Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3, вып. 3. С. 311–318.

УДК 517.977 DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13304

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМОЙ

С. А. Никитина[a], **А. С. Скорынин**[b], **В. И. Ухоботов**[c]

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
[a]*nikitina@csu.ru*, [b]*skorynin@csu.ru*, [c]*ukh@csu.ru*

Предложен один из подходов для решения задачи управления линейной дискретной системой. Рассмотрен конфликтно-управляемый процесс, длительность которого задана. Требуется, чтобы в момент окончания процесса управления фазовая точка содержалась в заданном множестве. Правила, описывающие управление дискретной системой, содержат дискриминацию второго игрока. Рассмотрен случай, когда вектограмма управления и заданное множество являются многогранниками, заданными с помощью системы линейных неравенств. Предполагается, что для многогранников выполнено определённое свойство линейности, которое позволяет получить решение задачи в явном виде. В работе вводится в рассмотрение оператор программного поглощения. С помощью этого оператора записаны условия на множество начальных положений, при которых гарантируется выполнение требуемого включения в момент окончания процесса управления. Эти условия записаны в виде системы неравенств. В практической части работы показано применение полученных результатов для экономических систем. Приведено решение задачи управления запасами.

Ключевые слова: *дискретная система, многошаговая задача управления, многогранная область значений управления, задача управления запасами.*

Введение

В работах [1–3] при рассмотрении непрерывных задач управления были предложены процедуры построения стабильного моста и управления, гарантирующего выполнение заданных условий в момент окончания процесса.

В данной статье будет рассмотрена дискретная модель управляемого процесса. Дискретные процессы управления возникают, как правило, при решении прикладных задач. Это связано с тем, что зачастую информация о состоянии процесса поступает в дискретные моменты времени, а управление осуществляется по шагам.

К задачам такого рода относятся, например, задача управления запасами [4, с. 13], задачи составления модели развития различных систем, расчёта технологических комплексов, управления непрерывным процессом с помощью ЭВМ.

1. Постановка задачи

Рассмотрим дискретный конфликтно-управляемый процесс, заданный следующим уравнением:

$$z(s+1) = z(s) - u(s) + v(s), \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $v(s) \in V(s) \subset \mathbb{R}^n$, $u(s) \in U(s) \subset \mathbb{R}^n$, $s = 0, 1, \dots, N$. Здесь u — управление первого игрока, v — управление второго игрока. Считаем, что задано

$N \geq 1$ — число шагов (длительность) процесса управления. Множество $V(s)$ при каждом $s = 0, 1, \ldots, N$ является выпуклым компактом в $\mathbb{R}^n$.

Предполагаем, что $U(s) = A(\alpha(s))$. Здесь $A(y)$ — многогранник, задаваемый с помощью фиксированного набора из q векторов $c_j \in \mathbb{R}^n$ системой линейных неравенств

$$A(y) = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle c_j, z\rangle \leq y_j,\ j = 1, 2, \ldots, q\}. \tag{2}$$

С помощью $\langle c, z\rangle$ обозначено скалярное произведение векторов c и z в $\mathbb{R}^n$.

Известно [5], что многогранник (2) не пуст тогда и только тогда, когда $y \in K$, где конус

$$K = \left\{ y \in \mathbb{R}^q : \sum_{j=1}^{q} \lambda_j y_j \geq 0\ \forall \lambda_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, q;\ \sum_{j=1}^{q} \lambda_j x_j = 0 \right\}. \tag{3}$$

Поэтому считаем, что $\alpha(s)$ содержится в конусе (3) при всех $s = 0, 1, \ldots N$.

Будем предполагать, что при каждом $y \in K$ многогранник (2) является ограниченным. Для этого [5] необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\{ z \in \mathbb{R}^n : z = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, q \right\} = \mathbb{R}^n.$$

Предполагаем также, что многогранник (2) при каждых $y, y^* \in K$ удовлетворяет следующему условию:

$$A(y + y^*) = A(y) + A(y^*). \tag{4}$$

Отметим, что в работе [6] приведены примеры многогранников, удовлетворяющих условию (4).

Задано терминальное множество $Z \subset \mathbb{R}^n$. Первый игрок стремится осуществить включение $z(N) \in Z$. Второй игрок имеет противоположный интерес. Предполагаем, что $Z = A(\beta)$, $\beta \in K$.

