Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3, вып. 3. С. 319–331.

УДК 517.977 DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13305

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

М. В. Плеханова[1,2,a], **Г. Д. Байбулатова**[1,b]

[1] *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
[2] *Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия*
[a] *mariner79@mail.ru*, [b] *baybulatova_g_d@mail.ru*

Исследованы вопросы существования решения задачи оптимального управления для широкого класса уравнений с запаздыванием, не разрешимых относительно производной по времени. Множество допустимых управлений предполагается выпуклым и замкнутым в пространстве функций управления, минимизируемый функционал является квадратическим. При условии сильной относительной p-радиальности пары операторов в уравнении доказаны теоремы об однозначной разрешимости задачи оптимального управления для случая абстрактного оператора запаздывания и для случая, когда этот оператор имеет интегральный вид. Полученные общие результаты использованы при исследовании задачи оптимального управления для системы гравитационно-гироскопических волн, возмущённой интегральным оператором запаздывания.

Ключевые слова: *оптимальное управление, система с распределёнными параметрами, вырожденное эволюционное уравнение, уравнение с запаздыванием, существование и единственность решения.*

Введение

При моделировании различных процессов нередко наблюдается эффект последействия. Заметим, что в таких случаях игнорирование даже самого малого промежутка запаздывания приводит к неверным, абсурдным результатам. Математические модели, описывающие такие процессы, представимы с помощью дифференциальных уравнений с запаздыванием. Задачи управления для соответствующих систем уже более полувека исследуются многими авторами (см. [1–4] и др.).

Для эффективного управления реальными системами нередко приходится рассматривать процессы, состояние в которых описывается некорректными задачами для систем дифференциальных уравнений в частных производных — задачи управления для таких систем исследовались в работах Ж.-Л. Лионса [5], А. В. Фурсикова [6]. Различные задачи управления для систем, описываемых некорректными начально-краевыми задачами для уравнений и систем уравнений, не разрешимых относительно старшей производной по времени, называемых также вырожденными эволюционными уравнениями, изучены в работах [7–13].

В данной работе исследуются вопросы разрешимости задач оптимального управления для одного класса систем, описываемых вырожденными эволюционными уравнениями с запаздыванием. Для этого использована теория вырожденных полугрупп операторов, развитая в работах В. Е. Федорова [14–16], в частности, результаты В. Е. Федорова и Е. А. Омельченко [17–19] о разрешимости вырожденных эволюционных уравнений с запаздыванием.

Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — банаховы пространства, операторы $L : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $\Phi : C([-r, 0]; \mathcal{X}) \to \mathcal{Y}$, $N : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ линейны и непрерывны, $\ker L \neq \{0\}$, $M : D_M \to \mathcal{Y}$ — линейный замкнутый плотно определённый в $\mathcal{X}$ оператор. Исследуется задача оптимального управления

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + \Phi x_t + Nu, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$Px(t) = h(t), \quad t \in [-r, 0], \tag{2}$$

$$u \in \mathcal{U}_\partial, \tag{3}$$

$$J(x, u) = \|x\|^2_{L_2(0,T;D_M)} + \|x\|^2_{W_2^1(0,T;\mathcal{X})} + \|u\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{U})} \to \inf, \tag{4}$$

где функция $x_t : [-r, 0] \to \mathcal{X}$ строится по функции $x : [-r, T] \to \mathcal{X}$ по правилу

$$x_t(s) = x(t + s), \quad s \in [-r, 0], \ t \in [0, T]. \tag{5}$$

P — проектор на фазовое пространство уравнения $L\dot{x}(t) = Mx(t)$ вдоль его подпространства вырождения (подробнее он будет описан ниже), множество $\mathcal{U}_\partial$ — замкнутое выпуклое подмножество пространства управлений $L_2(0, T; \mathcal{U})$, $J(x, u)$ — функционал качества.

В первом параграфе данной работы приведены необходимые для дальнейших рассмотрений сведения. Во втором параграфе доказана однозначная разрешимость задачи (1)–(4) с сильно (L, p)-радиальным оператором M [14–16] и с абстрактным оператором запаздывания Φ. В третьем параграфе рассмотрен частный случай оператора Φ в интегральном виде. В последнем параграфе полученные в работе абстрактные результаты проиллюстрированы на примере системы гравитационно-гироскопических волн, возмущённой интегральным оператором запаздывания, для которой доказана разрешимость начально-краевой задачи и задачи управления.

1. Предварительные сведения

1.1. Однозначная разрешимость вырожденного уравнения с запаздыванием

В этом параграфе приведены вспомогательные понятия и связанные с ними факты, которые доказаны в [15; 16].

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — банаховы пространства. Через $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ обозначим множество всех линейных непрерывных операторов из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, а через $\mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — множество всех линейных замкнутых плотно определённых в $\mathcal{X}$ операторов, действующих в пространство $\mathcal{Y}$. При $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ сократим эти обозначения до $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ и $\mathcal{C}l(\mathcal{X})$ соответственно.

Введём также обозначения $\rho^L(M) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})\}$, $R^L_\mu(M) := (\mu L - M)^{-1} L$, $L^L_\mu(M) := L(\mu L - M)^{-1}$.

Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $p \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Оператор M называется *сильно (L, p)-радиальным*, если

(i) $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \mu > a \quad \mu \in \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0 \quad \forall \mu > a$,

$$\max\{\|(R^L_\mu(M))^{p+1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|(L^L_\mu(M))^{p+1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{p+1}};$$

(iii) существует плотный в $\mathcal{Y}$ линеал $\overset{\circ}{\mathcal{Y}}$ такой, что

$$\|M(\mu L - M)^{-1}\left(L_\mu^L(M)\right)^{p+1} y\|_{\mathcal{Y}} \leq \frac{\mathrm{const}(y)}{(\mu - a)^{p+2}} \quad \forall y \in \overset{\circ}{\mathcal{Y}}$$

при любых $\mu > a$;

(iv) для всех $\mu > a$

$$\|\left(R_\mu^L(M)\right)^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{p+2}}.$$

Замечание 1. В [14–16] использовалось несколько более сложное, но эквивалентное данному определение сильно (L,p)-радиального оператора M (см. по этому поводу [20]).

