Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3, вып. 3. С. 276–294.

УДК 517.953 DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13302

ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ АНАЛОГОВ УРАВНЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

А. И. Григорьева

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия
shadrina_ai@mail.ru

Исследуется разрешимость задач сопряжения для уравнения составного типа с разрывным коэффициентом. Методом продолжения по параметру доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Также приводятся различные примеры неединственности существования решений, зависящие от того, как себя ведёт разрывная функция в заданной области.

Ключевые слова: *разрывный коэффициент, задача сопряжения, регулярное решение, существование и единственность решения, метод продолжения по параметру, априорная оценка.*

Введение

В работе изучается уравнение

$$u_{tt} - \alpha(x)u_{xx} - u_{xxtt} + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

в ситуации, когда коэффициент $\alpha(x)$ может иметь разрыв первого рода в некоторой внутренней точке своей области определения.

Уравнение (1) принадлежит к классу уравнений составного типа; в последнее время подобные уравнения называют также уравнениями соболевского типа [1–4]. Непосредственно уравнения вида (1) возникают при моделировании продольных волн в стержнях, в теории длинных волн на воде, в теории волн в плазме [5–7]. Разрешимость различных краевых задач для таких уравнений с непрерывным коэффициентом $\alpha(x)$ изучалась в работах многих авторов, см., например, [8–21]. С другой стороны, при моделировании различных процессов, протекающих в составных средах с различными характеристиками, часто возникают задачи, в которых на линии разрыва необходимо задавать некоторые условия сопряжения (склейки). Именно такие задачи и будут предметом исследования в настоящей работе.

Краевые и начально-краевые задачи сопряжения или обобщённые задачи дифракции достаточно хорошо изучены для классических эллиптических, параболических и гиперболических уравнений (см. [22; 23]), из работ последнего времени отметим статьи [24–26]. Менее изученными представляются задачи сопряжения для неклассических уравнений, здесь можно отметить работы [27–32]. Частично восполнить данный пробел и предполагается в настоящей работе.

1. Постановка задач

Специфика уравнений вида (1) такова, что для них корректной будет как начально-краевая задача (совпадающая по постановке с обычной начально-краевой задачей для гиперболических уравнений второго порядка), так и задача с данными на всей границе (эллиптическая задача). В соответствии с этим и задача сопряжения ниже будет изучаться в двух постановках.

Пусть x есть точка отрезка $[-1,1]$ оси Ox, t есть точка отрезка $[0,T]$, $0<T<\infty$, Q_1, Q_2 и Q есть цилиндры $(-1,0)\times(0,T)$, $(0,1)\times(0,T)$ и $(-1,1)\times(0,T)$ соответственно, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ — функции, определённые при $(x,t)\in\overline{Q}$, $\alpha(x)$ есть заданная функция, определённая при $x\in[-1,1]$ и имеющая, быть может, разрыв 1-го рода при $x=0$, a и b — заданные действительные числа.

Задача сопряжения I: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для неё выполняются условия

$$u(-1,t)=u(1,t)=0,\ \ t\in(0,T), \tag{2}$$

$$u(x,0)=u(x,T)=0,\ \ x\in(-1,0)\cup(0,1), \tag{3}$$

$$u(-0,t)=au(+0,t),\ \ t\in(0,T), \tag{4}$$

$$u_x(+0,t)=bu_x(-0,t),\ \ t\in(0,T). \tag{5}$$

Задача сопряжения II: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для неё выполняются условия (2), (4), (5) и равенство

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ \ x\in(-1,0)\cup(0,1).$$

Определим необходимые функциональные пространства $V(Q_1)$, $V(Q_2)$ и V:

$$V(Q_1)=\left\{v(x,t):\int\limits_{Q_1}(v^2+v_x^2+v_t^2+v_{xx}^2+v_{xt}^2+v_{tt}^2+v_{xxt}^2+v_{xxtt}^2)dxdt<+\infty\right\},$$

$$V(Q_2)=\left\{v(x,t):\int\limits_{Q_2}(v^2+v_x^2+v_t^2+v_{xx}^2+v_{xt}^2+v_{tt}^2+v_{xxt}^2+v_{xxtt}^2)dxdt<+\infty\right\},$$

$$V=\{v(x,t):v(x,t)\in V(Q_1),\ v(x,t)\in V(Q_2)\}$$

(все производные понимаются как обобщённые производные по С. Л. Соболеву). Зададим норму в этих пространствах:

$$\|v\|_{V(Q_i)}=\left\{\int\limits_{Q_i}(v^2+v_x^2+v_t^2+v_{xx}^2+v_{xt}^2+v_{tt}^2+v_{xxt}^2+v_{xxtt}^2)dxdt\right\}^{1/2},\ \ i=1,2,$$

$$\|v\|_V=(\|v\|^2_{V(Q_1)}+\|v\|^2_{V(Q_2)})^{1/2}.$$

Очевидно, что пространства V, $V(Q_1)$, $V(Q_2)$ с этими нормами будут банаховыми пространствами.

2. Разрешимость задачи сопряжения I

Теорема 1. *Пусть* $ab > 0$ *и пусть выполняются условия*

$$\alpha(x) \le \alpha_0 < 0, \ x \in [-1, 1], \tag{6}$$

$$\begin{gathered} c(x,t) \in C^2(\bar{Q}_1) \cup C^2(\bar{Q}_2), \ c(x,t) \le 0, \ c_{xx}(x,t) \ge 0, \ x \in (-1,0) \cup (0,1), \ t \in (0,T), \\ c(-0,t) = c(+0,t), \ c_x(-0,t) \le 0, \ c_x(+0,t) \ge 0, \ t \in (0,T). \end{gathered} \tag{7}$$

