Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3, вып. 3. С. 295–310.

УДК 517.9 DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13303

О СООТВЕТСТВИИ БАЗИСНЫХ МНОЖЕСТВ А-ЭНДОМОРФИЗМОВ И А-ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

Н. В. Исаенкова[1,a], **Е. В. Жужома**[2,b]

[1]*Нижегородская академия Министерства внутренних дел Российской Федерации, Нижний Новгород, Россия*
[2]*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия*
[a]*nisaenkova@mail.ru*, [b]*zhuzhoma@mail.ru*

Ранее авторами был введён класс диффеоморфизмов Смейла — Виеториса, который содержит ДЕ-отображения Смейла. В статье рассматривается класс А-диффеоморфизмов Смейла — Виеториса, определяющийся с помощью базовых А-эндоморфизмов многообразий, размерность которых меньше размерности несущих многообразий А-диффеоморфизмов. Показано, что имеется взаимно однозначное соответствие между базисными множествами базового А-эндоморфизма и А-диффеоморфизма Смейла — Виеториса. Для назад-инвариантного базисного множества базового А-эндоморфизма приводится точное описание соответствующего нетривиального базисного множества А-диффеоморфизма Смейла — Виеториса. На основе полученного описания строится бифуркация между различными типами соленоидальных базисных множеств.

Ключевые слова: *соленоид, аксиома А, базисное множество, бифуркация.*

Введение

В работе [1] была предложена конструкция построения нетривиальных базисных множеств А-диффеоморфизмов с помощью растягивающихся эндоморфизмов. А именно, были введены так называемые ДЕ-отображения (основные понятия и факты теории динамических систем см. в обзорах [2; 3] и книгах [4; 5]). Напомним определение ДЕ-отображения Смейла (аббревиатура ДЕ формируется из первых букв *Derived* from *Expanding* map).

Определение 1. *Пусть T — замкнутое многообразие и N — n-мерный диск, $n \geq 2$. Тогда ДЕ-отображение Смейла является косым отображением вида*

$$f : T \times N \to T \times N, \quad (x, y) \mapsto (g_1(x),\ g_2(x, y)),$$

где $g_1 : T \to T$ — растягивающее отображение (будем называть его базовым), а отображение

$$g_2|_{\{x\}\times N} : \{x\} \times N \to \{g_1(x)\} \times N$$

Результаты настоящей работы о взаимно однозначном соответствии между базисными множествами базового А-эндоморфизма и А-диффеоморфизма Смейла — Виеториса получены при финансовой поддержке РНФ (проект 17-11-01041), результаты, посвящённые построению бифуркации между различными типами соленоидальных базисных множеств, получены в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2018 году (проект Т-95).

является равномерно сжимающим отображением n-мерного диска $\{x\} \times N$ в n-мерный диск $\{g_1(x)\} \times N$ для каждой точки $x \in T$.

Более того, отображение f должно быть диффеоморфизмом $T \times N \to f(T \times N)$ на свой образ. Смейл [1] показал, что если размерности $\dim T$, $\dim N$ многообразий T и N удовлетворяют соотношению $\dim N \geq \dim T + 1$, то такие отображения существуют (здесь используется известная теорема Уитни об аппроксимации гладкой иммерсии вложением), и более того, пересечение $\cap_{i \geq 0} f^i(T \times N)$ является гиперболическим растягивающимся аттрактором отображения f. Нетрудно показать, что $\cap_{i \geq 0} f^i(T \times N)$ локально гомеоморфен произведению пространства $\mathbb{R}^{\dim T}$ на канторово множество.

Для случая, когда $T = S^1$ — окружность с линейным растягивающим отображением $g_1 : T \to T$ степени $d \geq 2$, и $N = D^2$ — двумерный диск, то пересечение $\cap_{i \geq 0} f^i(S^1 \times D^2) = \mathfrak{S}(f)$ является топологическим соленоидом. Можно сказать, что Смейл ввёл топологические соленоиды в гиперболическую динамику.

Напомним, что впервые определение соленоида было дано Виеторисом [6] в 1927 г. (независимо соленоид был введён ван Данцингом [7] в 1930 г., см. обзор [8]). Конструкция Смейла была обобщена Вильямсом [9; 10] и Блоком [11]. Вильямс предложил вместо гладких многообразий T рассматривать ветвлённые многообразия, сохранив в качестве базового отображения g_1 растягивающую иммерсию. Это обобщение позволило Вильямсу классифицировать ограничения гиперболических диффеоморфизмов на растягивающиеся аттракторы (т. е. получить классификацию внутренней динамики растягивающихся аттракторов). Блок [11] сохранил в качестве T гладкое многообразие, но вместо растягивающего отображения g_1 рассматривал А-эндоморфизмы (т. е. эндоморфизмы с гиперболическим неблуждающим множеством, в котором плотны периодические точки). Поскольку Смейлом [1] для А-диффеоморфизмов была уже доказана теорема о спектральном разложении неблуждающего множества на базисные множества, то конструкция Блока позволила ему доказать теорему о спектральном разложении для Ω-устойчивых А-эндоморфизмов. Отметим, что связь между базисными множествами базовых А-эндоморфизмов и соответствующих А-диффеоморфизмов в работе [11] не рассматривалась. Авторами статьи в работе [12] было предложено очередное обобщение конструкции Смейла. А именно, вместо базового растягивающего отображения g_1 было предложено рассматривать d-накрытия, $d \geq 2$. В работе [12] были описаны возможные топологические типы базисных множеств для случая $T = S^1$, $N = D^2$. Мотивацией такого обобщения конструкции Смейла являлось то, что подобные отображения возникают при изучении бифуркаций седло-узловых циклов [13; 14]. Кроме этого, Я. Б. Зельдович и др. (см. [15–17]) предположили, что отображения, подобные отображению Смейла, могут быть полезны при изучении проблемы динамо о возникновении достаточно больших магнитных полей астрофизических тел (см. также [18]).

Идеологически данная статья является развитием работ [11; 12]. Основная её цель состоит в изучении связи между базисными множествами А-диффеоморфизмов Смейла — Виеториса и базисными множествами базовых А-эндоморфизмов. Отметим, что в общем случае неблуждающее множество А-диффеоморфизма Смейла — Виеториса не совпадает с инвариантным соленоидальным множеством, а разбивается на тривиальные и нетривиальные базисные множества. Мы показываем, что имеется взаимно однозначное соответствие между тривиальными (нетривиальными) базисными множествами базового А-эндоморфизма и А-диффеоморфизма Смейла — Виеториса. Для назад-инвариантного базисного множества базового А-эндоморфизма приводится точное описание соответствующего нетривиального базисного множества А-диффеоморфизма Смейла — Виеториса. На основе полученного описания строится бифуркация между различными типами соленоидальных базисных множеств, которую можно рассматривать как разрушение (или рождение) соленоидального базисного множества в случае $n = 3$.

Заметим, что в рамках конструкции Смейла — Вильямса были построены интересные примеры растягивающихся аттракторов в работах [19–23]. Боте [24] классифицировал соленоиды Смейла на 3-многообразиях. Он первым доказал, что ДЕ-отображение Смейла $S^1 \times D^2 \to S^1 \times D^2$ может быть продолжено до диффеоморфизма некоторого замкнутого 3-мерного многообразия $M^3 \supset S^1 \times D^2$ (см. также работы [25–27]).

Пусть N — $(n-k)$-мерный диск, где $n - k \geq 1$. Для подмножества $N_1 \subset N$ определим его диаметр $\operatorname{diam} N_1 = \max_{a,b \in N_1}\{\rho_N(a,b)\}$, где ρ_N — метрика на N. Обозначим через $\mathbb{T}^k = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{k}$ k-мерный тор, $k \in \mathbb{N}$.

Определение 2. Сюръективное отображение $g : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$ называется *d-накрытием*, если g — сохраняющий ориентацию локальный гомеоморфизм степени $d \geq 2$. Хорошим примером d-накрытия является сохраняющее ориентацию линейное отображение $E_d : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$, которое задаётся целочисленной $k \times k$ матрицей с определителем, равным d.