Обозначим через $\mathcal{X}^0$ ($\mathcal{Y}^0$) ядро $\ker(R_\mu^L(M))^{p+1}$ $\left(\ker(L_\mu^L(M))^{p+1}\right)$, а через $\mathcal{X}^1$ ($\mathcal{Y}^1$) — замыкание линеала $\mathrm{im}(R_\mu^L(M))^{p+1}$ $\left(\mathrm{im}(L_\mu^L(M))^{p+1}\right)$ в норме пространства $\mathcal{X}$ ($\mathcal{Y}$). Через M_k (L_k) будем обозначать сужение оператора M (L) на $D_{M_k} = \mathcal{X}^k \cap D_M$ ($\mathcal{X}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 1. [14–16]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*

(i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;

(ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$;

(iv) *оператор* $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0)$ *нильпотентен степени не больше* $p \in \mathbb{N}_0$.

Замечание 2. Оператор $P := s\text{-}\lim\limits_{\mu\to+\infty}(\mu R_\mu^L(M))^{p+1}$ является проектором вдоль $\mathcal{X}^0$ на $\mathcal{X}^1$, а $Q := s\text{-}\lim\limits_{\mu\to+\infty}(\mu L_\mu^L(M))^{p+1}$ — проектор вдоль $\mathcal{Y}^0$ на $\mathcal{Y}^1$.

Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ сильно (L,p)-радиален, $r > 0$, $\Phi \in \mathcal{L}(C([-r,0];\mathcal{X});\mathcal{Y})$. Рассмотрим задачу

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + \Phi x_t + f(t), \quad t \in [0,T]. \tag{6}$$

$$Px(t) = h(t), \quad t \in [-r,0], \tag{7}$$

где $h : [-r,0] \to \mathcal{X}^1$, функция $x_t : [-r,0] \to \mathcal{X}$ строится по функции $x : [-r,T] \to \mathcal{X}$ согласно правилу (5). При этом будет предполагаться выполнение условия $C([-r,0];\mathcal{X}^0) \subset \ker\Phi$, т.е. $\Phi x_t = \Phi P x_t$.

Решением задачи (6), (7) будем называть функцию $x : [-r,T] \to \mathcal{X}$, для которой $x \in C([0,T];D_M) \cap C^1([0,T];\mathcal{X})$, $Px \in C([-r,T];\mathcal{X}^1)$, $x(t) \in \mathcal{X}^1$ при $t \in [-r,0)$, удовлетворяющую уравнению (6) и условию (7).

Теорема 2. [18]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, оператор $\Phi \in \mathcal{L}(C([-r,0];\mathcal{X});\mathcal{Y})$, $f \in C^{p+1}([0,T];\mathcal{Y})$, $r > 0$, $C([-r,0];\mathcal{X}^0) \subset \ker\Phi$,*

$$h \in C^{p+1}([-r,0];\mathcal{X}), \quad h^{(k)}(0) \in D_M,$$

$$h^{(k+1)}(0) = L_1^{-1}M_1h^{(k)}(0) + L_1^{-1}Q\Phi h^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, p.$$

Кроме того, пусть при $p > 0$ $L_1^{-1}(Qf)^{(m)}(0) \in D_M$, $m = 0, 1, \ldots, p-1$, и существует такое $q \in C^{p+1}([-r,0];\mathcal{X}^1)$, что $q^{(m)}(0) = L_1^{-1}(Qf)^{(m)}(0)$, $m = 0, 1, \ldots, p+1$, $(Qf)^{(m+1)}(0) - M_1L_1^{-1}(Qf)^{(m)}(0) = Q\Phi q^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots, p-1$. Тогда задача (6), (7) имеет единственное решение.

Рассмотрим задачу (7) для уравнения (6) с конкретным интегральным оператором Φ:

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + \int\limits_{-r}^{0} \mathcal{K}(s)x(t+s)ds + f(t), \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

где оператор-функция $\mathcal{K} : [-r,0] \to \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ не является тождественно нулевой.

Теорема 3. [19]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $f \in C^{p+1}([0,T];\mathcal{Y})$, $h \in C([-r,0];\mathcal{X}^1)$, $h(0) \in D_{M_1}$, $\mathcal{K} \in C^{p+1}([-r,0];\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}))$, $\mathcal{K}^{(n)}(-r) = \mathcal{K}^{(n)}(0) = 0$ при $n = 0,1,\dots,p$, $\mathcal{X}^0 \subset \ker \mathcal{K}(s)$ при $s \in [-r,0]$. Тогда существует единственное решение задачи* (7), (8).

1.2. Абстрактная задача управления

Приведём теорему о разрешимости абстрактной задачи оптимального управления, полное доказательство которой можно найти в монографии А. В. Фурсикова [6].

Пусть $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{V}$ — линейные нормированные пространства, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{U}$ — рефлексивные банаховы пространства, причём $\mathfrak{Y}_1$ непрерывно вложено в $\mathfrak{Y}$. Рассмотрим следующую абстрактную линейную задачу управления:

$$\mathfrak{L}(y,u) + \mathfrak{F}_0 = 0, \tag{9}$$

$$u \in \mathfrak{U}_\partial, \tag{10}$$

$$J(y,u) \to \inf. \tag{11}$$

Здесь $\mathfrak{U}_\partial$ — замкнутое выпуклое подмножество пространства $\mathfrak{U}$, функционал стоимости $J(y,u)$ — выпуклый, полунепрерывный снизу и ограниченый снизу на $\mathfrak{Y}\times\mathfrak{U}_\partial$, а также коэрцитивный на пространстве $\mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U}_\partial$, т. е. для любого $R > 0$ множество $\{(y,u) \in \mathfrak{W} : J(y,u) \le R\}$ ограничено в $\mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U}$. Кроме того, предполагается, что линейный оператор $\mathfrak{L} : \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ непрерывен, $\mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{V}$ — заданный вектор.