Тогда задача сопряжения I не может иметь более одного решения в пространстве V.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ будет решением задачи сопряжения I из пространства V и пусть $f(x,t) \equiv 0$. Умножим уравнение (1) на функцию u_{xx} в области Q_1 и на γu_{xx}, где $\gamma = a/b$, в области Q_2, затем проинтегрируем по Q_1 и Q_2 соответственно и сложим. Получим следующее равенство:

$$\int\limits_0^T \int\limits_{-1}^0 u_{x\tau}^2 dx d\tau + \gamma \int\limits_0^T \int\limits_0^1 u_{x\tau}^2 dx d\tau - \int\limits_0^T \int\limits_{-1}^0 \alpha(x) u_{xx}^2 dx d\tau -$$

$$-\gamma \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \alpha(x) u_{xx}^2 dx d\tau + \int\limits_0^T \int\limits_{-1}^0 u_{xx\tau}^2 dx d\tau + \gamma \int\limits_0^T \int\limits_0^1 u_{xx\tau}^2 dx d\tau +$$

$$+\frac{1}{2} \int\limits_0^T \int\limits_{-1}^0 c_{xx}(x,\tau) u^2 dx d\tau + \frac{\gamma}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^1 c_{xx}(x,\tau) u^2 dx d\tau - \frac{1}{2} \int\limits_0^T c_x(-0,\tau) u^2(-0,\tau) d\tau +$$

$$+\frac{\gamma}{2} \int\limits_0^T c_x(+0,\tau) u^2(+0,\tau) d\tau - \int\limits_0^T \int\limits_{-1}^0 c(x,\tau) u_x^2 dx d\tau - \gamma \int\limits_0^T \int\limits_0^1 c(x,\tau) u_x^2 dx d\tau = 0.$$

Из этого равенства и условий теоремы и будет вытекать единственность задачи сопряжения I. □

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (6), (7). *Тогда для любой функции* $f(x,t) \in L_2(Q)$ *задача сопряжения I имеет решение, принадлежащее пространству* V.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу: найти решения $\tilde{v}(x,t)$ и $\tilde{w}(x,t)$ уравнений

$$\begin{gathered} \tilde{v}_{tt}(x,t) - \alpha(x)\tilde{v}_{xx}(x,t) - \tilde{v}_{xxtt}(x,t) - \frac{ab(x+1)}{1+ab}\tilde{v}_{xtt}(-0,t) + \frac{a(x+1)}{1+ab}\tilde{w}_{tt}(+0,t) + \\ + c(x,t)\left(\tilde{v}(x,t) + \frac{a(x+1)}{1+ab}\tilde{w}(+0,t) - \frac{ab(x+1)}{1+ab}\tilde{v}_x(-0,t)\right) = f(x,t), \ (x,t) \in Q_1, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} \tilde{w}_{tt}(x,t) - \alpha(x)\tilde{w}_{xx}(x,t) - \tilde{w}_{xxtt}(x,t) + \frac{a(x-1)}{1+ab}\tilde{v}_{xtt}(-0,t) + \frac{ab(x-1)}{1+ab}\tilde{w}_{tt}(+0,t) + \\ + c(x,t)\left(\tilde{w}(x,t) + \frac{ab(x-1)}{1+ab}\tilde{w}(+0,t) + \frac{a(x-1)}{1+ab}\tilde{v}_x(-0,t)\right) = f(x,t), \ (x,t) \in Q_2, \end{gathered} \tag{9}$$

в областях Q_1 и Q_2 соответственно, для которых выполняются условия

$$\tilde{v}(-1,t) = \tilde{v}(-0,t) = 0,\ t \in (0,T), \tag{10}$$

$$\tilde{w}(1,t) = \tilde{w}_x(+0,t) = 0,\ t \in (0,T), \tag{11}$$

$$\tilde{v}(x,0) = \tilde{v}(x,T) = 0,\ x \in (-1,0), \tag{12}$$

$$\tilde{w}(x,0) = \tilde{w}(x,T) = 0,\ x \in (-1,0). \tag{13}$$

Для доказательства разрешимости этой задачи воспользуемся методом продолжения по параметру. Возьмём некоторое число λ из отрезка $[0,1]$ и рассмотрим задачу: найти решение $\tilde{v}(x,t) \in V(Q_1)$, $\tilde{w}(x,t) \in V(Q_2)$ уравнений

$$\tilde{v}_{tt}(x,t) - \alpha(x)\tilde{v}_{xx}(x,t) - \tilde{v}_{xxtt}(x,t) - \frac{\lambda^2 ab(x+1)}{1+\lambda^2 ab}\tilde{v}_{xtt}(-0,t) + \frac{\lambda a(x+1)}{1+\lambda^2 ab}\tilde{w}_{tt}(+0,t) +$$
$$+ c(x,t)\left(\tilde{v}(x,t) + \frac{\lambda a(x+1)}{1+\lambda^2 ab}\tilde{w}(+0,t) - \frac{\lambda^2 ab(x+1)}{1+\lambda^2 ab}\tilde{v}_x(-0,t)\right) =$$
$$= f(x,t),\ (x,t) \in Q_1, \tag{14}$$

$$\tilde{w}_{tt}(x,t) - \alpha(x)\tilde{w}_{xx}(x,t) - \tilde{w}_{xxtt}(x,t) + \frac{\lambda a(x-1)}{1+\lambda^2 ab}\tilde{v}_{xtt}(-0,t) + \frac{\lambda^2 ab(x-1)}{1+\lambda^2 ab}\tilde{w}_{tt}(+0,t) +$$
$$+ c(x,t)\left(\tilde{w}(x,t) + \frac{\lambda^2 ab(x-1)}{1+\lambda^2 ab}\tilde{w}(+0,t) + \frac{\lambda a(x-1)}{1+\lambda^2 ab}\tilde{v}_x(-0,t)\right) =$$
$$= f(x,t),\ (x,t) \in Q_2, \tag{15}$$

такие, что для них выполняются условия (10)–(13).

При $\lambda = 0$ данная задача имеет решение $\{\tilde{v}(x,t), \tilde{w}(x,t)\}$. Теперь докажем наличие для функций $\tilde{v}(x,t)$ и $\tilde{w}(x,t)$ «хороших» априорных оценок.