Приведём правила, описывающие поведение игроков. В начальный момент времени второй игрок исходя из начального положения $z(0)$ выбирает управление $v(0)$ из множества $V(0)$. Зная начальное положение и выбор второго игрока, первый игрок выбирает управление $u(0)$ из множества $U(0)$. Для начального условия $z(0)$ и для выбранной допустимой пары управлений реализуется $z(1)$ по правилу (1). В следующий момент $s = 1$ второй игрок исходя из значения $z(1)$ выбирает $v(1)$ из множества $V(1)$. Зная $z(1)$ и выбор второго игрока, первый игрок выбирает управление $u(1)$ из множества $U(1)$ и т. д.

Требуется определить множество начальных положений $z(0)$, откуда первый игрок сможет осуществить включение

$$z(N) \in A(\beta). \tag{5}$$

2. Оператор программного поглощения

Сначала введём в рассмотрение геометрическую разность двух множеств A и B из пространства $\mathbb{R}^n$ [7] $A \overset{*}{-} B = \{z \in \mathbb{R}^n : z + B \subset A\}$.

Справедлива следующая лемма [6].

Лемма 1. *Пусть* A — *многогранник вида* (2), B — компакт в $\mathbb{R}^n$, а $b_j = \max \langle c_j, z \rangle$, где максимум берётся по $z \in B$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_q)$. Тогда $A \overset{*}{-} B = \emptyset$, если $y \notin K$ и $A \overset{*}{-} B = A(y - b)$, если $y \in K$.

Введём в рассмотрение оператор T_s, который каждому числу $s = 0, 1, \ldots, N-1$ и каждому множеству $Y \subset \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие множество $T_s(Y)$, определяемое следующим образом. Точка $z \in T_s(Y)$ тогда и только тогда, когда для любого управления $v(s) \in V(s)$ существует управление $u(s) \in A(\alpha(s))$ такое, что

$$z(s+1) = z - u(s) + v(s) \in Y.$$

Отсюда получим, что $T_s(Y) = (Y + A(\alpha(s))) \overset{*}{-} V(s)$. Положим, что $T_s(\emptyset) = \emptyset$.

Рассмотрим случай, когда $Y = A(\gamma), \gamma \in K$. Тогда, используя формулу (4) и лемму 1, получим, что $T_s(A(\gamma)) = \emptyset$ при $\gamma + \alpha(s) - b(s) \notin K$ и

$$T_s(A(\gamma)) = A(\gamma + \alpha(s) - b(s)) \text{ при } \gamma + \alpha(s) - b(s) \in K.$$

Обозначим

$$\Omega_m = T_m \left(T_{m+1} \left(\ldots T_{N-1}(A(\beta)) \ldots\right)\right), \; m = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{6}$$

Используя введённый оператор программного поглощения, получим, что множество начальных положений, откуда первый игрок сможет осуществить включение (5), запишется в виде Ω_0.

3. Нахождение множества Ω_0

Теорема 1. *Для любого* $m = 0, 1, \ldots, N-1$ *выполняется равенство*

$$\Omega_m = A\left(\beta + \sum_{p=m}^{N-1} (\alpha(p) - b(p))\right)$$

при

$$\beta + \sum_{p=r}^{N-1} (\alpha(p) - b(p)) \in K \quad \forall r = m, m+1, \ldots, N-1 \tag{7}$$

и $\Omega_m = \emptyset$, *если не выполнено хотя бы одно из включений* (7).

Доказательство. Согласно (6) $\Omega_{N-1} = T_{N-1}(A(\beta))$. Из определения оператора $T_s(Y)$ получим, что $\Omega_{N-1} = T_{N-1}(A(\beta)) = A\left(\beta + \alpha(N-1) - b(N-1)\right)$, если $\beta + \alpha(N-1) - b(N-1) \in K$, и $\Omega_{N-1} = T_{N-1}(A(\beta)) = \emptyset$ в противном случае.

Далее запишем $\Omega_{N-2} = T_{N-2}\left(T_{N-1}(A(\beta))\right)$. Значит,

$$\Omega_{N-2} = T_{N-2}\left(A\left(\beta + \alpha(N-1) - b(N-1)\right)\right) =$$

$$= A\left(\beta + \alpha(N-1) - b(N-1) + \alpha(N-2) - b(N-2)\right),$$

если $\beta + \alpha(N-1) - b(N-1) \in K$, $\beta + \alpha(N-1) - b(N-1) + \alpha(N-2) - b(N-2) \in K$ и $\Omega_{N-2} = \emptyset$ в противном случае.