Определение 3. *Отображение*

$$F : \mathbb{T}^k \times N \to \mathbb{T}^k \times N, \quad (t,z) \longmapsto (g(t),\ \omega(t,z)) \tag{1}$$

называется косым отображением Смейла, если выполнены условия:

- $F : \mathbb{T}^k \times N \to F\left(\mathbb{T}^k \times N\right)$ *является диффеоморфизмом на свой образ*;
- $g : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$ *— d-накрытие, где $d \geq 2$*;
- *для любого $t \in \mathbb{T}^k$ ограничение $w|_{\{t\}\times N} : \{t\}\times N \to \mathbb{T}^k \times N$ является равномерно сжимающим вложением*

$$\{t\} \times N \to \operatorname{int}\left(\{g(t)\} \times N\right), \tag{2}$$

  т. е. существуют числа $0 < \lambda < 1$, $C > 0$, такие, что

$$\operatorname{diam}(F^n(\{t\} \times N)) \leq C\lambda^n \operatorname{diam}(\{t\} \times N),\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Если $g = E_d$ и $N = D^{k+1}$, то F является ДЕ-отображением Смейла [1].

Определение 4. Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$, где M^n — замкнутое n-мерное многообразие, называется *диффеоморфизмом Смейла — Виеториса*, если существует некоторое n-мерное подмногообразие $\mathbb{T}^k \times N \subset M^n$, такое, что ограничение $f|_{\mathbb{T}^k \times N} \stackrel{\text{def}}{=} F$ является косым отображением Смейла. Будем называть $\mathbb{T}^k \times N \subset M^n$ *базовым многообразием косого отображения Смейла.*

Положим $\bigcap_{l \geq 0} F^l(\mathbb{T}^k \times N) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{S}(f)$. Полностью аналогично трёхмерному случаю, рассмотренному в [12], можно доказать, что множество $\mathfrak{S}(f) = \mathfrak{S}$ является притягивающим, инвариантным и замкнутым, и определено ограничение $f|_{\mathfrak{S}} : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$, которое является гомеоморфизмом.

Отметим, что если диффеоморфизм Смейла — Виеториса является A-диффеоморфизмом, то базовый эндоморфизм является A-эндоморфизмом, и наоборот [11]. Следующая теорема показывает, что существует тесная связь между базисными множествами A-диффеоморфизма $f|_{\mathfrak{B}}$ и базисными множествами базового A-эндоморфизма g.

Теорема 1. *Пусть $f : M^n \to M^n$ — A-диффеоморфизм Смейла — Виеториса некоторого замкнутого n-мерного многообразия M^n и пусть $\mathbb{T}^k \times N = \mathfrak{B} \subset M^n$ — базовое многообразие косого отображения Смейла $f|_{\mathfrak{B}} = F$, $F : \mathbb{T}^k \times N \to \mathbb{T}^k \times N$, $(t,z) \longmapsto (g(t),\ \omega(t,z))$. Пусть Ω — базисное множество d-накрытия $g : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$ и $\mathfrak{S} = \cap_{l\geq 0} F^l(\mathbb{T}^k \times N)$. Тогда $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$ содержит единственное базисное множество $\Omega_{\mathfrak{S}}$ диффеоморфизма f, где $p_1 : \mathbb{T}^k \times N \to \mathbb{T}^k$ — естественная проекция на первый множитель. Кроме того, справедливы следующие утверждения.*

1. *Если Ω — тривиальное базисное множество (изолированная периодическая орбита) d-накрытия g, то $\Omega_{\mathfrak{S}}$ также является тривиальным базисным множеством.*
2. *Если Ω — нетривиальное базисное множество d-накрытия g, то $\Omega_{\mathfrak{S}}$ также является нетривиальным базисным множеством.*
3. *Если Ω — назад-g-инвариантное базисное множество d-накрытия g, $\Omega = g^{-1}(\Omega)$ (отсюда следует, что Ω — нетривиальное базисное множество), то $\Omega_{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$.*

В случае когда $k = 1$ и базовое многообразие $\mathbb{T}^1 = S^1$ есть окружность, можно показать (см. [28]), что нетривиальное базисное множество неособого A-эндоморфизма окружности единственно и всегда является назад-инвариантным. Таким образом, как следствие из теоремы 1 будет верно следующее предложение, в котором мы получаем обобщение основного результата работы [12].

Предложение 1. *Пусть $f : M^n \to M^n$ — A-диффеоморфизм Смейла — Виеториса некоторого замкнутого n-мерного многообразия M^n и $\mathbb{T}^1 \times N = \mathfrak{B} \subset M^n$ — базовое многообразие косого отображения Смейла $f|_{\mathfrak{B}} = F$. Тогда неблуждающее множество $NW(F)$ диффеоморфизма F принадлежит $\mathfrak{S} = \cap_{l\geq 0} F^l(\mathbb{T}^1 \times N)$ и $NW(F)$ содержит одно нетривиальное базисное множество $\Lambda(f)$, которое является либо одномерным растягивающимся аттрактором, и $\Lambda(f) = \mathfrak{S}$, либо нульмерным базисным множеством, и $NW(F)$ состоит из $\Lambda(f)$ и конечного (ненулевого) числа изолированных стоковых периодических точек, и конечного числа (возможно, нулевого) седловых изолированных периодических точек с устойчивым индексом Морса, равным единице. Обе возможности можно реализовать.*

Предложение 1 показывает, что имеются как минимум два типа нетривиальных базисных множеств. Естественно изучить вопрос о бифуркациях от одного типа к другому. Эти бифуркации можно рассматривать как бифуркации разрушения (или рождения) соленоидальных базисных множеств. Мы представим такую бифуркацию для 3-мерной сферы S^3.

Теорема 2. *Существует однопараметрическое семейство A-диффеоморфизмов Смейла — Виеториса $f_\mu : S^3 \to S^3$, $0 \leq \mu \leq 1$, непрерывно зависящих от параметра μ, таких, что*

- *для $\mu = 0$ неблуждающее множество $NW(f_0)$ состоит из одномерного растягивающегося аттрактора (соленоидального аттрактора Смейла) и одномерного сжимающегося репеллера (соленоидального репеллера Смейла);*

- *для $\mu > 0$ неблуждающее множество $NW(f_\mu)$ состоит из двух нетривиальных нульмерных базисных множеств и конечного числа изолированных периодических орбит.*

Из доказательства вытекает, что в построенном семействе каждый диффеоморфизм f_μ Ω-устойчив.

1. Основные определения

Обозначим через $\mathrm{End}(M)$ пространство C^1-эндоморфизмов $M \to M$, т. е. пространство C^1-отображений многообразия M на себя.

Определение 5. Эндоморфизм g называется *неособым*, если g является локальным диффеоморфизмом.

Мы рассматриваем неособые эндоморфизмы $g \in \mathrm{End}(M)$, которые не являются диффеоморфизмами (если не оговорено противное).

Определение 6. Пусть $g \in \mathrm{End}(M)$. Точка $x \in M$ называется *неблуждающей*, если для любой её окрестности $U(x) = U$ существует некоторое число $m \in \mathbb{N}$, такое, что $g^m(U) \cap U \neq \emptyset$. Объединение неблуждающих точек образует *неблуждающее множество*, которое мы обозначим через $NW(g)$.

Известно, что множество $NW(g)$ является замкнутым и вперёд-инвариантным, т. е. $g(NW(g)) \subset NW(g)$.

Определение 7. Множество $O(x_0) = \{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ называется *g-орбитой* точки x_0, если $g(x_i) = x_{i+1}$ для любого целого числа i.

Определение 8. Орбита $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ называется *периодической*, если существует целое $p \geq 1$ такое, что $g^p(x_i) = x_{i+p}$ для любого $i \in \mathbb{Z}$.

Очевидно, что неблуждающее множество $NW(g)$ содержит все периодические g-орбиты.