Множеством $\mathfrak{W}$ *допустимых пар* (y,u) задачи (9)–(11) называется множество пар $(y,u) \in \mathfrak{Y}_1\times\mathfrak{U}$, удовлетворяющих соотношениям (9), (10), для которых $J(y,u) < \infty$. Решением задачи (9)–(11) называется пара $(\hat{y},\hat{u}) \in \mathfrak{W}$, на которой достигается минимум функционала J: $J(\hat{y},\hat{u}) = \inf\limits_{(y,u)\in\mathfrak{W}} J(y,u)$.

Теорема 4. [6]. *Пусть множество $\mathfrak{W}$ допустимых пар непусто. Тогда задача* (9)–(11) *имеет решение $(\hat{y},\hat{u}) \in \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U}$. Если функционал J строго выпуклый, то это решение единственно.*

2. Задача оптимального управления для системы с запаздыванием

Пусть $\mathcal{U},\mathcal{X},\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $\ker L \ne \emptyset$, оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ сильно (L,p)-радиален при $p \in \mathbb{N}_0$, $\Phi \in \mathcal{L}(C([-r,0];\mathcal{X});\mathcal{Y})$, $N \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + \Phi x_t + Nu(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \tag{12}$$

$$Px(t) = h(t), \quad t \in [-r,0], \tag{13}$$

$$u \in \mathcal{U}_\partial, \tag{14}$$

$$J(x,u)=\|x\|^2_{L_2(0,T;D_M)}+\|x\|^2_{W_2^1(0,T;\mathcal{X})}+\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{U})}\to\inf, \tag{15}$$

где P — проектор вдоль $\mathcal{X}^0$ на $\mathcal{X}^1$, $h:[-r,0]\to\mathcal{X}^1$, $\mathcal{U}_\partial$ — замкнутое выпуклое подмножество пространства $L_2(0,T;\mathcal{U})$, $J(x,u)$ — функционал стоимости.

Введём в рассмотрение пространство

$$\mathcal{Z}=\{z\in L_2(-r,T;\mathcal{X})\cap L_2(0,T;D_M)\cap W_2^1(0,T;\mathcal{X}):L\dot z-Mz-\Phi z_t\in L_2(0,T;\mathcal{Y})\}$$

с нормой

$$\|z\|^2_{\mathcal{Z}}=\|z\|^2_{L_2(-r,T;\mathcal{X})}+\|z\|^2_{L_2(0,T;D_M)}+\|z\|^2_{W_2^1(0,T;\mathcal{X})}+\|L\dot z-Mz-\Phi z_t\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{Y})}.$$

Лемма 1. *Пространство $\mathcal{Z}$ полно.*

Доказательство. Выберем фундаментальную в $\mathcal{Z}$ последовательность $\{z_n\}$. Тогда при $n,m\to\infty$ стремится к нулю выражение

$$\|z_n-z_m\|^2_{\mathcal{Z}}=\|z_n-z_m\|^2_{L_2(-r,T;\mathcal{X})}+\|z_n-z_m\|^2_{L_2(0,T;D_M)}+\|z_n-z_m\|^2_{W_2^1(0,T;\mathcal{X})}+$$

$$+\|L(\dot z_n-\dot z_m)-M(z_n-z_m)-\Phi(z_{nt}-z_{mt})\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{Y})}.$$

Отсюда имеем $\|z_n-z_m\|_{L_2(-r,T;\mathcal{X})}\to 0$, $\|z_n-z_m\|^2_{L_2(0,T;D_M)}\to 0$ и $\|z_n-z_m\|_{W_2^1(0,T;\mathcal{X})}\to 0$ при $n,m\to\infty$. В силу полноты соответствующих пространств существует такой элемент $z\in L_2(-r,T;\mathcal{X})\cap L_2(0,T;D_M)\cap W_2^1(0,T;\mathcal{X})$, что

$$\|z_n-z\|^2_{L_2(-r,T;\mathcal{X})}+\|z_n-z\|^2_{L_2(0,T;D_M)}+\|z_n-z\|^2_{W_2^1(0,T;\mathcal{X})}\to 0$$

при $n\to\infty$. Отсюда следует, что при всех $t\in[0,T]$ $\|z_{nt}-z_t\|_{L_2(-r,0;\mathcal{X})}\to 0$ при $n\to\infty$. Здесь z_t есть функция, построенная по правилу (5) по функции z.

Аналогично рассуждая, можно утверждать о существовании функции $y=\lim\limits_{n\to\infty}(L\dot z_n-Mz_n-\Phi z_{nt})$ в пространстве $L_2(0,T;\mathcal{Y})$. Из доказанного выше следует, что $L\dot z_n\to L\dot z$ и $\Phi z_{nt}\to\Phi z_t$ при $n\to 0$ в $L_2(0,T;\mathcal{Y})$. Поэтому при $n\to\infty$ справедлива сходимость $Mz_n\to L\dot z-\Phi z_t-y$ в $L_2(0,T;\mathcal{Y})$. Учитывая замкнутость оператора M, получим, что для почти всех $t\in(0,T)$ $z(t)\in D_M$ и $Mz=L\dot z-\Phi z_t-y$ в $L_2(0,T;\mathcal{Y})$. Отсюда $L\dot z-Mz-\Phi z_t=y$ в $L_2(0,T;\mathcal{Y})$, что и требовалось. □

Лемма 2. *Оператор $\gamma_0:\mathcal{Z}\to L_2(-r,0;\mathcal{X})$, действующий по правилу $(\gamma_0 x)(\cdot):=x_0(\cdot)$, где $x_0=x_t|_{t=0}$, непрерывен.*

Доказательство. Понятно, что $\|\gamma_0 x\|_{L_2(-r,0;\mathcal{X})}=\|x_0\|_{L_2(-r,0;\mathcal{X})}\le\|x\|_{L_2(-r,T;\mathcal{X})}\le\|x\|_{\mathcal{Z}}$, откуда следует непрерывность оператора γ_0. □

Множеством $\mathfrak{W}$ *допустимых пар* (x,u) задачи (12)–(15) назовём множество пар $(x,u)\in\mathcal{Z}\times L_2(0,T;\mathcal{U})$, удовлетворяющих соотношениям (12)–(14). *Решением* задачи (12)–(15) называется пара $(\hat x,\hat u)\in\mathfrak{W}$, на которой достигается минимум функционала (15): $J(\hat x,\hat u)=\inf\limits_{(x,u)\in\mathfrak{W}}J(x,u)$.