Пусть

$$\Omega_{N-k} = A\left(\beta + \sum_{p=N-k}^{N-1} (\alpha(p) - b(p))\right)$$

при

$$\beta + \sum_{p=r}^{N-1} (\alpha(p) - b(p)) \in K \quad \forall r = N-k, N-k+1, \ldots, N-1 \tag{8}$$

и $\Omega_{N-k} = \emptyset$, если не выполнено хотя бы одно из включений (8).

Рассмотрим

$$\Omega_{N-k-1} = T_{N-k-1}\left(T_{N-k+1}\left(\ldots T_{N-1}(A(\beta))\ldots\right)\right),\ m = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Тогда

$$\Omega_{N-k-1} = T_{N-k-1}\left(A\left(\beta + \sum_{p=N-k}^{N-1} (\alpha(p) - b(p))\right)\right) = A\left(\beta + \sum_{p=N-k-1}^{N-1} (\alpha(p) - b(p))\right)$$

при

$$\beta + \sum_{p=r}^{N-1} (\alpha(p) - b(p)) \in K \quad \forall r = N-k-1, N-k, \ldots, N-1 \tag{9}$$

и $\Omega_{N-k} = \emptyset$, если не выполнено хотя бы одно из включений (9).

Продолжая предыдущие рассуждения, получим утверждение теоремы. □

Из доказанной теоремы 1 следует, что

$$\Omega_0 = A\left(\beta + \sum_{p=0}^{N-1} (\alpha(p) - b(p))\right) \tag{10}$$

при

$$\beta + \sum_{p=r}^{N-1} (\alpha(p) - b(p)) \in K \quad \forall r = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{11}$$

и $\Omega_m = \emptyset$, если не выполнено хотя бы одно из включений (11).

Запишем условие (10) в следующем виде:

$$\langle c_j, z(0)\rangle \leq \beta_j + \sum_{p=0}^{N-1} (\alpha_j(p) - b_j(p)),\ j = 1, 2, \ldots, q.$$

Условия (11) принимают вид

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \cdot \beta_j \geq 0 \quad \forall \lambda_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, q;\ \sum_{j=1}^{q} \lambda_j c_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \cdot \beta_j \geq \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \cdot (b_j(N-1) - \alpha_j(N-1)) \quad \forall \lambda_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, q;\ \sum_{j=1}^{q} \lambda_j c_j = 0,$$

$$\ldots$$

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \cdot \beta_j \geq \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \cdot \left(\sum_{p=0}^{N-1} (b_j(p) - \alpha_j(p))\right) \quad \forall \lambda_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, q;\ \sum_{j=1}^{q} \lambda_j c_j = 0.$$

Следовательно, для того чтобы из начального положения $z(0)$ осуществить включение (5), должны выполняться неравенства

$$\langle c_j, z(0)\rangle \leq \beta_j + \sum_{p=0}^{N-1} (\alpha_j(p) - b_j(p)),\ j = 1, 2, \ldots, q, \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \cdot \beta_j \geq \max \left\{ 0; \max_{0 \leq m \leq N-1} \left(\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \cdot \left(\sum_{p=m}^{N-1} (b_j(p) - \alpha_j(p)) \right) \right) \right\}$$

$$\forall \lambda_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, q;\ \sum_{j=1}^{q} \lambda_j c_j = 0. \tag{13}$$

Отметим, что аналогичные условия для непрерывной задачи управления с многогранной областью значений управления были получены в работе [8].

4. Пример

В качестве примера рассмотрим задачу оптимального управления запасами [4]. Предположим, что некоторое производственное объединение может выпускать товары двух видов.

Пусть $x(k) = (x_1(k); x_2(k))$ — вектор количества товаров первого и второго вида, выпускаемых этой фирмой, имеющихся в наличии на складе к концу k-го периода, $\tilde{u}(k) = (\tilde{u}_1(k); \tilde{u}_2(k))$ — вектор интенсивностей (скорость производства), $s(k) = (s_1(k); s_2(k))$ — вектор количества товаров, отгруженных со склада в k-й период (определяется спросом на товары).