Определение 9. Орбита $O(x_0)$ называется *гиперболической*, если существует непрерывное разложение касательного расслоения

$$\mathbb{T}_{O(x_0)}M = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{T}_{x_i}M = \mathbb{E}^s \bigoplus \mathbb{E}^u = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}^s_{x_i} \bigoplus \mathbb{E}^u_{x_i},$$

инвариантное относительно производной Dg, такое, что

$$||Dg^m(v)|| \leq c\mu^m||v||, \ ||Dg^m(w)|| \geq c^{-1}\mu^{-m}||w|| \quad v \in \mathbb{E}^s, \ w \in \mathbb{E}^u, \ \forall m \in \mathbb{N}$$

для некоторых констант $c > 0$, $0 < \mu < 1$ и римановой метрики на $\mathbb{T}M$.

Заметим, что неустойчивое (растягивающее) подрасслоение $\mathbb{E}^u(x_0)$, вообще говоря, зависит от отрицательной полуорбиты $\{x_i\}_{i=-\infty}^{0}$. Другими словами, возможно неравенство $\mathbb{E}^u(x_0) \neq \mathbb{E}^u(y_0)$ при $x_0 = y_0$ и $O(x_0) \neq O(y_0)$. Что же касается устойчивого (сжимающего) подрасслоения $\mathbb{E}^s(x_0)$, то оно зависит только от точки x_0 [29].

Определение 10. Будем говорить, что неособый эндоморфизм $g \in \mathrm{End}(M)$ *удовлетворяет аксиоме А* или, что то же самое, g является А-эндоморфизмом, если

- периодические g-орбиты плотны в $NW(g)$, верно равенство $g(NW(g)) = NW(g)$;

- все g-орбиты $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ в $NW(g)$ гиперболические, а соответствующие подрасслоения $\mathbb{E}^s$, $\mathbb{E}^u$ непрерывны на компактных частях g-орбит.

Напомним, что спектральная теорема Смейла утверждает, что неблуждающее множество А-диффеоморфизма f распадается на непустые, замкнутые, инвариантные и транзитивные множества, $NW(f) = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_k$, которые называются *базисными множествами*. Аналогичная теорема для А-эндоморфизмов была доказана в работах [11; 29].

Следуя Вильямсу [9; 10], введём понятие обратного предела для отображения $g : T \to T$.

Определение 11. Рассмотрим множество $\prod_g = \{ (t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots) \in T^{\mathbb{N}} : g(t_{i+1}) = t_i,\ i \geq 0 \}$, наделённое стандартной топологией произведения счётного семейства, в которой база задаётся следующим набором (ε, r)-окрестностей точек $\{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\} \in \prod_g$:

$$U = \left\{ \{x_i\}_0^{\infty} \in \prod_g \ : \ x_i \in U_\varepsilon(t_i),\ 0 \leq i \leq r \text{ для некоторых } \ \varepsilon > 0,\, r \in \mathbb{N} \right\}.$$

Определим отображение сдвига (так называемый *обратный предел*) по правилу

$$\hat{g} : \prod_g \to \prod_g, \quad \hat{g}(t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots) = (g(t_0), t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots)\,, \quad (t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots) \in \prod_g.$$

Известно, что g является гомеоморфизмом [10; 30].

2. Доказательство основных результатов

Обозначим через $p_1 : \mathbb{T}^k \times N \to \mathbb{T}^k$, $p_2 : \mathbb{T}^k \times N \to N$ естественные проекции $p_1(t, z) = t$ и $p_2(t, z) = z$. Слой $\{t\} \times N \stackrel{\text{def}}{=} N_t$ расслоения p_1 будем называть *t-листом*. Из (1) получаем, что $F = f|_{\mathfrak{B}}$ переводит t-лист в $g(t)$-лист.

Для $t \in \mathbb{T}^k$ и $\varepsilon > 0$ обозначим ε-окрестность точки t через $U_\varepsilon(t)$, т. е. $U_\varepsilon(t) = \{x \in \mathbb{T}^k \ : \ \varrho(x, t) < \varepsilon\}$, где ϱ — метрика на $\mathbb{T}^k$.

Следующая лемма описывает символическую модель ограничения $f|_{\mathfrak{S}}$ (см. также [9; 10]).

Лемма 1. *Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Смейла — Вьеториса замкнутого n-мерного многообразия M^n и пусть $\mathbb{T}^k \times N = \mathfrak{B} \subset M^n$ — базовое многообразие косого отображения Смейла $f|_{\mathfrak{B}} = F$ вида (1). Тогда ограничение $f|_{\mathfrak{S}}$ сопряжено обратному пределу d-накрытия $g : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$, где $\mathfrak{S} = \cap_{l \geq 0} F^l(\mathbb{T}^k \times N)$. Более того, справедливы следующие утверждения.*

1. *Для каждой точки $t_0 \in \mathbb{T}^k$ множества $F(N_{t_0^1})$, …, $F(N_{t_0^d})$ попарно не пересекаются:*
$$F(N_{t_0^i}) \cap F(N_{t_0^j}) = \emptyset, \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq d,$$
где d точек t_0^1, t_0^2, …, $t_0^d \in \mathbb{T}^k$ составляют прообраз $g^{-1}(t_0)$.
2. *Для любой точки $p \in \mathfrak{S}$ существует единственная последовательность точек $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$, $t_i \in \mathbb{T}^k$, и соответствующая последовательность t_i-листов $\{N_{t_i}\}_{i=0}^{\infty}$, таких, что*
   - $p \in \cdots \subset F^i(N_{t_i}) \subset F^{i-1}(N_{t_{i-1}}) \cdots \subset F(N_{t_1}) \subset N_{t_0}$, $p = \cap_{i \geq 0} F^i(N_{t_i})$;
   - $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$.

3. *Если* $\hat{g} : \prod_g \to \prod_g$ *суть обратный предел отображения* $g : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$, *где* $\prod_g = \{ (t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots) \in \mathbb{T}^{\mathbb{N}} \ : \ g(t_{i+1}) = t_i, \ i \geq 0 \}$ *и точке* $p = \cap_{i\geq 0} F^i(N_{t_i})$ *соответствует последовательность* $P(t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots)$, *то отображение*

$$\theta : \ \mathfrak{S} \to \prod_g, \quad p \longmapsto P(t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots), \ \ p \in \mathfrak{S},$$

является гомеоморфизмом.

4. *Имеет место равенство* $\theta \circ F|_{\mathfrak{S}} = \hat{g} \circ \theta|_{\mathfrak{S}}$.

Доказательство. Для $n = 3$ и $\mathbb{T}^k = S^1$ лемма 1 доказана в [12]. Доказательство в данном более общем случае полностью аналогично, и мы его опускаем. □

Лемма 2. *Пусть* $\bar{t} = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots, \} \in \prod_g$, $g(t_{i+1}) = t_i$, $i \geq 0$. *Если* $t_i \in NW(g)$ *для всех* $i \geq 0$, *то* $\bar{t} \in NW(\hat{g})$ *и* $\theta^{-1}(\bar{t}) \in NW(F)$.

Доказательство. Имеем $\bar{t} = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots, \} = \{g^r(t_r), g^{r-1}(t_r), \ldots, t_r, \ldots\}$. Возьмём (ε, r)-окрестность V точки $\bar{t}$, которая определяется по правилу

$$V = \{ \{g^r(x_r), g^{r-1}(x_r), \ldots, x_r, \ldots\} \ \ : \ \ g^i(x_r) \in U_\varepsilon \left(g^i(t_r)\right), 0 \leq i \leq r \}.$$

Так как g, g^2, …, g^r являются равномерно непрерывными отображениями, то существует $0 < \delta \leq \varepsilon$ такое, что из $x \in U_\delta(y)$ следует $g^i(x) \in U_\varepsilon(g^i(y))$ для всех $0 \leq i \leq r$. Поскольку $t_r \in NW(g)$, то существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $g^{n_0}\left(V_\delta(t_r)\right) \cap V_\delta(t_r) \neq \emptyset$. Отсюда следует, что существует точка $x_0 \in V_\delta(t_r)$ такая, что $g^{n_0}(x_0) \in V_\delta(t_r)$.