Функционал $J(x,u)$ будем называть *коэрцитивным* в пространстве $\mathcal{Z}\times L_2(0,T;\mathcal{U})$, если для любого $R>0$ множество $\{(x,u)\in\mathfrak{W}:J(x,u)\le R\}$ ограничено в пространстве $\mathcal{Z}\times L_2(0,T;\mathcal{U})$.

Теорема 5. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $\Phi\in\mathcal{L}(C([-r,0];\mathcal{X});\mathcal{Y})$, имеет место вложение $C([-r,0];\mathcal{X}^0)\subset\ker\Phi$, $f\in C^{p+1}([0,T];\mathcal{Y})$, $h\in C^{p+1}([-r,0];\mathcal{X})$, $h^{(k)}(0)\in D_M$, $h^{(k+1)}(0)=L_1^{-1}M_1h^{(k)}(0)+L_1^{-1}Q\Phi h^{(k)}$, $k=0,1,\dots,p$,*

$\mathcal{U}_\partial$ является замкнутым выпуклым подмножеством пространства $L_2(0,T;\mathcal{U})$, $\mathcal{U}_\partial \cap C^1([0,T];\mathcal{U}) \neq \emptyset$. Кроме того, пусть при $p > 0$ для некоторого $u \in \mathcal{U}_\partial \cap C^1([0,T];\mathcal{U})$ $L_1^{-1}(Q(f+Nu))^{(m)}(0) \in D_M$, $m = 0,1,\dots,p-1$, и существует такое $q \in C^{p+1}([-r,0];\mathcal{X}^1)$, что $q^{(m)}(0) = L_1^{-1}(Q(f+Nu))^{(m)}(0)$, $m = 0,1,\dots,p+1$, $(Q(f+Nu))^{(m+1)}(0) - M_1L_1^{-1}(Q(f+Nu))^{(m)}(0) = Q\Phi q^{(m)}$, $m = 0,1,\dots,p-1$. Тогда существует единственное решение $(\hat{x},\hat{u}) \in \mathcal{Z} \times L_2(0,T;\mathcal{U})$ задачи (12)–(15).

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 4. Положим $\mathfrak{U} = L_2(0,T;\mathcal{U})$, $\mathfrak{V} = L_2(0,T;\mathcal{Y}) \times L_2(-r,0;\mathcal{X})$, $\mathfrak{Y}_1 = \mathcal{Z}$, $\mathfrak{Y} = L_2(-r,T;\mathcal{X}) \cap L_2(0,T;D_M) \cap W_2^1(0,T;\mathcal{X})$. Существующее по теореме 2 решение задачи (12), (13) лежит в $L_2(-r,T;\mathcal{X}) \cap L_2(0,T;D_M) \cap W_2^1(0,T;\mathcal{X})$ и поэтому $\mathfrak{W}$ непусто.

Отображение $\mathfrak{L} : \mathcal{Z} \times L_2(0,T;\mathcal{U}) \to L_2(0,T;\mathcal{Y}) \times L_2(-r,0;\mathcal{X})$ задаёт систему управления в виде (9) с вектором $\mathfrak{F}_0 = \{-f,-h\} \in \mathfrak{V}$. Имеем

$$\|(L\dot{x} - Mx - \Phi x_t - Nu, \gamma_0 x)\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{Y})\times L_2(-r,0;\mathcal{X})} =$$

$$= \|L\dot{x} - Mx - \Phi x_t - Nu\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{Y})} + \|\gamma_0 x\|^2_{L_2(-r,0;\mathcal{X})} \leq$$

$$\leq 2\|L\dot{x} - Mx - \Phi x_t\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{Y})} + 2\|Nu\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{Y})} + \|x\|^2_{L_2(-r,T;\mathcal{X})} \leq 3\|x\|^2_{\mathcal{Z}} + C_1\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{U})}.$$

Таким образом, доказана непрерывность $\mathfrak{L}$.

Докажем коэрцитивность функционала (15). Имеем в силу равенства (12)

$$\|x\|^2_{\mathcal{Z}} + \|u\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{U})} = \|x\|^2_{L_2(-r,T;\mathcal{X})} + \|x\|^2_{L_2(0,T;D_M)} + \|x\|^2_{W_2^1(0,T;\mathcal{X})} +$$

$$+ \|L\dot{x} - Mx - \Phi x_t\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{Y})} + \|u\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{U})} \leq 2\|x\|^2_{L_2(0,T;D_M)} +$$

$$+ \|h\|^2_{L_2(-r,0;\mathcal{X})} + \|x\|^2_{W_2^1(0,T;\mathcal{X})} + 2\|Nu\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{Y})} + 2\|f\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{Y})} + \|u\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{U})} \leq$$

$$\leq 2\|x\|^2_{L_2(0,T;D_M)} + \|x\|^2_{W_2^1(0,T;\mathcal{X})} + C_2\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{U})} + C_3 \leq C_4 J(x,u) + C_5 \leq C_4 R + C_5 = C_6.$$

По теореме 4 отсюда следует существование оптимального управления. Так как функционал J представляет собой квадрат нормы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{Y}$, он является строго выпуклым. Поэтому оптимальное управление единственно. □

Замечание 3. Если $\mathcal{U}_\partial$ имеет внутреннюю точку, то оно содержит элемент из $C^1([0,T];\mathcal{U})$ в силу плотности этого пространства в $L_2(0,T;\mathcal{U})$.