Предполагаем, что

$$\tilde{u}(k) \in \tilde{U}(k) = \left\{ \tilde{u}(k) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \tilde{u_1}(k) \leq 1, 0 \leq \tilde{u_2}(k) \leq 1 \right\},\ k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$s(k) \in S(k) = \left\{ s(k) \in \mathbb{R}^2 : \rho_1 \leq s_1(k) \leq P_1, \rho_2 \leq s_2(k) \leq P_2 \right\},\ k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Способ организации производства в момент времени k определяется технологической матрицей $B(k)_{2\times 2}$. Предполагаем, что матрица $B(k)$ является невырожденной. Уравнение, описывающее дискретный процесс, имеет вид

$$x(k+1) = x(k) + B(k) \cdot \tilde{u} - s(k),\ k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{14}$$

Считаем, что задано $N \geq 1$ — число шагов дискретного процесса.

Пусть к концу N-го периода требуется, чтобы весь товар со склада был вывезен, т. е. $x(N) = (0; 0)$. В общем случае вектор $x(N)$ может определяться спросом на производимые товары или быть планом производства.

Применим полученные выше результаты к решению задачи управления запасами. После замены переменных

$$u(k) = -\tilde{u}(k),\ k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$v(k) = -B^{-1}(k) \cdot s(k),\ k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

уравнение дискретного процесса (14) будет иметь вид

$$x(k+1) = x(k) - B(k) \cdot u + B(k) \cdot v(k),\ k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Отметим, что множество $B(k) \cdot A(\gamma)$, где $B(k)$ — невырожденная матрица при всех $k = 0, 1, \ldots, N-1$, а $A(\gamma)$ определяется формулой (2), также является многогранником вида (2). Причём верно равенство $B(k) \cdot U(k) \overset{*}{-} B(k) \cdot V(k) = B(k) \cdot \left(U(k) \overset{*}{-} V(k) \right)$.

В рассматриваемой задаче множества $B(k) \cdot U(k)$ и $B(k) \cdot V(k)$ являются параллелограммами (2), которые задаются с помощью векторов $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}^2$, причём $c_2 = -c_1, c_4 = -c_3$.

Цель процесса управления запишем в виде $x(N) \in A(0)$. Обозначим $b_j(k) = \max_{v(k)\in V(k)} \langle c_j, -v(k)\rangle = \max_{s(k)\in S(k)} \left\langle B^T c_j, s(k)\right\rangle, j = 1, 2, 3, 4$.

Согласно (12), (13), для того чтобы к концу заданного периода времени весь товар со склада был вывезен, в начальный момент времени запас товаров на складе $x(0) = (x_1(0), x_2(0))$ должен удовлетворять условиям

$$\langle c_j, x(0)\rangle \le \sum_{p=0}^{N-1} \left(\alpha_j(p) - b_j(p)\right),\ j = 1, 2, 3, 4,$$

$$\sum_{j=1}^{4} \lambda_j \cdot \left(\sum_{p=m}^{N-1} (b_j(p) - \alpha_j(p))\right) \le 0\ \forall \lambda_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4;\ \sum_{j=1}^{4} \lambda_j c_j = 0.$$

Список литературы

1. **Ухоботов, В. И.** Стабильный мост для одного класса дифференциальных игр / В. И. Ухоботов, С. А. Никитина // Вестн. Челяб. ун-та. — 2003. — № 1 (7). Сер. 3. Математика. Механика. Информатика. — С. 99–107.
2. **Ухоботов, В. И.** Построение гарантированного управления в квазилинейных системах / В. И. Ухоботов, С. А. Никитина // Тр. Ин-та математики и механики. Динамич. системы и проблемы упр. — 2005. — Т. 11, № 5. — С. 201–211.
3. **Ухоботов, В. И.** Динамическая задача управления при наличии помехи и с заданным множеством моментов коррекции / В. И. Ухоботов, И. С. Стабулит // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютер. науки. — 2018. — Т. 28, вып. 1. — С. 74–81.
4. **Пропой, А. И.** Элементы теории оптимальных дискретных процессов / А. И. Пропой. — М. : Наука, 1973. — 256 с.
5. **Пшеничный, Б. Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б. Н. Пшеничный. — М. : Мир, 1980. — 319 с.
6. **Ухоботов, В. И.** К построению стабильных мостов / В. И. Ухоботов // Приклад. математика и механика. — 1980. — Т. 44, вып. 5. — С. 934–938.
7. **Понтрягин, Л. С.** Линейные дифференциальные игры. II / Л. С. Понтрягин // Докл. АН СССР. — 1967. — Т. 175, № 4. — С. 764–766.
8. **Ухоботов, В. И.** Вычисление функции цены игры для одного класса декомпозиционных дифференциальных игр / В. И. Ухоботов, С. А. Никитина // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. — 2006. — Вып. 3 (37). — С. 153–154.