Возьмём $\overline{x}_0 = \{g^r(x_0), g^{r-1}(x_0), \ldots, x_0, \ldots\} \in \prod_g$. Так как $x_0 \in V_\delta(t_r)$, $g^i(x_0) \in U_\varepsilon\left(g^i(t_r)\right)$ для всех $0 \leq i \leq r$, то $\overline{x}_0 \in V$. Поскольку $g^{n_0}(x_0) \in V_\delta(t_r)$, $g^{n_0+i}(x_0) \in U_\varepsilon\left(g^i(t_r)\right)$ для всех $0 \leq i \leq r$, то

$$\hat{g}^{n_0}(\overline{x}_0) = \{ g^{n_0+r}(x_0), g^{n_0+r-1}(x_0), \ldots, g^{n_0}(x_0), \ldots\} \in V.$$

Как следствие получаем, что $\hat{g}^{n_0}(V) \cap V \neq \emptyset$ и $\bar{t} \in NW(\overline{g})$. Известно, что сопрягающее отображение переводит неблуждающее множество в неблуждающее множество, и в силу леммы 1 $\theta^{-1}(\bar{t}) \in NW(F)$. □

Предложение 2. *Справедливы следующие равенства:*

$$p_1\left[NW(f|_{\mathfrak{B}})\right] = p_1\left[NW(F)\right] = NW(g).$$

Доказательство. Поскольку проекция p_1 является непрерывным отображением, то верно включение $p_1\left[NW(F)\right] \subset NW(g)$. Возьмём $t_0 \in NW(g)$. Так как g суть А-эндоморфизм, то $g\left[NW(g)\right] = NW(g)$ [11; 29]. Значит, существует последовательность $\{t_i | i = 0, 1, ...\} \subset NW(g)$, такая, что $g(t_{i+1}) = t_i$ для любого $i \geq 0$.

Согласно лемме 2, если $\bar{t} = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots, \} \in NW(\hat{g})$, то $\theta^{-1}(\bar{t}) \in NW(F)$. Из определения отображения θ получаем $\theta^{-1}(\bar{t}) \in p_1^{-1}(t_0)$. Таким образом, $NW(g) \subset p_1\left[NW(F)\right]$. □

Лемма 3. *Если* $(t_0, z_0) \in \mathfrak{S}$ *является неблуждающей точкой отображения* f *и* $\theta(t_0, z_0) = \{t_i\}_{i\geq 0}$, *то имеет место включение* $t_i \in NW(g)$ *для всех* $i \geq 0$.

Доказательство. Из предложения 2 вытекает, что $p_1\left[NW(f|_{\mathfrak{B}})\right] = p_1\left[NW(F)\right] = NW(g)$. Следовательно, $t_0 \in NW(g)$. Так как $F_{\mathfrak{S}} : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ суть диффеоморфизм, то $F^{-1}\left(NW(F)\right) = NW(F)$ и $F^{-1}(t_0, z_0) = (t_1, z_1) \in NW(F) = NW(f_{\mathfrak{B}})$. Согласно лемме 2, $t_1 \in NW(g)$. Продолжая рассуждения аналогичным образом, показывается, что $t_i \in NW(g)$ для всех $i \geq 0$. □

Предложение 3. *Пусть $(t_0, z_0) \in \mathfrak{S}$ — неблуждающая точка отображения f и $\theta(t_0, z_0) = \{t_i\}_{i\geq 0}$. Если t_0 принадлежит базисному множеству Ω отображения g, то $t_i \in \Omega$ для всех $i \geq 0$.*

Доказательство. Согласно лемме 3, $t_i \in NW(g)$ для всех $i \geq 0$. Поскольку множество Ω вперёд-g-инвариантное, то $t_i \in \Omega$ для всех $i \geq 0$. $\square$

Лемма 4. *Пусть Ω — нетривиальное базисное множество отображения g и $t_0 \in \Omega$. Если две точки (t_0, z_1), $(t_0, z_2) \in \mathfrak{S}$ принадлежат неблуждающему множеству отображения f, то (t_0, z_1) и (t_0, z_2) принадлежат одному и тому же базисному множеству f.*

Доказательство. Обозначим за Ω_j такое базисное множество F, которое содержит точки (t_0, z_j), $j = 1, 2$. Ясно, что $\Omega_j \subset \mathfrak{S}$. Мы должны доказать справедливость равенства $\Omega_1 = \Omega_2$. Для этого достаточно показать существование неблуждающей точки $q \in NW(F)$, такой, что каждая из двух точек (t_0, z_1) и (t_0, z_2) содержится в ω-предельном множестве q.

Пусть $\bar{t}_j = \theta(t_0, z_j) = \{t_0, t_1^{(j)}, \ldots, t_i^{(j)}, \ldots\}$, $j = 1, 2$. Согласно предложению 3, $t_i^{(j)} \in \Omega$ для всех $i \geq 0$, $j = 1, 2$. Поскольку базисное множество Ω транзитивно, существует такая точка $x_0 \in \Omega$, что её положительная полуорбита $O_g^+(x_0)$ плотна в Ω, $\operatorname{clos}\left(O_g^+(x_0)\right) = \Omega$.

В силу предложения 2, существует точка $\overline{x}_0 = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots\} \in \prod_g$, такая, что $x_i \in \Omega$ для всех $i \geq 0$. Рассмотрим произвольную (ε, r)-окрестность $U(\bar{t}_1)$ точки $\bar{t}_1$. Так как g, g^2, …, g^r являются равномерно непрерывными отображениями, существует такое $\delta > 0$, что из включения $x \in U_\delta(y)$ следует включение $g^i(x) \in U_\varepsilon(y)$ для всех $0 \leq i \leq r$. Поскольку полуорбита $O_g^+(x_0)$ плотна в Ω, существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $g^{n_0}(x_0) \in U_\delta(t^{(1)})$. Следовательно, $\hat{g}^{n_0}(\overline{x}_0) \in U(\bar{t}_1)$. Значит, $\bar{t}_1 = \theta(t_0, z_1)$ принадлежит ω-предельному множеству точки $\overline{x}_0$. Аналогичным образом можно показать, что $\bar{t}_2 = \theta(t_0, z_2)$ тоже лежит в ω-предельном множестве точки $\overline{x}_0$. Так как θ — сопрягающее отображение, то точки $(t_0, z_1) = \theta^{-1}(\bar{t}_1)$ и $(t_0, z_2) = \theta^{-1}(\bar{t}_2)$ принадлежат ω-предельному множеству точки $q = \theta^{-1}(\overline{x}_0) \in NW(F)$. $\square$

2.1. Доказательство теоремы 1

Нам известно, что $p_1 [NW(F)] = NW(g)$. Значит, $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$ содержит базисное множество диффеоморфизма f. Допустим, что Ω — тривиальное множество, т. е. Ω является изолированной периодической орбитой

$$\Omega = \operatorname{Orb}_g(q) = \{q, g(q), \ldots, g^{p-1}(q), g^p(q) = q\}, \quad \text{где} \quad q \in \mathbb{T}^k \ \text{ и } \ p \in \mathbb{N} \text{ — период } q.$$

Согласно определению 1 косого отображения Смейла ограничение диффеоморфизма $F = f|_{\mathfrak{B}}$ на втором множителе N содержит непрерывный растягивающийся аттрактор. Таким образом, $N_q \supset f^p(N_q) \supset \cdots \supset f^{mp}(N_q) \supset \cdots$ и пересечение $\bigcap_{m\geq 0} f^{mp}(N_q) = Q$ — единственная точка. По аналогии пересечение $\cap_{m\geq 0} f^{mp}(N_{g^i(q)})$ также является единственной точкой $f^i(Q)$ для каждого $0 \leq i \leq p-1$.

Из условия (1) получаем, что $\{Q, f(Q), \ldots, f^{p-1}(Q), f^p(Q) = Q\}$ — изолированная периодическая орбита $\operatorname{Orb}_f(Q)$, такая, что $NW(F) \cap p_1^{-1}(\Omega) = \operatorname{Orb}_f(Q)$. Таким образом, $\operatorname{Orb}_f(Q) = \Omega_{\mathfrak{S}}$ — это единственное базисное множество F, которое содержится в $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$.

Пусть Ω является нетривиальным базисным множеством. По лемме 4 базисное множество диффеоморфизма F лежит в $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$ и не совпадает с ним. Поэтому $\Omega_{\mathfrak{S}}$ — это единственное базисное множество f, содержащееся в $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$.

