e_{\alpha\nu\tau} a_{\beta\nu}$ и учтём, что $e_{\alpha\nu\tau} e_{\alpha\mu\gamma} = \delta_{\nu\mu}\delta_{\tau\gamma} - \delta_{\nu\gamma}\delta_{\tau\mu}$ и $a_{\beta\nu} a_{\beta\nu} = 3$. Тогда

$$\frac{1}{2} e_{\alpha\nu\tau} a_{\beta\nu} \frac{da_{\beta\alpha}}{dt} = \Omega'_\tau. \tag{13}$$

Заметим, что уравнение (13) эквивалентно (8), за исключением другой функции в правой части уравнения. Таким образом, решение уравнений (10), (11) с правой частью, равной нулю, неявно связано с решением задачи Дарбу (8).

Подчеркнём, что к данным «галилеевским» преобразованиям симметрии необходимо относиться только как к следствиям нерелятивистских уравнений движения. Тем не менее уравнения движения (8)–(11) могут представить интерес и в теории относительности как предельные выражения пока неизвестных точных релятивистских уравнений.

Список литературы

1. **Логунов, А. А.** Лекции по теории относительности и гравитации: современный анализ проблемы / А. А. Логунов. — М. : Наука, 1987. — 272 с.

2. **Ландау, Л. Д.** Теоретическая физика : учеб. пособие : в 10 т. Т. 1 : Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука, 1988. — 512 с.
3. **Лурье, А. И.** Аналитическая механика / А. И. Лурье. — М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. — 824 с.
4. Динамика свободного твёрдого тела и определение его ориентации в пространстве / В. И. Зубов, В. С. Ермолин, В. Н. Иголкин, А. Б. Ковригин, И. А. Мартыненко, Б. П. Тихомиров. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1968. — 208 с.
5. **Tsiotras, P.** New kinematic relations for the large angle problem in rigid body attitude dynamics / P. Tsiotras, J. M. Longuski // Acta Astronautica. — 1994. — Vol. 32, no. 3. — P. 181–190.

Поступила в редакцию 26.03.2018
После переработки 05.06.2018

Сведения об авторах

Войтик Виталий Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры медицинской физики с курсом информатики, Башкирский государственный медицинский университет, Уфа, Россия; e-mail: voytik1@yandex.ru.

Мигранов Наиль Галиханович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия; e-mail: ufangm@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2018. Vol. 3, iss. 3. P. 338–343.

DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13307

ON THE RELATIVE MOVEMENT OF EQUIVALENT REFERENCE SYSTEMS

V.V. Voytik[1,a], **N.G. Migranov**[2,b]

[1] *Bashkir State Medical University, Ufa, Russia*
[2] *Mavlyutov Institute of Mechanics of Ufa Investigation Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia*
[a] *voytik1@yandex.ru*, [b] *ufangm@yandex.ru*

The purpose of the paper is to establish an equation that determines the common element of continuous symmetry of a noninertial rigid reference frame in the classical case. The basis of the analytical method is the generalized principle of relativity of A. A. Logunov. According to this principle, Lagrangians of equivalent reference systems have the same parameters: proper accelerations and angular velocities. This condition severely limits the breadth of the symmetry transformations and allows us to establish a differential equation for the motion of an equivalent reference system with respect to the original system. The general form of the equations solution depends on the solution of the Darboux problem.

Keywords: *the generalized principle of relativity, equivalent reference systems, the Darboux problem.*

References

1. **Logunov A.A.** *Lektsii po teorii otnositel'nosti i gravitatsii: sovremennyy analiz problemy* [Lectures on the theory of relativity and gravitation: contemporary analysis of the problem]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 272 p. (In Russ.).
2. **Landau L.D., Lifshitz E.M.** *Course of Theoretical Physics.* Vol. 1. Mechanics. Oxford, Butterworth-Heinemann, 1976. 171 p.
3. **Lur'ye A.I.** *Analiticheskaya mekhanika* [Analytical Mechanics]. Moscow, 1961. 824 p. (In Russ.).
4. **Zubov V.I, Ermolin V.S., Igolkin V.N., Kovrigin A.B., Martynenko I.A., Tikhomirov B.P.** *Dinamika svobodnogo tvyordogo tela i opredeleniye yego oriyentatsii v prostranstve* [Dynamics of a free rigid body and determination of its orientation in space]. Leningrad, Leningrad State University Publishing, 1968. 208 p. (In Russ.).
5. **Tsiotras P., Longuski J.M.** New kinematic relations for the large angle problem in rigid body attitude dynamics. *Acta Astronautica*, 1994, vol. 32, no. 3, pp. 181–190.

Accepted article received 26.03.2018
Corrections received 05.06.2018