3. Случай интегрального оператора запаздывания

Пусть выполняются предположения предыдущего параграфа, а оператор запаздывания Φ имеет вид интегрального оператора с нетривиальным интегральным ядром $\mathcal{K} : [-r,0] \to \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$. Рассмотрим задачу управления

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + \int_{-r}^{0} \mathcal{K}(s)x(t+s)ds + Nu(t), \quad t \in [0,T], \tag{16}$$

$$Px(t) = h(t), \quad t \in [-r,0], \tag{17}$$

$$u \in \mathcal{U}_\partial, \tag{18}$$

$$J(x,u) = \|x\|^2_{L_2(0,T;D_M)} + \|x\|^2_{W_2^1(0,T;\mathcal{X})} + \|u\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{U})} \to \inf, \tag{19}$$

где $h : [-r,0] \to \mathcal{X}^1$, P — проектор вдоль $\mathcal{X}^0$ на $\mathcal{X}^1$, $\mathcal{U}_\partial$ — замкнутое выпуклое подмножество пространства $L_2(0,T;\mathcal{U})$, $J(x,u)$ — функционал стоимости.

В данном случае будем использовать банахово пространство

$$\mathcal{Z} = \{z \in L_2(-r,T;\mathcal{X}) \cap L_2(0,T;D_M) \cap W_2^1(0,T;\mathcal{X}) :$$

$$L\dot{z}(\cdot) - Mz(\cdot) - \int\limits_{-r}^{0} \mathcal{K}(s)z(\cdot+s)ds \in L_2(0,T;\mathcal{Y})\},$$

являющееся частным случаем аналогичного пространства, использованного в предыдущем параграфе.

Теорема 6. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $f \in C^{p+1}([0,T];\mathcal{Y})$, $h \in C([-r,0];\mathcal{X}^1)$, $h(0) \in D_{M_1}$, $\mathcal{K} \in C^{p+1}([-r,0];\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}))$, $\mathcal{K}^{(n)}(-r) = \mathcal{K}^{(n)}(0) = 0$ при $n = 0,1,\dots,p$, $\mathcal{X}^0 \subset \ker\mathcal{K}(s)$ при $s \in [-r,0]$, $\mathcal{U}_\partial$ — замкнутое выпуклое подмножество пространства $L_2(0,T;\mathcal{U})$, $\mathcal{U}_\partial \cap C^1([0,T];\mathcal{U}) \neq \emptyset$. Тогда существует единственное решение $(\hat{x},\hat{u}) \in \mathcal{Z} \times L_2(0,T;\mathcal{U})$ задачи* (16)–(19).

Доказательство. Пространства $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{U}$ выберем, как при доказательстве теоремы 5, с учётом изменения в определении пространства $\mathcal{Z}$. Для доказательства данной теоремы достаточно показать выполнение условий теоремы 4. Согласно теореме 3 существует решение задачи (16), (17) при некоторой функции $u_0 \in \mathcal{U}_\partial \cap C^1([0,T];\mathcal{U})$. Это решение лежит в $\mathcal{Z}$, поэтому выполняется условие нетривиальности множества допустимых пар. Остальные рассуждения повторяют соответствующую часть доказательства теоремы 5. □

4. Задача управления для системы гравитационно-гироскопических волн с запаздыванием

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим возмущённую интегральным оператором запаздывания систему уравнений гравитационно-гироскопических волн [21]

$$\frac{\partial v}{\partial t} - [v,\overline{\omega}] + \rho_0^{-1} r + g\rho_0^{-1} e_3 \rho_1 + \int\limits_{-\tau}^{0} K(s)v(x,t+s)ds = f^1,\ (x,t) \in \Omega \times [0,T], \quad (20)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} - 2\beta\rho_0 v_3 = f^2, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \quad (21)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \quad (22)$$

снабжённую начальными условиями

$$v(x,t) = h^1(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [-\tau,0], \quad (23)$$

$$\rho_1(x,t) = h^2(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [-\tau,0], \quad (24)$$

и краевым условием

$$\langle v,n\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \quad (25)$$

Вектор-функции скорости жидкости $v = (v_1,v_2,v_3)$, градиента динамического давления $r = (r_1,r_2,r_3) = (p_{x_1},p_{x_2},p_{x_3})$ и вызванного движением жидкости изменения плотности ρ_1 неизвестны. Заданы векторы $e_3 = (0,0,1)$, $\overline{\omega} = \omega e_3 = (0,0,\omega)$, где ω — удвоенная угловая скорость, g — ускорение свободного падения, а также единичный вектор внешней нормали $n = (n_1, n_2, n_3)$ к границе $\partial\Omega$ области Ω, $\beta > 0$. Заданная функция $\rho_0 \in C(\overline{\Omega})$ такова, что $\rho_0^{-1} \in C(\overline{\Omega})$.

Пусть $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^3$, $\mathbb{H}_\sigma$ — замыкание линеала $\mathfrak{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla \cdot v = 0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$, $\mathbb{H}_\pi$ — его ортогональное дополнение в $\mathbb{L}_2$, $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi = I - \Sigma$ — соответствующие ортопроекторы.

Определим оператор $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma; \mathbb{L}_2)$ по правилу $Bz = [z, \overline{\omega}]$, где $[\cdot,\cdot]$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$; $P_3 \in \mathcal{L}(\mathbb{L}_2; L_2(\Omega))$ — проектор на ось Ox_3: $P_3(z_1, z_2, z_3) = z_3$; $E_3 \in \mathcal{L}(L_2(\Omega); \mathbb{L}_2)$ — оператор умножения скалярной функции на вектор e_3: $E_3 z = (0, 0, z)$. Будут использоваться также операторы из $\mathbb{L}_2$ в $\mathbb{L}_2$ умножения вектор-функции на заданную непрерывную на $\overline{\Omega}$ функцию, например, ρ_0 или ρ_0^{-1}, которые будут обозначаться символами самих функций.