Определим функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$:

$$v(x,t) = \tilde{v}(x,t) + \frac{\lambda a(x+1)}{1+\lambda^2 ab}\tilde{w}(+0,t) - \frac{\lambda^2 ab(x+1)}{1+\lambda^2 ab}\tilde{v}_x(-0,t), \tag{16}$$

$$w(x,t) = \tilde{w}(x,t) + \frac{\lambda b(x-1)}{1+\lambda^2 ab}\tilde{v}(-0,t) + \frac{\lambda^2 ab(x-1)}{1+\lambda^2 ab}\tilde{w}_x(+0,t). \tag{17}$$

Для этих функций выполняются равенства

$$v_{tt} - \alpha(x)v_{xx} - v_{xxtt} + c(x,t)v = f(x,t), \tag{18}$$

$$w_{tt} - \alpha(x)w_{xx} - w_{xxtt} + c(x,t)w = f(x,t) \tag{19}$$

в областях Q_1 и Q_2 соответственно и выполняются также условия

$$v(-0,t) = \lambda a w(+0,t),\ t \in (0,T), \tag{20}$$

$$w_x(+0,t) = \lambda b v_x(-0,t),\ t \in (0,T), \tag{21}$$

и условия (10)–(13). Умножим уравнение (18) на функцию $v_{xx}(x,t)$ и проинтегрируем по области Q_1, затем умножим уравнение (19) на функцию $\gamma w_{xx}(x,t)$, где $\gamma = a/b$, и проинтегрируем по области Q_2. Сложив два полученных выражения, придём к равенству

$$\int_0^T\int_{-1}^0 v_{x\tau}^2dxd\tau+\gamma\int_0^T\int_0^1 w_{x\tau}^2dxd\tau-\int_0^T\int_{-1}^0\alpha(x)v_{xx}^2dxd\tau-$$

$$-\gamma\int_0^T\int_0^1\alpha(x)w_{xx}^2dxd\tau+\int_0^T\int_{-1}^0 v_{xx\tau}^2dxd\tau+\gamma\int_0^T\int_0^1 w_{xx\tau}^2dxd\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{-1}^0 c_{xx}(x,\tau)v^2dxd\tau+\frac{\gamma}{2}\int_0^T\int_0^1 c_{xx}(x,\tau)w^2dxd\tau-\frac{1}{2}\int_0^T c_x(-0,\tau)v^2(-0,\tau)d\tau+$$

$$+\frac{\gamma}{2}\int_0^T c_x(+0,\tau)w^2(+0,\tau)d\tau-\int_0^T\int_{-1}^0 c(x,\tau)v_x^2dxd\tau-\gamma\int_0^T\int_0^1 c(x,\tau)w_x^2dxd\tau=$$

$$=\int_0^T\int_{-1}^0 f(x,\tau)v_{xx}dxd\tau+\gamma\int_0^T\int_0^1 f(x,\tau)w_{xx}dxd\tau.$$

Применив в правой части этого равенства неравенство Юнга, получим первую априорную оценку

$$\int_0^T\int_{-1}^0(v_{x\tau}^2+v_{xx}^2+v_{xx\tau}^2)dxd\tau+\int_0^T\int_0^1(w_{x\tau}^2+w_{xx}^2+w_{xx\tau}^2)dxd\tau\le$$

$$\le M_1\left[\int_0^T\int_{-1}^0 f^2(x,\tau)dxd\tau+\int_0^T\int_0^1 f^2(x,\tau)dxd\tau\right],\tag{22}$$

в которой число M_1 определяется лишь числами α_0, a, b и функцией $c(x,t)$.

Теперь умножим уравнение (18) на функцию $-v_{xxtt}(x,t)$ и проинтегрируем по области Q_1, а уравнение (19) — на функцию $-\gamma w_{xxtt}(x,t)$ и проинтегрируем по области Q_2. Сложив и выполнив интегрирование по частям, используя неравенство Юнга и оценку (22), получим вторую априорную оценку для функций $v(x,t)$ и $w(x,t)$

$$\int_0^T\int_{-1}^0 v_{xx\tau\tau}^2dxd\tau+\int_0^T\int_0^1 w_{xx\tau\tau}^2dxd\tau\le$$

$$\le M_2\left[\int_0^T\int_{-1}^0 f^2(x,\tau)dxd\tau+\int_0^T\int_0^1 f^2(x,\tau)dxd\tau\right],$$

константа M_2 в которой определяется числами α_0, a и b, а также функцией $c(x,t)$.

Имеют место равенства

$$\tilde v(x,t)=v(x,t)+\frac{\lambda ab(x+1)(\lambda-1)}{1+\lambda^2ab}v_x(-0,t)+\frac{\lambda a(x+1)(\lambda ab-1)}{1+\lambda^2ab}w(+0,t),$$

$$\tilde w(x,t)=w(x,t)+\frac{\lambda ab(x-1)(1-\lambda)}{1+\lambda^2ab}w(+0,t)-\frac{\lambda b(x-1)(\lambda ab+1)}{1+\lambda^2ab}v_x(-0,t).$$

Из ограниченности функций $v(x,t)$ и $w(x,t)$ в пространствах $V(Q_1)$ и $V(Q_2)$ соответственно и из этих равенств следует, что функции $\tilde v(x,t)$ и $\tilde w(x,t)$ также будут ограничены в этих же пространствах. А это и означает, что для решений $\tilde v(x,t), \tilde w(x,t)$ будет выполнена требуемая равномерная по λ оценка в пространствах $V(Q_1)$ и $V(Q_2)$.

Как вытекает из теоремы о методе продолжения по параметру [33, гл. 3, §14], разрешимость задачи (10)–(15) при $\lambda = 0$ и полученная оценка означают, что задача (8)–(13) будет иметь решение $\tilde v(x,t), \tilde w(x,t)$, такое, что $\tilde v(x,t) \in V(Q_1)$, $\tilde w(x,t) \in V(Q_2)$. Обозначим функции $v(x,t) = \tilde v(x,t) + (x+1)aw(+0,t)$, $w(x,t) = \tilde w(x,t) + (x-1)bv_x(-0,t)$. Далее определим функцию

$$u(x,t) = \begin{cases} v(x,t),\ (x,t) \in Q_1, \\ w(x,t),\ (x,t) \in Q_2, \end{cases}$$

которая и является решением задачи сопряжения I из требуемого класса. Теорема доказана. □

Покажем теперь, что при нарушении условий теорем 1 и 2 для задачи сопряжения I может иметь место как неединственность, так и несуществование решений. Сначала приведём примеры неединственности.