Рассмотрим случай, когда Ω является назад-g-инвариантным базисным множеством g. Из равенства $\Omega = g^{-1}(\Omega)$ следует, что Ω — тривиальное базисное множество, поскольку g — d-накрытие, $d \geq 2$. Согласно лемме 2 каждая точка пересечения $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$ является неблуждающей точкой диффеоморфизма f. Из леммы 4 следует, что $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$ — единственное базисное множество. Таким образом, теорема 1 доказана. □

Примеры. Рассмотрим три эндоморфизма $g_i : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $i = 1, 2, 3$, каждый из которых является 2-накрытием. Эндоморфизм g_1 определяется матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Нетрудно проверить, что g_1 является эндоморфизмом Аносова, и $\mathbb{T}^2$ суть единственное базисное множество эндоморфизма g_1. Соответствующий А-диффеоморфизм Смейла — Виеториса f имеет в базовом множестве единственное базисное множество, скажем Ω_1, локально гомеоморфное прямому произведению двумерного диска на канторово множество. Таким образом, Ω_1 является двумерным нетривиальным базисным множеством. В качестве g_2 возьмём А-эндоморфизм $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, построенный в работе [31], с одним одномерным нетривиальным базисным множеством и одним тривиальным базисным множеством. Эндоморфизм g_2 полусопряжён эндоморфизму g_1. Соответствующий А-диффеоморфизм Смейла — Виеториса будет иметь ровно одно одномерное нетривиальное базисное множество и одно тривиальное базисное множество. В качестве g_3 возьмём А-эндоморфизм $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ с одним нетривиальным нульмерным базисным множеством и несколькими тривиальными базисными множествами. Такие эндоморфизмы построены в работе [29] с использованием эндоморфизма Шуба [32].

Соответствующий А-диффеоморфизм Смейла — Виеториса будет иметь ровно одно нульмерное нетривиальное базисное множество и несколько тривиальных базисных множеств.

Перейдём к рассмотрению случая, когда $\mathbb{T}^1 = S^1$ — это окружность, и d-накрытие $g : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ является неособым эндоморфизмом окружности S^1. Важным шагом в доказательстве следствия 1 является следующий результат, который можно извлечь из [28] (для удобства читателя мы схематично приводим доказательство).

Лемма 5. *Пусть $g : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ является неособым А-эндоморфизмом. Тогда неблуждающее множество $NW(g)$ либо совпадает с $\mathbb{T}^1$, либо $NW(g)$ представляет собой объединение некоторого канторова множества Σ, ненулевого конечного числа изолированных притягивающих периодических орбит и конечного (может быть, нулевого) числа растягивающих изолированных периодических орбит. Более того, для второго случая Σ — это назад-g-инвариантное множество.*

Доказательство. Допустим, что $NW(g) \neq \mathbb{T}^1$. Из работы Шуба [32] следует, что эндоморфизм g полусопряжён отображению E_d, $E_d(t) = dt \mod 1$, которое является растягивающимся линейным отображением, т. е. существует такое непрерывное отображение $h : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$, что выполняется равенство $g \circ h = h \circ E_d$. Согласно [33] h — это монотонное отображение. Следовательно, для каждой точки $t \in \mathbb{T}^1$ её прообраз $h^{-1}(t)$ — либо точка, либо замкнутый сегмент. Поскольку $NW(g) \neq \mathbb{T}^1$, то h не является гомеоморфизмом. Таким образом, найдутся точки $t \in \mathbb{T}^1$, для которых $h^{-1}(t)$ — (нетривиальные) замкнутые сегменты. Множество таких точек обозначим через χ. Можно показать, что χ счётно и инвариантно относительно E_d, $E_d(\chi) = E_d^{-1}(\chi) = \chi$ [5; 33]. Значит, множество $h^{-1}(\chi)$ будет инвариантным относительно g.

Поскольку h — сопрягающее отображение и χ — инвариантное множество, то Σ инвариантно относительно g. Кроме того, h является монотонным отображением, а χ содержит всюду плотные орбиты. Значит, множество Σ равномерно непрерывно. Как следствие получаем, что множество $\Sigma = \mathbb{T}^1 \setminus \mathrm{clos}(h^{-1}(\chi))$ канторовского типа и состоит из неблуждающих точек эндоморфизма g. Более того, Σ назад-g-инвариантно. Из работы [34] следует, что $NW(g)$ состоит из Σ, ненулевого конечного числа изолированных притягивающих периодических орбит и конечного (может быть, нулевого) числа растягивающих изолированных периодических орбит. $\square$

2.2. Доказательство теоремы 2

Сперва построим двухпараметрическое семейство $g_{\varepsilon,\delta}$ накрытий окружности степени $d \geq 2$ (d-эндоморфизмов), непрерывно зависящее от параметров $\varepsilon \in (0,1)$ и $\delta \in [0,1/4)$. Пусть $U_\delta(x)$ является так называемой бамп-функцией, т. е.

- $U_\delta(x) = 1$ для $x \in [-\delta/2, +\delta/2]$, $0 < \delta \leq 1/4$;
- $U_\delta(x) = 0$ для $|x| \geq \delta$;
- $U'_\delta(x) \geq 0$ для $x \in [-\delta, -\delta/2]$ и $U'_\delta(x) \leq 0$ для $x \in [\delta/2, \delta]$.

Ключевую роль в доказательстве играет следующий результат, который имеет самостоятельный интерес (мы формулируем его в виде отдельного утверждения).

Лемма 6. *Пусть*

$$g_{\varepsilon,\delta}(x) = \begin{cases} dx + (-d+\varepsilon)xU_\delta(x) \mod 1 & \text{для } \ \varepsilon \in (0,1),\ \delta \in (0,1/4); \\ dx \mod 1 & \text{для } \ \varepsilon = 0,\ \delta = 0. \end{cases}$$

Тогда при $\varepsilon \neq 0$ и $\delta \neq 0$ отображение $g_{\varepsilon,\delta}$ является структурно устойчивым неособым d-эндоморфизмом окружности, таким, что его неблуждающее множество $NW(g_{\varepsilon,\delta})$ есть объединение единственной гиперболической притягивающей точки $x = 0$ и гиперболического канторова множества. Для $\varepsilon = 0$ и $\delta = 0$ имеет место равенство $NW(g_{0,0}) = S^1$. Более того, $g_{\varepsilon,\delta} \to E_d$ (в пространстве эндоморфизмов, наделённом C^0 топологией) при $\delta \to 0$ и фиксированном $\varepsilon \neq 0$.

Доказательство. Для $\varepsilon \neq 0$ и $\delta \neq 0$ имеем

$$g'_{\varepsilon,\delta}(x) = d + (-d+\varepsilon)\left[xU_\delta(x)' + U_\delta(x)\right] = d + (-d+\varepsilon)xU_\delta(x)' + (-d+\varepsilon)U_\delta(x).$$

Поскольку $d + (-d+\varepsilon)U_\delta(x) \geq \varepsilon$ и $xU_\delta(x)' \leq 0$, то $g'_{\varepsilon,\delta}(x) \geq \varepsilon$. Так как вне δ-окрестности $V_\delta(0)$ точки $x_0 = 0$ отображение $g_{\varepsilon,\delta}$ совпадает с линейным d-эндоморфизмом $E_d(x) = dx \mod 1$, то $g_{\varepsilon,\delta}$ является неособым d-эндоморфизмом. Из равенства $g'_{\varepsilon,\delta}(0) = \varepsilon \in (0,1)$ вытекает, что $x = 0$ — гиперболическая притягивающая точка. Решение уравнения $dx + (-d+\varepsilon)xU_\delta(x) = x$ даёт две неподвижные точки $\pm x_* \in V_\delta(0)$, такие, что

$$U_\delta(\pm x_*) = \frac{d-1}{d-\varepsilon} > 1, \ \text{ где } \ \frac{\delta}{2} < x_* < \delta.$$