Уравнение несжимаемости (22) и краевое условие (25) заменим уравнением

$$\Pi v(\cdot, t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{26}$$

(см. [22] по этому поводу). Оно означает, что скорость v заведомо ищется в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$. Поскольку градиент динамического давления $r \in \mathbb{H}_\pi$, возьмём

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{L}_2 \times L_2(\Omega) = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times L_2(\Omega), \tag{27}$$

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} \Sigma B & \mathbb{O} & -g\Sigma E_3\rho_0^{-1} \\ \Pi B & -\rho_0^{-1} & -g\Pi E_3 \rho_0^{-1} \\ 2\beta\rho_0 P_3 & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}). \tag{28}$$

Лемма 3. *Пусть пространства и операторы заданы формулами* (27), (28). *Тогда оператор M сильно $(L, 0)$-радиален, проекторы имеют вид*

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \rho_0 \Pi B & \mathbb{O} & -g\rho_0\Pi E_3\rho_0^{-1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Доказательство. Имеем

$$\mu L - M = \begin{pmatrix} \mu - \Sigma B & \mathbb{O} & g\Sigma E_3\rho_0^{-1} \\ -\Pi B & \rho_0^{-1} & g\Pi E_3\rho_0^{-1} \\ -2\beta\rho_0 P_3 & \mathbb{O} & \mu \end{pmatrix},$$

$$(\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} D_\mu^{-1} & \mathbb{O} & -\frac{g}{\mu} D_\mu^{-1}\Sigma E_3 \rho_0^{-1} \\ \rho_0 \Pi\left(B - \frac{2\beta g}{\mu} E_3 P_3\right) D_\mu^{-1} & \rho_0 & A_{23} \\ \frac{2\beta}{\mu}\rho_0 P_3 D_\mu^{-1} & \mathbb{O} & \frac{1}{\mu} - \frac{2\beta g}{\mu^2}\rho_0 P_3 D_\mu^{-1}\Sigma E_3\rho_0^{-1} \end{pmatrix},$$

где

$$A_{23} = \frac{g}{\mu}\rho_0 \Pi \left(\frac{2\beta g}{\mu} E_3 P_3 D_\mu^{-1}\Sigma - BD_\mu^{-1}\Sigma - 1\right) E_3\rho_0^{-1}, \quad D_\mu = \mu - \Sigma B + \frac{2\beta g}{\mu}\Sigma E_3 P_3.$$

Оператор $D_\mu^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)$ существует при $|\mu| > \max\{1, |\omega| + 2\beta g\}$, поскольку $\|\Sigma B\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)} = |\omega|$, $\|\Sigma E_3 P_3\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)} = 1$. Все остальные операторы в полученном выражении для $(\mu L - M)^{-1}$ ограничены. Поэтому оператор M (L, σ)-ограничен [16]. Так как $L(I - P) = \mathbb{O}$, то $L_0 = \mathbb{O}$, поэтому оператор M $(L, 0)$-ограничен [16], а значит, сильно $(L, 0)$-радиален [16]. При этом

$$R_\mu^L(M) = \begin{pmatrix} D_\mu^{-1} & \mathbb{O} & -\frac{g}{\mu} D_\mu^{-1}\Sigma E_3 \rho_0^{-1} \\ \rho_0 \Pi\left(B - \frac{2\beta g}{\mu} E_3 P_3\right) D_\mu^{-1} & \mathbb{O} & A_{23} \\ \frac{2\beta}{\mu}\rho_0 P_3 D_\mu^{-1} & \mathbb{O} & \frac{1}{\mu} - \frac{2\beta g}{\mu^2}\rho_0 P_3 D_\mu^{-1}\Sigma E_3\rho_0^{-1} \end{pmatrix},$$

$$L^L_\mu(M) = \begin{pmatrix} D_\mu^{-1} & \mathbb{O} & -\frac{g}{\mu}D_\mu^{-1}\Sigma E_3\rho_0^{-1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \frac{2\beta}{\mu}\rho_0 P_3 D_\mu^{-1} & \mathbb{O} & \frac{1}{\mu} - \frac{2\beta g}{\mu^2}\rho_0 P_3 D_\mu^{-1}\Sigma E_3 \rho_0^{-1} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\mu D_\mu^{-1} = I + \mu^{-1}\Sigma B + \mu^{-2}((\Sigma B)^2 - 2\beta g \Sigma E_3 P_3) + \ldots$ (соответствующий ряд сходится по операторной норме), то, используя замечание 2, получим равенства (29). □

Замечание 4. Из вида проектора P следует, что $\mathcal{X}^1$ изоморфно подпространству $\mathbb{H}_\sigma \times \{0\} \times L_2(\Omega)$, $\mathcal{X}^0 = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi \times \{0\}$.

Теорема 7. *Пусть* $f^1 \in C^1([0,T];\mathbb{L}_2)$, $f^2 \in C^1([0,T];L_2(\Omega))$, $h^1 \in C([-\tau,0];\mathbb{H}_\sigma)$, $h^2 \in C([-\tau,0];L_2(\Omega))$, $K \in C^1([-\tau,0];\mathbb{R})$, $K(-\tau) = K(0) = 0$. *Тогда существует единственное решение* $v \in C([-\tau,T];\mathbb{H}_\sigma) \cap C^1([0,T];\mathbb{H}_\sigma)$, $r \in C^1([0,T];\mathbb{H}_\pi)$, $\rho_1 \in C([-\tau,T];L_2(\Omega)) \cap C^1([0,T];L_2(\Omega))$ *задачи* (20), (21), (23), (24), (26).

Доказательство. Согласно лемме 3 оператор M сильно $(L,0)$-радиален. С учётом вида уравнений (20), (21) в качестве интегрального ядра в операторе запаздывания имеем оператор-функцию

$$\mathcal{K}(s) = \begin{pmatrix} K(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Благодаря тому, что подпространство $\mathcal{X}^0$ имеет вид $\{0\} \times \mathbb{H}_\pi \times \{0\}$ и $\ker \mathcal{K}(s) = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi \times L_2(\Omega)$, вложение $\mathcal{X}^0 \subset \ker\mathcal{K}(s)$ очевидно. Поскольку $M \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, то $D_M = \mathcal{X}$ и условие $h(0) \in D_M$ выполняется. По теореме 3 получим требуемое. □

Положим $\mathcal{U} = \mathcal{Y} = \mathbb{L}_2 \times L_2(\Omega)$ и рассмотрим задачу управления

$$\frac{\partial v}{\partial t} - [v,\overline{\omega}] + \rho_0^{-1} r + g\rho_0^{-1} e_3 \rho_1 + \int\limits_{-\tau}^{0} K(s) v(x,t+s)ds = u,\ (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{30}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} - 2\beta\rho_0 v_3 = w, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{31}$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{32}$$