Пусть α_1 и α_2 есть заданные отрицательные числа, $\alpha_0(x)$ есть кусочно-постоянная функция

$$\alpha_0(x) = \begin{cases} \alpha_1,\ x \in [-1,0], \\ \alpha_2,\ x \in [0,1]. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу сопряжения I со спектральным параметром или задачу сопряжения I': найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения

$$u_{tt} - \alpha_0(x)u_{xx} - u_{xxtt} = \lambda u \tag{1'}$$

и такую, что для неё выполняются условия (2)–(4). Заметим, что задача сопряжения I' фактически является задачей на собственные значения.

Пусть $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^\infty$ и $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ есть соответственно собственные функции и собственные числа задачи

$$\varphi''(t) = \mu\varphi(t),\ \varphi(0) = \varphi(T) = 0.$$

Уточним, что все собственные числа здесь отрицательные, простые и расположены по убыванию; единственной предельной точкой последовательности $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ является $-\infty$.

Положим $\beta_{1,k} = \frac{1}{\sqrt{|\alpha_1+\mu_k|}}$, $\beta_{2,k} = \frac{1}{\sqrt{|\alpha_2+\mu_k|}}$, $\beta_k = \beta_{2,k}/\beta_{1,k}$, $\gamma_k(\lambda) = \beta_{1,k}\sqrt{|\lambda-\mu_k|}$, $\delta_k(\lambda) = \beta_{2,k}\sqrt{|\lambda-\mu_k|}$. Пусть λ есть фиксированное число из промежутка $(\mu_1, +\infty)$.

Определим решение $u(x,t)$ как задачи сопряжения I для уравнения (1′):

$$u(x,t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^\infty c_k(x)\varphi_k(t),\ (x,t) \in Q_1, \\ \sum\limits_{k=0}^\infty d_k(x)\varphi_k(t),\ (x,t) \in Q_2. \end{cases}$$

Функции $c_k(x)$ и $d_k(x)$ здесь представляют собой решение уравнений

$$c_k'' - \gamma_k^2(\lambda)c_k(x) = 0,\ \ d_k'' - \delta_k^2(\lambda)d_k(x) = 0$$

на интервалах $(-1,0)$ и $(0,1)$ соответственно, снабжённых условиями

$$c_k(-1)=0,\ \ d_k(1)=0,$$

$$c_k(-0)=ad_k(+0),\ \ d_k'(+0)=bc_k'(-0).$$

Искомые функции $c_k(x)$ и $d_k(x)$ имеют вид

$$c_k(x)=A_ke^{\gamma_k(\lambda)x}+B_ke^{-\gamma_k(\lambda)x},\ \ d_k(x)=C_ke^{\delta_k(\lambda)x}+D_ke^{-\delta_k(\lambda)x},$$

A_k, B_k, C_k, D_k — постоянные. Граничные условия и условия сопряжения дают для A_k, B_k, C_k и D_k систему уравнений

$$\begin{cases} A_ke^{-\gamma_k(\lambda)}+B_ke^{\gamma_k(\lambda)}=0,\\ C_ke^{\delta_k(\lambda)}+D_ke^{-\delta_k(\lambda)}=0,\\ A_k+B_k=a(C_k+D_k),\\ C_k\delta_k(\lambda)-D_k\delta_k(\lambda)=b(A_k\gamma_k(\lambda)-B_k\gamma_k(\lambda)). \end{cases}$$

Определитель Δ этой системы есть число

$$\Delta=ab\gamma_k(\lambda)(e^{-\delta_k(\lambda)}-e^{\delta_k(\lambda)})(e^{-\gamma_k(\lambda)}+e^{\gamma_k(\lambda)})+\delta_k(\lambda)(e^{-\delta_k(\lambda)}+e^{\delta_k(\lambda)})(e^{-\gamma_k(\lambda)}-e^{\gamma_k(\lambda)}).$$

Задача сопряжения I' будет иметь нетривиальное решение, если выполняется равенство $\Delta=0$. Это равенство приводит к соотношению

$$ab=-\beta_k\cdot\frac{1+e^{-2\delta_k(\lambda)}}{1-e^{-2\delta_k(\lambda)}}\cdot\frac{1-e^{-2\gamma_k(\lambda)}}{1+e^{-2\gamma_k(\lambda)}}. \tag{23}$$

Пусть выполняется условие $\alpha_1<\alpha_2$. Положим

$$\varphi_{1,k}(z)=\frac{1+e^{-2\beta_kz}}{1+e^{-2z}},\ \ \varphi_{2,k}(z)=\beta_k\frac{1-e^{-2z}}{1-e^{-2\beta_kz}}.$$

Для положительных чисел z имеют место неравенства

$$\frac{1}{2}<\varphi_{1,k}(z)<2. \tag{24}$$

Далее, используя теорему Лагранжа, нетрудно показать, что имеют место равенства

$$\varphi_{2,k}(z)=\beta_k\cdot\frac{-2ze^{-2\theta_{1,k}z}}{-2\beta_kze^{-2\beta_k\theta_{2,k}z}}=e^{2(\beta_k\theta_{2,k}-\theta_{1,k})z},$$

в которых $\theta_{1,k}$ и $\theta_{2,k}$ есть некоторые числа из интервала $(0,1)$. Отсюда получаем, что для положительных чисел z выполняются неравенства

$$e^{-2z}<\varphi_{2,k}(z)<e^{2\beta_kz}. \tag{25}$$

Заметим, что вследствие условия $\alpha_1<\alpha_2$ выполняются неравенства

$$1<\beta_k<\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}=\beta_0. \tag{26}$$

Пусть $z=\gamma_k(\lambda)$. Имеем

$$\gamma_k^2(\lambda)=\frac{\lambda-\mu_k}{-\alpha_1-\mu_k}=1+\frac{\lambda+\alpha_1}{-\alpha_1-\mu_k}.$$