Поэтому ω-предельное множество любой точки из $(-x_*, x_*)$ есть $x_0 = 0$. Следовательно, $NW(g_{\varepsilon,\delta})$ равно

$$NW(g_{\varepsilon,\delta}) = \{x_0\} \bigcup \left(S^1 \setminus \cup_{k\geq 0} g^{-k}_{\varepsilon,\delta}(-x_*, x_*)\right),$$

где $C = S^1 \setminus \cup_{k\geq 0} g^{-k}_{\varepsilon,\delta}(-x_*, x_*)$ является канторовым множеством. Для каждой точки $x \in C$ имеем

$$g'_{\varepsilon,\delta}(x) = d + (-d+\varepsilon)xU'_\delta(x) + (-d+\varepsilon)U_\delta(x) \geq d + (-d+\varepsilon)U_\delta(x_*) + (-d+\varepsilon)xU'_\delta(x) =$$

$$= 1 + (-d+\varepsilon)xU'_\delta(x) > 1.$$

Отсюда и из работы [34] следует, что $g_{\varepsilon,\delta}$ структурно устойчивый. Далее, для любой точки $x \in V_\delta(0)$ имеем

$$|g_{\varepsilon,\delta}(x) - E_d(x)| = |(-d+\varepsilon)xU_\delta(x)| \leq \delta d \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Следовательно, $g_{\varepsilon,\delta} \to E_d$ при $\delta \to 0$ в C^0 топологии. □

Зафиксируем параметры $\varepsilon \neq 0$, $\delta \neq 0$ и положим $g_{\varepsilon,\delta} = g : S^1 \to S^1$. Рассмотрим теперь построенное согласно формулам (1)–(3) косое отображение Смейла $F : S^1 \times D^{n-1} \to S^1 \times D^{n-1}$ для $n = 3$. В силу леммы 6 неблуждающее множество $NW(g)$ неособого А-эндоморфизма $g : S^1 \to S^1$ состоит из единственной притягивающей неподвижной точки x_0 и канторова множества Ω. Нам будет удобно считать, поменяв параметризацию окружности, что 1) $x_0 = 1/4$; 2) ограничение $g|[0, 1/2]$ является диффеоморфизмом $[0, 1/2] \to [0, 1/2]$ с одной притягивающей неподвижной точкой x_0 и двумя отталкивающими неподвижными точками 0, 1/2; 3) $g|_{[1/2,1]}(x) = (2d-1)x \mod 1$; 4) $Dg(x_0) = \lambda$, где можно считать, что $0 < \lambda < \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2d-1} < 1$. Тогда $\cup_{n\geq 0} g^{-n}(0, 1/2)$ является устойчивым многообразием $W^s(x_0)$ точки x_0 и $\Omega = S^1 \setminus W^s(x_0)$. По построению $Dg|_\Omega = 2d-1$. Теперь на базовом многообразии $\mathcal{B} = S^1 \times D^2$ положим

$$F(t, z) = \left(g(t),\, \lambda z + \frac{1}{2}\exp 2\pi i t\right), \quad F : \mathcal{B} = S^1 \times D^2 \to \mathcal{B},$$

где $z = x + iy$ принадлежит единичному диску $D^2 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Поскольку $\lambda < 1/4$, то $F(\mathcal{B}) \subset \mathrm{int}\mathcal{B}$. Якобиан F равен

$$DF(t, z) = \begin{pmatrix} Dg(t) & 0 \\ \pi i \exp 2\pi i t & \lambda Id_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где Id_2 — единичная матрица. Нетрудно проверить, что F является диффеоморфизмом на свой образ.

В силу того, что g является А-эндоморфизмом, периодические точки g плотны в $NW(g)$. Согласно лемме 2 периодические точки F также плотны в $NW(F)$. Остаётся показать, что неблуждающее множество $NW(F)$ имеет гиперболическую структуру. Здесь мы следуем предложению 8.7.5 [30]. Очевидно, касательное расслоение $T(\mathcal{B}) = T(S^1 \times D^2)$ представляет собой сумму $T(\mathcal{B}) = T(S^1) \oplus T(D^2)$, и слой $T_{(t,z)}(\mathcal{B})$ над каждой точкой $(t, z) \in \mathcal{B}$ является суммой одномерного и двумерного касательных пространств $T_t(S^1) = \mathbb{E}^1 \cong \mathbb{R}$, $T_z(T^2) = \mathbb{E}^2 \cong \mathbb{R}^2$ соответственно. Из (4) следует, что $\mathbb{E}^2$ инвариантно относительно DF,

$$DF_p\begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \lambda\vec{v}_{23} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{23} \in \mathbb{E}^2.$$

Кроме того, так как $|\lambda| < 1$, то $\mathbb{E}^2$ — устойчивое подрасслоение, $E^s = \mathbb{E}^2$.

Возьмём точку $q=(t,z)\in NW(F)$. Тогда $p_1(q)=t\in NW(g_d)$. Если $t=x_0$, то q является гиперболической (притягивающей) неподвижной точкой F. Для $t\in\Omega$, рассмотрим конусы

$$C_q^u=\left\{\begin{pmatrix}\vec v_1\\ \vec v_{23}\end{pmatrix}\;:\;\vec v_1\in T_t(S^1),\;\vec v_{23}\in\mathbb{E}^2_z,\quad|\vec v_1|\geq\frac{2d-1}{4}|\vec v_{23}|\right\}\subset T(\mathcal{B})=\mathbb{E}^1\oplus\mathbb{E}^2.$$

Для $\binom{\vec v_1}{\vec v_{23}}\in C^u$ в силу (4) получаем

$$DF\begin{pmatrix}\vec v_1\\ \vec v_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec v_1'\\ \vec v_{23}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2d-1)\vec v_1\\ \pi i\vec v_1\exp 2\pi it+\lambda\vec v_{23}\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $|\vec v_{23}|\leq|\pi i\exp 2\pi it\vec v_1|+\lambda|\vec v_{23}|=\pi|\vec v_1|+\lambda|\vec v_{23}|$. Учитывая неравенство $\lambda\leq 1/4$, получаем

$$|\vec v_1'|=(2d-1)|\vec v_1|=\frac{2d-1}{4}(4|\vec v_1|)\geq\frac{2d-1}{4}\left(\pi|\vec v_1|+\frac12|\vec v_1|\right)\geq$$

$$\geq\frac{2d-1}{4}\left(\pi|\vec v_1|+\frac{2d-1}{8}|\vec v_{23}|\right)\geq\frac{2d-1}{4}\left(\pi|\vec v_1|+\lambda|\vec v_{23}|\right)\geq\frac{2d-1}{4}|\vec v_{23}'|,$$

поскольку $\frac{2d-1}{8}\geq\frac14$. Таким образом, $\binom{\vec v_1'}{\vec v_{23}'}\in C^u_{F(q)}$ и $DF(C_q^u)\subset C^u_{F(q)}$. Как следствие для любого $k\in\mathbb{N}$ получаем

$$DF^k(C^u_{F^{-k}(q)})\subset DF^{k-1}(C^u_{F^{-k+1}(q)})\subset\cdots\subset DF(C^u_{F^{-1}(q)})\subset C^u_q.$$

Докажем, что пересечение этих вложенных конусов является прямой. Для этого возьмём

$$\begin{pmatrix}\vec v_1\\ \vec v_{23}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\vec w_1\\ \vec w_{23}\end{pmatrix}\in C^u_{F^{-k}(q)},\quad\begin{pmatrix}\vec v_1^k\\ \vec v_{23}^k\end{pmatrix}=DF^k\begin{pmatrix}\vec v_1\\ \vec v_{23}\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}\vec w_1^k\\ \vec w_{23}^k\end{pmatrix}=DF^k\begin{pmatrix}\vec w_1\\ \vec w_{23}\end{pmatrix}.$$