с начальными условиями (23), (24) и краевым условием (25). Множество допустимых управлений $\mathcal{U}_\partial$ задано как множество вектор-функций $\mathbf{u} = (u,w)$, удовлетворяющих неравенству

$$\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathbb{L}_2)} + \|w\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \leq R^2, \tag{33}$$

функционал качества имеет вид

$$J(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_d\|^2_{W_2^1(0,T;\mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times L_2(\Omega))} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|^2_{L_2(0,T;\mathbb{L}_2 \times L_2(\Omega))} \to \inf. \tag{34}$$

Здесь $\mathbf{z} = (v,r,\rho_1)$ — неизвестная вектор-функция, $\mathbf{u} = (u,w)$ — вектор-функция управления, $\mathbf{z}_d = (v_d, r_d, \rho_{1d})$, $\mathbf{u}_d = (u_d, w_d)$ — заданные функции.

Пространство $\mathcal{Z}$ в данном случае имеет вид

$$\mathcal{Z} = \big\{\mathbf{z} = (v,r,\rho_1) : v \in L_2(-\tau,T;\mathbb{H}_\sigma) \cap W_2^1(0,T;\mathbb{H}_\sigma), r \in W_2^1(0,T;\mathbb{H}_\pi),$$

$$\rho_1 \in L_2(-\tau, T; L_2(\Omega)) \cap W_2^1(0, T; L_2(\Omega)) :$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - [v, \overline{\omega}] + \rho_0^{-1} r + g\rho_0^{-1} e_3 \rho_1 + \int\limits_{-\tau}^{0} K(s) v(x, t+s) ds \in L_2(0, T; \mathbb{L}_2),$$

$$\left.\frac{\partial \rho_1}{\partial t} - 2\beta\rho_0 v_3 \in L_2(0, T; L_2(\Omega))\right\}.$$

Теорема 8. *Пусть* $h^1 \in C([-\tau, 0]; \mathbb{H}_\sigma)$, $h^2 \in C([-\tau, 0]; L_2(\Omega))$, $K \in C^1([-\tau, 0]; \mathbb{R})$, $K(-\tau) = K(0) = 0$. *Тогда существует единственное решение* $(\hat{v}, \hat{r}, \hat{\rho}_1, \hat{u}, \hat{w}) \in \mathcal{Z} \times L_2(0, T; \mathbb{L}_2 \times L_2(\Omega))$ *задачи* (23)–(25), (30)–(34).

Доказательство. Возьмём $\mathbf{u} = \mathbf{0} \in \mathcal{U}_\partial$ и по теореме 7 получим нетривиальность множества допустимых пар. По теореме 6 получим требуемое. □

Список литературы

1. **Красовский, Н. Н.** Об аппроксимации одной задачи об оптимальном управлении в системе с последействием / Н. Н. Красовский // Докл. АН СССР. — 1966. — Т. 167, № 3. — С. 540–542.
2. **Красовский, Н. Н.** Теория управления движением / Н. Н. Красовский. — М. : Наука, 1968. — 476 с.
3. **Габасов, Р.** Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — М. : Наука, 1971. — 508 с.
4. **Колмановский, В. Б.** Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием / В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. — М. : Наука, 1981. — 448 с.
5. **Лионс, Ж.-Л.** Управление сингулярными распределёнными системами / Ж.-Л. Лионс. — М. : Наука, 1987. — 456 с.
6. **Фурсиков, А. В.** Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков. — Новосибирск : Науч. кн., 1999. — 350 с.
7. **Федоров, В. Е.** Задача стартового управления для класса полулинейных распределённых систем соболевского типа / В. Е. Федоров, М. В. Плеханова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2011. — Т. 17, № 1. — С. 259–267.
8. **Плеханова, М. В.** Задачи с жёстким смешанным управлением для линеаризованного уравнения Буссинеска / М. В. Плеханова, А. Ф. Исламова // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 4. — С. 565–576.
9. **Плеханова, М. В.** Оптимальное управление вырожденными распределёнными системами / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров. — Челябинск : Издат. центр Юж.-Урал. гос. ун-та, 2013. — 172 с.
10. **Плеханова, М. В.** Квазилинейные уравнения, не разрешимые относительно старшей производной по времени / М. В. Плеханова // Сиб. мат. журн. — 2015. — Т. 56, № 4. — С. 909–921.
11. **Plekhanova, M. V.** Optimal control for quasilinear degenerate systems of higher order / M. V. Plekhanova // Journal of Mathematical Sciences. — 2016. — Vol. 219, no. 2. — P. 236–244.
12. **Плеханова, М. В.** Численное исследование задачи жёсткого управления линеаризованной квазистационарной системой уравнений фазового поля / М. В. Плеханова, Г. Д. Байбулатова // Челяб. физ.-мат. журн. — 2016. — Т. 1, вып. 2. — С. 44–58.
13. **Plekhanova, M. V.** Distributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations / M. V. Plekhanova // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2017. — Vol. 312. — P. 39–46.

14. **Федоров, В. Е.** Линейные уравнения типа Соболева с относительно p-радиальными операторами / В. Е. Федоров // Докл. Акад. наук. — 1996. — Т. 351, № 3. — С. 316–318.
15. **Федоров, В. Е.** Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов / В. Е. Федоров // Алгебра и анализ. — 2000. — Т. 12, вып. 3. — С. 173–200.
16. **Sviridyuk, G. A.** Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. — Utrecht; Boston : VSP, 2003. — 216 p.
17. **Fedorov, V. E.** On solvability of some classes of Sobolev type equations with delay / V. E. Fedorov, E. A. Omelchenko // Functional Differential Equations. — 2011. — Vol. 18, no. 3–4. — P. 187–199.
18. **Федоров, В. Е.** Неоднородные линейные уравнения соболевского типа с запаздыванием / В. Е. Федоров, Е. А. Омельченко // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т. 53, вып. 2. — С. 418–429.
19. **Федоров, В. Е.** Линейные уравнения соболевского типа с интегральным оператором запаздывания / В. Е. Федоров, Е. А. Омельченко // Изв. вузов. Математика. — 2014. — № 1. — С. 71–81.
20. **Федоров, В. Е.** Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденных полугрупп операторов / В. Е. Федоров // Вестн. Челяб. гос. ун-та. — 2009. — № 20 (158). Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 11. — С. 12–19.
21. **Демиденко, Г. В.** Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. — Новосибирск : Науч. кн., 1998. — 438 с.
22. **Соболев, С. Л.** Об одной новой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — Т. 18. — С. 3–50.