Если выполняется неравенство $\lambda+\alpha_1 \le 0$, то имеет место оценка

$$\gamma_k^2(\lambda) \le 1, \tag{27}$$

а если $\lambda+\alpha_1>0$, то справедлива другая оценка:

$$\gamma_k^2(\lambda) \le 1+\frac{\lambda+\alpha_1}{|\alpha_1|}. \tag{28}$$

Обозначим

$$\gamma_0(\lambda)=\begin{cases} 1, \text{ если } \lambda+\alpha_1\le 0,\\ \left(1+\frac{\lambda+\alpha_1}{|\alpha_1|}\right)^{1/2}, \text{ если } \lambda+\alpha_1>0. \end{cases}$$

Из оценок (27) и (28) следует, что последовательность $\{\gamma_k(\lambda)\}$ ограничена:

$$0\le\gamma_k(\lambda)\le\gamma_0(\lambda). \tag{29}$$

Введём ещё обозначения:

$$m_0(\lambda)=\frac{1}{2}e^{-2\gamma_0(\lambda)},\ \ m_1(\lambda)=2e^{2\beta_0\gamma_0(\lambda)},$$

$$\bar{m}_0(\lambda)=\inf_{k\ge 1}\{\varphi_{1,k}(\lambda)\varphi_{2,k}(\lambda)\},\ \bar{m}_1(\lambda)=\sup_{k\ge 1}\{\varphi_{1,k}(\lambda)\varphi_{2,k}(\lambda)\}.$$

Из неравенств (24)–(26), (29) вытекает, что для всех натуральных чисел k выполняются неравенства

$$0<m_0(\lambda)\le\bar{m}_0(\lambda)\le\varphi_{1,k}(\gamma_k(\lambda))\varphi_{2,k}(\gamma_k(\lambda))\le\bar{m}_1(\lambda)\le m_1(\lambda). \tag{30}$$

Утверждение 1. *Пусть выполняется условие $\alpha_1<\alpha_2<0$ и пусть λ есть фиксированное число из промежутка $(\mu_1,+\infty)$. Тогда*

1) если $ab\in[-\bar{m}_1(\lambda),-\bar{m}_0(\lambda)]$ и существует натуральное число k, такое, что $ab=-\varphi_{1,k}(\gamma_k(\lambda))\varphi_{2,k}(\gamma_k(\lambda))$, то для задачи сопряжения I' будет иметь место неединственность решений;

2) если $ab\in[-\bar{m}_1(\lambda),-\bar{m}_0(\lambda)]$ и для всех натуральных чисел k выполняется $ab\ne-\varphi_{1,k}(\gamma_k(\lambda))\varphi_{2,k}(\gamma_k(\lambda))$, то задача сопряжения I' имеет только нулевое решение;

3) если $ab\in(-\bar{m}_0(\lambda),0)$ или $ab\in(-\infty,-\bar{m}_1(\lambda))$, то задача сопряжения I' имеет только нулевое решение.

Данное утверждение очевидным образом вытекает из проделанных выше выкладок и из неравенств (30).

Заметим, что в случаях $ab\in(-m_0(\lambda),0)$, $ab\in(-\infty,-m_1(\lambda))$ задача сопряжения I' имеет только нулевое решение.

Пусть теперь $\alpha_2<\alpha_1<0$. Тогда для положительных чисел z выполняются следующие неравенства:

$$e^{-2z}<\varphi_{2,k}(z)<e^{2z}. \tag{31}$$

Обозначим

$$m_2(\lambda)=\frac{1}{2}e^{-2\gamma_0(\lambda)},\ \ m_3(\lambda)=2e^{2\gamma_0(\lambda)}.$$

В силу соотношений (24), (26), (29) и (31) получим, что для всех натуральных чисел k справедливы неравенства

$$m_2(\lambda)\le\bar{m}_0(\lambda)\le\varphi_{1,k}(\gamma_k(\lambda))\varphi_{2,k}(\gamma_k(\lambda))\le\bar{m}_0(\lambda)\le m_3(\lambda). \tag{32}$$

Используя все эти выкладки и неравенство (32), сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть* $\alpha_1 < \alpha_2 < 0$ *и* λ *есть фиксированное число из промежутка* $(\mu_1, +\infty)$*. Тогда*

1) *если* $ab \in [-\bar{m}_1(\lambda), -\bar{m}_0(\lambda)]$ *и существует натуральное число* k*, такое, что* $ab = -\varphi_{1,k}(\gamma_k(\lambda))\varphi_{2,k}(\gamma_k(\lambda))$*, то для задачи сопряжения* I' *имеет место неединственность решений;*

2) *если* $ab \in [-\bar{m}_1(\lambda), -\bar{m}_0(\lambda)]$ *и для всех натуральных чисел* k *выполняется* $ab \neq -\varphi_{1,k}(\gamma_k(\lambda))\varphi_{2,k}(\gamma_k(\lambda))$*, то задача сопряжения* I' *имеет только нулевое решение;*

3) *если* $ab \in (-\bar{m}_0(\lambda), 0)$ *или* $ab \in (-\infty, -\bar{m}_1(\lambda))$*, то задача сопряжения* I' *имеет только нулевое решение.*

Имеет место также следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть выполняется условие* $\alpha_1 = \alpha_2$*. Тогда*

1) *если* $ab = -1$*, то для любого числа* λ *из промежутка* $(\mu_1, +\infty)$ *задача сопряжения* I' *будет иметь бесконечно много линейно независимых ненулевых решений;*

2) *если* $ab < 0$*,* $ab \neq -1$*, то для любого числа* λ *из промежутка* $(\mu_1, +\infty)$ *задача сопряжения* I' *будет иметь только нулевое решение.*

Доказательство этого утверждения очевидно.