Обозначим $|\vec v_1^j|=v_1^j$, $|\vec w_1^j|=w_1^j$, $\vec v_1=(v_1,0)$, $\vec w_1=(w_1,0)$, $v_1>0$, $w_1>0$. Тогда

$$\left|\frac{\vec v_{23}^1}{v_1^1}-\frac{\vec w_{23}^1}{w_1^1}\right|=\left|\frac{\pi i\vec v_1\exp 2\pi it+\lambda\vec v_{23}}{(2d-1)v_1}-\frac{\pi i\vec w_1\exp 2\pi it+\lambda\vec w_{23}1}{w_1}\right|=$$

$$\left|\frac{\pi i\exp 2\pi it(w_1\vec v_1-v_1\vec w_1)}{(2d-1)v_1w_1}+\frac{\lambda}{2d-1}\left(\frac{\vec v_{23}}{v_1}-\frac{\vec w_{23}}{w_1}\right)\right|=\frac{\lambda}{2d-1}\left|\frac{\vec v_{23}}{v_1}-\frac{\vec w_{23}}{w_1}\right|,$$

так как $w_1\vec v_1-v_1\vec w_1=|\vec w_1|\vec v_1-|\vec v_1|\vec w_1=0$. Следовательно,

$$\left|\frac{\vec v_{23}^k}{v_1^k}-\frac{\vec w_{23}^k}{w_1^k}\right|=\left(\frac{\lambda}{2d-1}\right)^k\left|\frac{\vec v_{23}}{v_1}-\frac{\vec w_{23}}{w_1}\right|$$

стремится к 0 при $k\to\infty$. Поэтому последовательность вложенных конусов сходится к некоторой прямой, например $\mathbb{E}^u$, причём ограничение DF на $\mathbb{E}^u$ является равномерно растягивающим отображением.

В работе [24] было показано, что косое отображение Смейла $F:S^1\times D^2\mapsto S^1\times D^2$, построенное на основе растягивающего эндоморфизма окружности, может быть продолжено до диффеоморфизма трёхмерной сферы S^3. В [25] доказано, что для любого линзового пространства $L_{p,q}$, включая S^3, существует диффеоморфизм $L_{p,q}\to L_{p,q}$ с одним соленоидальным аттрактором Смейла и одним соленоидальным репеллером Смейла. Используя методы работ [24; 25] (см. также [9; 11; 26]), можно показать, что косое отображение Смейла, построенное на основе неособого А-эндоморфизма окружности, также может быть продолжено до диффеоморфизма S^3. Это завершает доказательство теоремы 2. □

Список литературы

1. **Smale, S.** Differentiable dynamical systems / S. Smale // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1967. — Vol. 73. — P. 747–817.
2. **Аносов, Д. В.** Исходные понятия. Элементарная теория / Д. В. Аносов // Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики. Фундамент. направления. — 1985. — Т. 1. Динамич. системы — 1. — С. 156–204.
3. **Гринес, В. З.** Грубые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один / В. З. Гринес, Е. В. Жужома, О. В. Починка // Соврем. математика. Фундамент. исслед. — 2015. — Т. 57. — С. 5–30.
4. **Гринес, В. З.** Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три / В. З. Гринес, О. В. Починка. — М.; Ижевск : РХД, 2011. — 424 с.
5. **Aranson, S. Kh.** Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces / S. Kh. Aranson, G. Belitsky, E. Zhuzhoma. — American Mathematical Society, 1996. — P. 425–437.
6. **Vietoris, L.** Über den höheren Zusammenhahg kompakter Räume und Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen / L. Vietoris // Mathematische Annalen. — 1927. — Vol. 97. — P. 454–472.
7. **Van Danzig, D.** Über topologisch homogene Kontinua / D. van Danzig // Fundamenta Mathematicae. — 1930. — Vol. 14. — P. 102–105.
8. **Takens, F.** Multiplications in solenoids as hyperbolic attractors / F. Takens // Topology and Applications. — 2005. — Vol. 152. — P. 219–225.
9. **Williams, R. F.** One-dimensional non-wandering sets / R. F. Williams // Topology. — 1967. — Vol. 6. — P. 473–487.
10. **Williams, R. F.** Expanding attractors / R. F. Williams // Publications mathématiques de l'IHÉS. — 1974. — Vol. 43. — P. 169–203.
11. **Block, L.** Diffeomorphisms obtained from endoomorphisms / L. Block // Transactions of the American Mathematical Society. — 1975. — Vol. 214. — P. 403–413.
12. **Жужома, Е. В.** О нульмерных соленоидальных базисных множествах / Е. В. Жужома, Н. В. Исаенкова // Мат. сб. — 2011. — Т. 202, № 3. — С. 47–68.
13. **Ильяшенко, Ю. С.** Нелокальные бифуркации / Ю. С. Ильяшенко, Вейгу Ли. — М. : МЦНМО, 1999. — 415 с.
14. **Тураев, Д. В.** О катастрофах голубого неба / Д. В. Тураев, Л. П. Шильников // Докл. Акад. наук. — 1995. — Т. 342. — С. 596–599.
15. **Арнольд, В. И.** Топологические методы в гидродинамике / В. И. Арнольд, Б. А. Хесин. — М. : МЦНМО, 2007. — 392 с.
16. **Вайнштейн, С. И.** О происхождении магнитных полей в астрофизике (Турбулентные механизмы «динамо») / С. И. Вайнштейн, Я. Б. Зельдович // Успехи физ. наук. — 1972. — Т. 106. — С. 431–457.
17. **Childress, S.** Stretch, Twist and Fold: The Fast Dynamo / S. Childress, A. Gilbert. — Lecture Notes in Physics. — Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1995. — 412 p.
18. **Жужома, Е. В.** О топологической структуре магнитного поля областей фотосферы / Е. В. Жужома, В. С. Медведев, Н. В. Исаенкова // Нелинейная динамика. — 2017. — Т. 13, № 3. — С. 399–412.
19. **Жужома, Е. В.** О классификации одномерных растягивающихся аттракторов / Е. В. Жужома, Н. В. Исаенкова // Мат. заметки. — 2009. — Т. 86, вып. 3. — С. 360–370.
20. **Bothe, H.** Transversally wild expanding attractors / H. Bothe // Mathematische Nachrichten. — 1992. — Vol. 157. — P. 25–49.
21. **Farrell, F.** New attractors in hyperbolic dynamics / F. Farrell, L. Jones // Journal of Differential Geometry. — 1980. — Vol. 15. — P. 107–133.

22. **Jones, L.** Locally strange hyperbolic sets / L. Jones // Transactions of the American Mathematical Society. — 1983. — Vol. 275, no. 1. — P. 153–162.
23. **Robinson, C.** Classification of expanding attractors: an example / C. Robinson, R. Williams // Topology. — 1976. — Vol. 15. — P. 321–323.
24. **Bothe, H.** The ambient structure of expanding attractors. II. Solenoids in 3-manifolds / H. Bothe // Mathematische Nachrichten. — 1983. — Vol. 112. — P. 69–102.
25. **Boju Jiang.** 3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors / Boju Jiang, Yi Ni, Shicheng Wang // Transactions of the American Mathematical Society. — 2004. — Vol. 356. — P. 43–82.
26. **Jiming Ma.** The realization of Smale solenoid type attractors in 3-manifolds / Jiming Ma, Bin Yu // Topology and its Applications. — 2007. — Vol. 154. — P. 3021–3031.
27. **Jiming Ma.** Genus two Smale-Williams solenoids in 3-manifolds / Jiming Ma, Bin Yu // Journal of Knot Theory and its Ramifications. — 2011. — Vol. 20. — P. 909–926.
28. **Жужома, Е. В.** Классификация накрытий окружности / Е. В. Жужома, Н. В. Исаенкова // Тр. МИАН. — 2012. — Т. 278. — С. 96–101.
29. **Przytycki, F.** Anosov endomorphisms / F. Przytycki // Studia Mathematica. — 1977. — Vol. 58, no. 3. — P. 249–285.
30. **Robinson, C.** Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos / C. Robinson. — Studies in Advanced Mathematics. Boca Raton et al. : CRC Press, 1998. — 520 p.
31. **Куренков, Е. Д.** О существовании эндоморфизма двумерного тора со строго инвариантным сжимающимся репеллером / Е. Д. Куренков // Журн. Средневолж. мат. об-ва. — 2017. — Т. 19, № 1. — С. 60–66.
32. **Shub, M.** Endomorphisms of compact differentiable manifolds / M. Shub // American Journal of Mathematics. — 1969. — Vol. 91. — P. 175–199.
33. **De Melo, W.** One-Dimensional Dynamics / W. de Melo, S. van Strien. — Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1993. — 605 p.
34. **Nitecki, Z.** Nonsingular endomorphisms of the circle / Z. Nitecki // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. — 1970. — Vol. 14. — P. 203–220.