Поступила в редакцию 11.06.2018
После переработки 03.08.2018

Сведения об авторах

Плеханова Марина Васильевна, доктор физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет; доцент кафедры вычислительной механики, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: mariner79@mail.ru.

Байбулатова Гузель Дамировна, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: baybulatova_g_d@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2018. Vol. 3, iss. 3. P. 319–331.

DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13305

OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR A CLASS OF DEGENERATE EVOLUTION EQUATIONS WITH DELAY

M.V. Plekhanova[1,2,a], **G.D. Baybulatova**[1,b]

[1] *Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*
[2] *South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia*
[a] *mariner79@mail.ru,* [b] *baybulatova_ g_ d@mail.ru*

The existence of a solution to an optimal control problem for a wide class of equations with delay not solvable with respect to the time derivative is investigated. The set of admissible controls is assumed to be convex and closed in the space of control functions, the minimized functional is quadratic. Under the condition of strong relative p-radiality of the pair of operators in the equation, the theorems on the unique solvability of the optimal control problem for the case of an abstract delay operator and for the case when this operator has an integral form are proved. The obtained general results are used in the study of the optimal control problem for the system of gravitational-gyroscopic waves perturbed by an integral delay operator.

Keywords: *optimal control, system with distributed parameters, degenerate evolution equation, equation with delay, existence and uniqueness of a solution.*

References

1. **Krasovskii N.N.** Ob approksimatsii odnoy zadachi ob optimal'nom upravlenii v sisteme s posledeystviyem [On approximation of an optimal control problem to a system with aftereffect]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1966, vol. 167, no. 3, pp. 540–542. (In Russ.).
2. **Krasovskii N.N.** *Teoriya upravleniya dvizheniyem* [Theory of moving control]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 476 p. (In Russ.).
3. **Gabasov R., Kirillova F.M.** *Kachestvennaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Quality theory of optimal processes]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 508 p. (In Russ.).
4. **Kolmanovskii V.B., Nosov V.R.** *Ustoychivost' i periodicheskiye rezhimy reguliruyemykh sistem s posledeystviyem* [Stability and periodical regimes of controlled systems with aftereffect]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 448 p. (In Russ.).
5. **Lions J.-L.** *Control of Distributed Singular Systems.* Gauthier-Villars, 1985. 552 p.
6. **Fursikov A.V.** *Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications.* Providence, Rhode Island, AMS, 1999. 305 p.
7. **Fedorov V.E., Plekhanova M.V.** The problem of start control for a class of semilinear distributed systems of Sobolev type. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. S40–S48.
8. **Plekhanova M.V., Islamova A.F.** Problems with a robust mixed control for the linearized Boussinesq equation. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 4, pp. 574–585.
9. **Plekhanova M.V., Fedorov V.E.** *Optimal'noye upravleniye vyrozhdennymi raspredelyonnymi sistemami* [Optimal control of degenerate distributed systems]. Chelyabinsk, Publishing Center of South Ural State University, 2013. 172 p.
10. **Plekhanova M.V.** Quasilinear equations that are not solved for the higher-order time derivative. *Siberian Mathematical Journal*, 2015, vol. 56, no. 4, pp. 725–735.
11. **Plekhanova M.V.** Optimal control for quasilinear degenerate systems of higher order. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 219, no. 2, pp. 236–244.

12. **Plekhanova M.V., Baybulatova G.D.** Chislennoye issledovaniye zadachi zhyostkogo upravleniya linearizovannoy kvazistatsionarnoy sistemoy uravneniy fazovogo polya [Numerical study of a robast control problem for the linearized quasistationary system of the phase field equations]. *Chelyabinskiy fiziko-matematicheskiy zhurnal* [Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal], 2016, vol. 1, iss. 2, pp. 44–58. (In Russ.).
13. **Plekhanova M.V.** Distributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017, vol. 312, pp. 39–46.
14. **Fedorov V.E.** Linear Sobolev type equations with relatively p-radial operators. *Doklady Mathematics*, 1996, vol. 54, no. 3, pp. 883–885.
15. **Fedorov V.E.** Degenerate strongly continuous semigroups of operators. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2001, vol. 12, no. 3, pp. 471–489.
16. **Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.** *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht, Boston, VSP, 2003. 216 p.
17. **Fedorov V.E., Omelchenko E.A.** On solvability of some classes of Sobolev type equations with delay. *Functional Differential Equations*, 2011, vol. 18, no. 3–4, pp. 187–199.
18. **Fedorov V.E., Omelchenko E.A.** Inhomogeneous degenerate Sobolev type equations with delay. *Siberian Mathematical Journal*, 2012, vol. 53, no. 2, pp. 335–344.
19. **Fedorov V.E., Omelchenko E.A.** Linear equations of the Sobolev type with integral delay operator. *Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, no. 1, pp. 60–69.
20. **Fedorov V.E.** Svoystva psevdorezol'vent i usloviya sushchestvovaniya vyrozhdennykh polugrupp operatorov [Properties of pseudoresolvents and existence conditions for degenerate semigroups of operators]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of Chelyabinsk State University], 2009, no. 20, pp. 12–19.
21. **Demidenko G.V., Uspenskiy S.V.** *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative.* New York, Marsel Dekker Inc., 2003.
22. **Sobolev S.L.** Ob odnoy novoy zadache matematicheskoy fiziki [On a new problem of mathematical physics]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya* [News of Academy of Sciences of USSR. Series: Mathematical], 1954, vol. 18, no. 1, pp. 3–50. (In Russ.).

Accepted article received 11.06.2018
Corrections received 03.08.2018