Из утверждений 1–3 вытекает, что для любого числа λ из промежутка $(\mu_1, +\infty)$ существует бесконечно много чисел a и b, таких, что $ab < 0$, и при этом задача сопряжения I' для данного числа λ будет иметь ненулевые решения. Можно также интерпретировать утверждения 1–3 следующим образом: любое число λ из промежутка $(\mu_1, +\infty)$ может оказаться собственным числом задачи сопряжения I'.

Покажем теперь, что любое число λ из промежутка $(-\infty, \mu_1]$ также может оказаться собственным числом задачи сопряжения I'.

Пусть λ есть фиксированное число из промежутка $(-\infty, \mu_1]$, не совпадающее ни с одним из чисел μ_k, и пусть k_0 есть такое натуральное число, для которого выполняется $\mu_{k_0+1} < \lambda < \mu_{k_0}$. Решение $u(x,t)$ задачи сопряжения I' вновь определим с помощью рядов по системе функций $\{\varphi_k(t)\}$ с коэффициентами $c_k(x)$ при $x < 0$ и $d_k(x)$ при $x > 0$, но при этом при $k \leq k_0 + 1$ эти коэффициенты будут иметь вид

$$c_k(x) = A_k e^{\gamma_k(\lambda)x} + B_k e^{-\gamma_k(\lambda)x},$$

$$d_k(x) = C_k e^{\delta_k(\lambda)x} + D_k e^{-\delta_k(\lambda)x},$$

в случае же $k_0 \leq k \leq 1$ будет иметь место другое представление:

$$c_k(x) = A_k \cos\gamma_k(\lambda)x + B_k \sin\gamma_k(\lambda)x,$$

$$d_k(x) = C_k \cos\delta_k(\lambda)x + D_k \sin\delta_k(\lambda)x.$$

В случае $k \leq k_0 + 1$ существование ненулевых решений A_k, B_k, C_k, D_k и тем самым наличие ненулевых решений $c_k(x)$ и $d_k(x)$ вновь будет определяться равенством (23) (которое может выполняться лишь в случае $ab < 0$), а также условиями $\alpha_1 < \alpha_2 < 0$, $\alpha_2 < \alpha_1 < 0$ или $\alpha_1 = \alpha_2 < 0$; и при выполнении одного из этих соотношений число λ будет собственным числом задачи сопряжения I'.

В случае $1 \leq k \leq k_0$ наличие ненулевых чисел A_k, B_k, C_k, D_k будет определяться равенством

$$ab\gamma_k(\lambda)\cos\gamma_k(\lambda)\sin\delta_k(\lambda) + \delta_k(\lambda)\cos\delta_k(\lambda)\sin\gamma_k(\lambda) = 0. \tag{33}$$

Если теперь окажется, что для этих чисел $\gamma_k(\lambda)$ и $\delta_k(\lambda)$ выполняются равенства

$$\sin\gamma_k(\lambda)=0,\ \sin\delta_k(\lambda)=0 \tag{34}$$

или

$$\cos\gamma_k(\lambda)=0,\ \cos\delta_k(\lambda)=0, \tag{35}$$

то для любых чисел a и b будет выполняться равенство (33). Тем самым число λ, для которого имеют место (34) или (35), будет собственным числом задачи сопряжения I'.

Пусть для отрицательных чисел α_1 и α_2, для некоторых натуральных чисел l и m, а также для натурального числа k из набора $1,2,\dots,k_0$ выполняются равенство

$$(\pi l)^2\alpha_1+[1+(\pi l)^2]\mu_k=(\pi m)^2\alpha_2+[1+(\pi m)^2]\mu_k$$

и неравенства

$$\mu_{k_0+1}<(\pi l)^2\alpha_1+[1+(\pi l)^2]\mu_k<\mu_{k_0}.$$

Тогда для числа λ, определённого формулой $\lambda=(\pi l)^2\alpha_1+[1+(\pi l)^2]\mu_k$, будут выполняться равенства (34). Тем самым данное число λ будет собственным числом задачи сопряжения I' вне зависимости от чисел a и b.

Пусть теперь для α_1 и α_2, являющихся отрицательными числами, и для натуральных чисел l и m выполняется равенство

$$\pi^2\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\alpha_1+\left[1+\pi^2\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]\mu_k=\pi^2\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\alpha_2+\left[1+\pi^2\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\right]\mu_k,$$

где k есть натуральное число из набора $1,2,\dots,k_0$. Пусть кроме того выполняются неравенства

$$\mu_{k_0+1}<\pi^2\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\alpha_1+\left[1+\pi^2\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]\mu_k<\mu_{k_0}.$$

Тогда для $\lambda=\pi^2(l+1/2)^2\alpha_1+[1+\pi^2(l+1/2)^2]\mu_k$ будут выполняться равенства (35) и число λ будет собственным числом задачи сопряжения I' вне зависимости от чисел a и b.

Замечание 1. Очевидно, что кроме собственных чисел, появляющихся при выполнении равенств (34) или (35), задача сопряжения I' в случае $\lambda\in(-\infty,\mu_1)$ может иметь и другие собственные числа (определяющиеся равенством (33)).

Рассмотрим последний случай, когда λ совпадает с одним из чисел μ_k. Пусть $\lambda=\mu_{k_0}$. Очевидно, что это число будет собственным числом задачи сопряжения I', если выполняется одно из условий:

1) $ab<0$, существует натуральное число k, такое, что $k\le k_0+1$, и для этого числа k выполняется равенство (23);

2) существует натуральное число k, такое, что $1\le k\le k_0$, и для этого числа k выполняется равенство (33);

3) $ab=-1$.

Из всего сказанного выше можно сделать вывод: *для любого действительного числа λ можно подобрать отрицательные числа α_1 и α_2, а также ненулевые числа a и b так, что задача сопряжения I' будет иметь число λ своим собственным числом.*

Построим теперь пример несуществования решений задачи сопряжения I' в случае ненулевого свободного члена.