Поступила в редакцию 24.05.2018
После переработки 29.07.2018

Сведения об авторах

Никитина Светлана Анатольевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: nikitina@csu.ru.

Скорынин Антон Сергеевич, аспирант математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: skorynin@csu.ru.

Ухоботов Виктор Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: ukh@csu.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2018. Vol. 3, iss. 3. P. 311–318.

DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13304

ON A CONTROL PROBLEM FOR A DISCRETE SYSTEM

S.A. Nikitina[a], **A.S. Skorynin**[b], **V.I. Ukhobotov**[c]

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
[a]*nikitina@csu.ru,* [b]*skorynin@csu.ru,* [c]*ukh@csu.ru*

The article proposes one of the approaches for solving the control problem of a linear discrete system. A conflict-controlled process is considered whose duration is given. It is required that at the end of the control process the phase point is contained in a given set. Rules governing the control of a discrete system contain discrimination for the second player. The case is considered when the control vector and a given set are polyhedra given by a system of linear inequalities. It is assumed that for polyhedra a certain property of linearity is satisfied, which makes it possible to obtain the solution of the problem explicitly. The operator of operator absorption is introduced into the consideration in the paper. With the help of this operator, conditions are written for a set of initial positions under which the required inclusion is guaranteed at the time of the end of the control process. These conditions are written in the form of a system of inequalities. The practical part of the work shows the application of the obtained results to economic systems. The solution of the problem of inventory management is given.

Keywords: *discrete system, multi-step control problem, polyhedral control set, inventory management problem.*

References

1. **Uhobotov V.I., Nikitina S.A.** Stabil'nyy most dlya odnogo klassa differentsial'nykh igr [Stable bridge for a class of differential games]. *Vestnik Chelyabinskogo universiteta* [Bulletin of Chelyabinsk State University], 2003, no. 1 (7), pp. 99–107. (In Russ.).
2. **Uhobotov V.I., Nikitina S.A.** Postroyeniye garantirovannogo upravleniya v kvazilineynykh sistemakh [Construction of guaranteed control in quasilinear systems]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki. Dinamicheskiye sistemy i problemy upravleniya* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics. Dynamic Systems and Control Problems], 2005, vol. 1, no. 5, pp. 201–211. (In Russ.).
3. **Uhobotov V.I., Stabulit I.S.** Dinamicheskaya zadacha upravleniya pri nalichii pomekhi i s zadannym mnozhestvom momentov korrektsii [Dynamic control problem in the presence of interference and with a given set of correction moments]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki* [The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science], 2018, vol. 28, no. 1, pp. 74–81. (In Russ.).
4. **Propoy A.I.** *Elementy teorii optimal'nykh diskretnykh protsessov* [Elements of the theory of optimal discrete processes]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 256 p. (In Russ.).
5. **Pshenichny B.N.** *Vypuklyy analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex analysis and extremal problems]. Moscow, Mir Publ., 1980. 319 p. (In Russ.).
6. **Uhobotov V.I.** K postroyeniyu stabil'nykh mostov [To the construction of stable bridges]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1980, vol. 44, no. 5, pp. 934–938. (In Russ.).
7. **Pontryagin L.S.** *Lineynye differentsial'nye igry. II* [Linear differential games. II]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1967, vol. 175, no. 4, pp. 764–766. (In Russ.).

8. **Uhobotov V.I., Nikitina S.A.** Vychisleniye funktsii tseny igry dlya odnogo klassa dekompozitsionnykh differentsial'nykh igr [Calculation of the game price function for a class of decompositional differential games]. *Izvestiya Instituta matematiki i informatiki Udmurtskogo gosudarstvennogo universiteta* [News of the Institute of Mathematics and Informatics of the Udmurt State University], 2006, vol. 3 (37), pp. 153–154. (In Russ.).

Accepted article received 24.05.2018
Corrections received 29.07.2018