Поступила в редакцию 21.06.2018
После переработки 21.07.2018

Сведения об авторах

Исаенкова Наталья Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, информатики и информационных технологий, Нижегородская академия Министерства внутренних дел Российской Федерации, Нижний Новгород, Россия; e-mail: nisaenkova@mail.ru.

Жужома Евгений Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия; e-mail: zhuzhoma@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2018. Vol. 3, iss. 3. P. 295–310.

DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13303

ON THE COMPLIANCE OF THE BASIC SETS OF A-ENDOMORPHISMS AND A-DIFFEOMORPHISMS

N.V. Isaenkova[1,a], **E.V. Zhuzhoma**[2,b]

[1] *Nizhniy Novgorod Academy of the Ministry of Internal Affairs of the Russian Federation, Nizhniy Novgorod, Russia*

[2] *National research University "Higher school of Economics", Nizhniy Novgorod, Russia*

[a] *nisaenkova@mail.ru*, [b] *zhuzhoma@mail.ru*

We consider a class of Smale — Vietoris A-diffeomorphisms that are defined using basic A-endomorphisms of manifolds, the dimension of which is less than the dimension of the supporting manifolds of A-diffeomorphisms. The class of Smale — Vietoris diffeomorphisms contains DE-mappings of Smale. We show that there is a one-to-one correspondence between the basic sets of the basic A-endomorphism and Smale — Vietoris diffeomorphisms. For back-invariant basic set of basis A-endomorphism there is an accurate description of the corresponding non-trivial basic set of Smale — Vietoris A-diffeomorphism. Using the description obtained, one constructs the bifurcation between different types of solenoidal basic sets.

Keywords: *solenoid, axiom A, basic set, bifurcation.*

References

1. **Smale S.** Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American Mathematica Society*, 1967, vol. 73, pp. 747–817.
2. **Anosov D.V.** Iskhodnye ponyatiya. Elementarnaya teoriya [Initial concepts. Elementary theory]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya* [Results of science and technology. Modern problems of mathematics. Fundamental directions], 1985, vol. 1, Dinamicheskiye sistemy — 1 [Dynamic systems — 1], pp. 156–204. (In Russ.).
3. **Grines V.Z., Zhuzhoma E.V., Pochinka O.V.** Rough diffeomorphisms with basis sets of codimension one. *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 225, no. 2, pp. 195–219.
4. **Grines V.Z., Pochinka O.V.** *Vvedeniye v topologicheskuyu klassifikatsiyu diffeomorfizmov na mnogoobraziyakh razmernosti dva i tri* [Introduction to the topological classification of diffeomorphisms on manifolds of dimension two and three]. Moscow, Izhevsk, RKhD Publ., 2011. 424 p. (In Russ.).
5. **Aranson S.Kh., Belitsky G., Zhuzhoma E.** *Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces*. American Mathematical Society, 1996. Pp. 425–437.
6. **Vietoris L.** Über den höheren Zusammenhahg kompakter Räume und Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen. *Mathematische Annalen*, 1927, vol. 97, pp. 454–472.
7. **Van Danzig D.** Über topologisch homogene Kontinua. *Fundamenta Mathematicae*, 1930, vol. 14, pp. 102–105.
8. **Takens F.** Multiplications in solenoids as hyperbolic attractors, *Topology and Applications*, 2005, vol. 152, pp. 219–225.
9. **Williams R.F.** One-dimensional non-wandering sets. *Topology*, 1967, vol. 6, pp. 473–487.
10. **Williams R.F.** Expanding attractors. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 1974, vol. 43, pp. 169–203.
11. **Block L.** Diffeomorphisms obtained from endomorphisms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1975, vol. 214, pp. 403–413.

12. **Zhuzhoma E.V., Isaenkova N.V.** Zero-dimensional solenoidal base sets. *Sbornik: Mathematics*, 2011, vol. 202, no. 3, pp. 351–372.
13. **Il'yashenko Yu.S., Veygu Li.** *Nonlocal bifurcations*. Moscow, MTsNMO Publ., 1999. 415 p.
14. **Turaev D.V., Shil'nikov L.P.** O katastrofakh golubogo neba [About blue sky disasters]. *Doklady Akademii nauk* [Doklady of Academy of Sciences], 1995, vol. 342, pp. 596–599. (In Russ.).
15. **Arnol'd V.I., Hesin B.A.** *Topologicheskiye metody v gidrodinamike* [Topological methods in hydrodynamics]. Moscow, MTsNMO, 2007. 392 p. (In Russ.).
16. **Vainshtein S.I., Zel'dovich Ya.B.** Origin of magnetic fields in astrophysics (Turbulent "dynamo" mechanisms). *Soviet Physics Uspekhi*, 1972, vol. 15, no. 2, pp. 159–172.
17. **Childress S., Gilbert A.** *Stretch, Twist and Fold: The Fast Dynamo*. Lecture Notes in Physics. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1995. 412 p.
18. **Zhuzhoma E.V., Medvedev V.S., Isaenkova N.V.** O topologicheskoy strukture magnitnogo polya oblastey fotosfery [On the topological structure of the magnetic field in the photosphere regions]. *Nelineynaya dinamika* [Russian Journal of Nonlinear Dynamics], 2017, vol. 13, no. 3, pp. 399–412. (In Russ.).
19. **Zhuzhoma E.V., Isaenkova N.V.** On classification of one-dimensional expanding attractors. *Mathematical Notes*, 2009, vol. 86, no. 3, pp. 333–341.
20. **Bothe H.** Transversally wild expanding attractors. *Mathematische Nachrichten*, 1992, vol. 157, pp. 25–49.
21. **Farrell F., Jones L.** New attractors in hyperbolic dynamics. *Journal of Differential Geometry*, 1980, vol. 15, pp. 107–133.
22. **Jones L.** Locally strange hyperbolic sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1983, vol. 275, no. 1, pp. 153–162.
23. **Robinson C., Williams R.** Classification of expanding attractors: an example. *Topology*, 1976, vol. 15, pp. 321–323.
24. **Bothe H.** The ambient structure of expanding attractors. II. Solenoids in 3-manifolds. *Mathematische Nachrichten*, 1983, vol. 112, pp. 69–102.
25. **Boju Jiang, Yi Ni, Shicheng Wang.** 3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2004, vol. 356, pp. 43–82.
26. **Jiming Ma, Bin Yu.** The realization of Smale solenoid type attractors in 3-manifolds. *Topology and its Applications*, 2007, vol. 154, pp. 3021–3031.
27. **Jiming Ma, Bin Yu.** Genus two Smale — Williams solenoids in 3-manifolds. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 2011, vol. 20, pp. 909–926.
28. **Zhuzhoma E.V., Isaenkova N.V.** Classification of coverings of the circle *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2012, vol. 278, pp. 88–93.
29. **Przytycki F.** Anosov endomorphisms. *Studia Mathematica*, 1977, vol. 58, no. 3, pp. 249–285.
30. **Robinson C.** *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. Studies in Advanced Mathematics. Boca Raton et al, CRC Press, 1998. 520 p.
31. **Kurenkov E.D.** O sushchestvovanii endomorfizma dvumernogo tora so strogo invariantnym szhimayushchimsya repellerom [On the existence of an endomorphism of a two-dimensional torus with a strictly invariant compressible repeller]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [Journal of Middle Volga Mathematical Society], 2017, vol. 19, no. 1, pp. 60–66. (In Russ.).
32. **Shub M.** Endomorphisms of compact differentiable manifolds. *American Journal of Mathematics*, 1969, vol. 91, pp. 175–199.
33. **De Melo W., van Strien S.** *One-Dimensional Dynamics*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1993. 605 p.
34. **Nitecki Z.** Nonsingular endomorphisms of the circle. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 1970, vol. 14, pp. 203–220.

Accepted article received 21.06.2018
Corrections received 21.07.2018