Пусть α_1, α_2, a, b и λ есть такие числа, что $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$, $ab < 0$, $\lambda \in (\mu_1, \infty)$ и для некоторого натурального числа k_0 выполняется равенство

$$ab = -\varphi_{1,k_0}(\gamma_{k_0}(\lambda))\varphi_{2,k_0}(\gamma_{k_0}(\lambda)) \tag{36}$$

(другими словами, число λ является собственным числом задачи сопряжения I' с данными параметрами α_1, α_2, a и b). Далее, пусть $f(x,t)$ есть заданная функция из пространства $L_2(Q)$. Имеет место представление

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\varphi_k(t),\ f_k(x) = \int\limits_0^T f(x,t)\varphi_k(t)dt.$$

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $v_{k_0}(x)$, являющуюся решением уравнений

$$v''_{k_0} + \frac{\lambda - \mu_{k_0}}{\alpha_1 + \mu_{k_0}} v_{k_0} = 0,\ \ v''_{k_0} + \frac{\lambda - \mu_{k_0}}{\alpha_2 + \mu_{k_0}} v_{k_0} = 0 \tag{37}$$

на интервалах $(-1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно и такую, что для неё выполняются условия

$$v_{k_0}(-1) = v_{k_0}(1) = 0, \tag{38}$$

$$v_{k_0}(-0) = \frac{b(\alpha_2 + \mu_{k_0})}{\alpha_1 + \mu_{k_0}} v_{k_0}(+0),\ v'_{k_0}(+0) = \frac{a(\alpha_1 + \mu_{k_0})}{\alpha_2 + \mu_{k_0}} v'_{k_0}(-0). \tag{39}$$

Поскольку выполняется условие (36), то данная задача имеет ненулевые решения.

Для функций $c_{k_0}(x)$ и $d_{k_0}(x)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{-1}^{0} (\mu_{k_0} c_{k_0} - \mu_{k_0} c''_{k_0} - \alpha_1 c''_{k_0}) v_{k_0}(x) dx + \int\limits_0^1 (\mu_{k_0} d_{k_0} - \mu_{k_0} d''_{k_0} - \alpha_1 d''_{k_0}) v_{k_0}(x) dx = 0 \tag{40}$$

для любого ненулевого решения $v_{k_0}(x)$ задачи (37)–(39). Если теперь предположить, что задача сопряжения I' с ненулевым свободным членом $f(x,t)$ имеет решение, и если будет выполняться условие

$$\int\limits_{-1}^{1} f_{k_0}(x) v_{k_0}(x) dx \neq 0, \tag{41}$$

то получим противоречие с равенством (40). Это противоречие означает, что при выполнении (41) предположение о существовании решения задачи сопряжения I' с ненулевым свободным членом не является верным.

Аналогичные примеры можно построить и для задачи сопряжения I' с ненулевым свободным членом и с собственным числом λ, определяющимся равенством (33) и принадлежащим промежутку $(-\infty, \mu_1)$.

3. Разрешимость задачи сопряжения II

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*

$$\alpha(x) \geq \alpha_0(x) > 0,\ x \in [-1, 1], \tag{42}$$

$$c(x,t)\in C^2(\bar{Q}_1)\cup C^2(\bar{Q}_2),\ c(x,t)\geq 0,\ c'_t(x,t)\leq 0,\ x\in(-1,0)\cup(0,1),\ t\in(0,T),$$
$$c(-0,t)=c(+0,t),\ c_x(-0,t)\leq 0,\ t\in(0,T). \tag{43}$$

Тогда задача сопряжения II не может иметь более одного решения в пространстве V.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ будет решением задачи сопряжения II из пространства V и пусть $f(x,t)\equiv 0$. Умножим уравнение (1) на функцию u_{xxt} в области Q_1 и на γu_{xxt} в области Q_2, затем проинтегрируем и сложим. Получим равенство вида

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} u_{xt}^2(x,t)dx+\frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{1} u_{xt}^2(x,t)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0}\alpha(x)u_{xx}^2(x,t)dx+\frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{1}\alpha(x)u_{xx}^2(x,t)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} u_{xxt}^2(x,t)dx+\frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{1} u_{xxt}^2(x,t)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} c(x,t)u_x^2(x,t)dx+$$

$$+\frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{1} c(x,t)u_x^2(x,t)dx+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} c'_x(x,\tau)uu_{x\tau}dxd\tau+\gamma\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1} c'_x(x,\tau)uu_{x\tau}dxd\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} c'_\tau(x,\tau)u_x^2dxd\tau-\frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1} c'_\tau(x,\tau)u_x^2dxd\tau=0.$$

Из условий теоремы и этого равенства получим единственность задачи сопряжения II. □

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (42), (43),

$$c''_t(x,t)\geq 0,\ x\in(-1,0)\cup(0,1),\ t\in(0,T).$$

Тогда для любой функции $f(x,t)\in L_2(Q)$ задача сопряжения II имеет решение, принадлежащее пространству V.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу: найти решения $\tilde{v}(x,t)$ и $\tilde{w}(x,t)$ уравнений (8), (9), для которых выполняются условия (10), (11), а также условия

$$\tilde{v}(x,0)=\tilde{v}_t(x,0)=0,\ x\in(-1,0), \tag{44}$$

$$\tilde{w}(x,0)=\tilde{w}_t(x,0)=0,\ x\in(-1,0). \tag{45}$$

Чтобы доказать разрешимость этой задачи, вновь воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть λ — число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим задачу: найти функции $\tilde{v}(x,t)\in V(Q_1)$, $\tilde{w}(x,t)\in V(Q_2)$, являющиеся решениями уравнений (14), (15) соответственно и такие, что для них выполняются условия (10), (11), (44) и (45). Очевидно, что при $\lambda=0$ данная задача разрешима. Докажем наличие априорных оценок для функций $\tilde{v}(x,t),\tilde{w}(x,t)$.

Перейдём к уравнениям (18), (19), для которых выполняются условия (10), (11), (20), (21), (44), (45). Заметим, что в этих уравнениях функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$ определяются равенствами (16), (17).

Для начала умножим уравнение (18) на v_{xxt} и проинтегрируем по области Q_1, затем умножим уравнение (19) на γw_{xxt} и проинтегрируем по области Q_2. Сложив два полученных выражения, придём к равенству вида

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} v_{xt}^2(x,t)dx + \frac{\gamma}{2}\int_{0}^{1} w_{xt}^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \alpha(x)v_{xx}^2(x,t)dx+$$

$$+\frac{\gamma}{2}\int_{0}^{1} \alpha(x)w_{xx}^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} v_{xxt}^2(x,t)dx + \frac{\gamma}{2}\int_{0}^{1} w_{xxt}^2(x,t)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} c(x,t)v_x^2(x,t)dx + \frac{\gamma}{2}\int_{0}^{1} c(x,t)w_x^2(x,t)dx + \int_{0}^{t}\int_{-1}^{0} c_x'(x,\tau)vv_{x\tau}dxd\tau+$$

$$+\gamma\int_{0}^{t}\int_{0}^{1} c_x'(x,\tau)ww_{x\tau}dxd\tau - \frac{1}{2}\int_{0}^{t}\int_{-1}^{0} c'_{\tau}(x,\tau)v_x^2dxd\tau - \frac{\gamma}{2}\int_{0}^{t}\int_{0}^{1} c'_{\tau}(x,\tau)w_x^2dxd\tau =$$

$$= \int_{0}^{t}\int_{-1}^{0} f(x,\tau)v_{xx\tau}dxd\tau + \gamma\int_{0}^{t}\int_{0}^{1} f(x,\tau)w_{xx\tau}dxd\tau.$$

Применив в правой части этого равенства неравенство Юнга, получим априорную оценку

$$\int_{-1}^{0}(v_x^2(x,t) + v_{xt}^2(x,t) + v_{xx}^2(x,t) + v_{xxt}^2(x,t))dx+$$

$$+\int_{0}^{1}(w_x^2(x,t) + w_{xt}^2(x,t) + w_{xx}^2(x,t) + w_{xxt}^2(x,t))dx =$$

$$= M_3\left[\int_{0}^{t}\int_{-1}^{0} f^2(x,\tau)dxd\tau + \int_{0}^{t}\int_{0}^{1} f^2(x,\tau)dxd\tau\right], \tag{46}$$

в которой число M_3 определяется константами α_0, a, b и функцией $c(x,t)$.

Теперь умножим (18) на v_{tt} и проинтегрируем по области Q_1, а уравнение (19) умножим на γw_{tt} и проинтегрируем по области Q_2. Сложив затем оба результата, получим равенство

$$\int_{0}^{t}\int_{-1}^{0} v_{\tau\tau}^2dxd\tau + \gamma\int_{0}^{t}\int_{0}^{1} w_{\tau\tau}^2dxd\tau + \int_{0}^{t}\int_{-1}^{0} \alpha(x)v_{xx\tau}w_{\tau}dxd\tau + \gamma\int_{0}^{t}\int_{0}^{1} \alpha(x)w_{xx\tau}w_{\tau}dxd\tau+$$

$$+\int_{-1}^{0} \alpha(x)v_{xx}(x,t)w_t(x,t)dx + \gamma\int_{0}^{1} \alpha(x)w_{xx}(x,t)w_t(x,t)dx + \int_{0}^{t}\int_{-1}^{0} v_{x\tau\tau}^2dxd\tau+$$

$$+\gamma\int_{0}^{t}\int_{0}^{1} w_{x\tau\tau}^2dxd\tau + \int_{0}^{t}\int_{-1}^{0} c(x,\tau)vv_{\tau\tau}dxd\tau + \gamma\int_{0}^{t}\int_{0}^{1} c(x,\tau)ww_{\tau\tau}dxd\tau =$$

$$= \int_0^t \int_{-1}^0 f(x,\tau) v_{\tau\tau} dx d\tau + \gamma \int_0^t \int_0^1 f(x,\tau) w_{\tau\tau} dx d\tau.$$

Используя неравенство Юнга и оценку (46), получим ещё одну априорную оценку

$$\int_0^t \int_{-1}^0 (v_{\tau\tau}^2 + v_{x\tau\tau}^2) dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 (w_{\tau\tau}^2 + w_{x\tau\tau}^2) dx d\tau =$$

$$= M_4 \left[\int_0^t \int_{-1}^0 f^2(x,\tau) dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 f^2(x,\tau) dx d\tau \right], \tag{47}$$

где число M_4 зависит только от α_0, a, b, $c(x,t)$.

Наличие оценок (46) и (47), означает, что задача (8)–(11), (44), (45) имеет решение $\tilde{v}(x,t), \tilde{w}(x,t)$ из $V(Q_1)$ и $V(Q_2)$ соответственно [33, гл. 3, §14]. Зная, что $v(x,t) = \tilde{v}(x,t) + (x+1)aw(+0,t)$, $w(x,t) = \tilde{w}(x,t) + (x-1)bv_x(-0,t)$, определим функцию

$$u(x,t) = \begin{cases} v(x,t), & (x,t) \in Q_1, \\ w(x,t), & (x,t) \in Q_2, \end{cases}$$

которая и будет являться решением задачи сопряжения II.

Теорема доказана. □

Список литературы

1. **Демиденко, Г. В.** Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. — Новосибирск : Науч. кн., 1998.
2. **Kozhanov, A. I.** Composite Type Equations and Inverse Problems / A. I. Kozhanov. — Utrecht : VSP, 1999. — 171 p.
3. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. — М. : Физматлит, 2007. — 736 с.
4. **Корпусов, М. О.** Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях / М. О. Корпусов. — М. : Либроком, 2011.
5. **Уизем, Дж.** Линейные и нелинейные волны : пер. с англ. / Дж. Уизем. — М. : Мир, 1977. — 624 с.
6. **Икези, Х.** Экспериментальное исследование солитонов в плазме / Х. Икези // Солитоны в действии. — М. : Мир, 1981. — С. 163–184.
7. Солитоны и нелинейные волновые явления : пер. с англ. / Р. Долл, Дж. Эйблек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. — М. : Мир, 1988. — 694 с.
8. **Ладыженская, О. А.** О решении общей задачи дифракции / О. А. Ладыженская // Докл. АН СССР. — 1954. — Т. 96, № 3. — С. 433–436.
9. **Лонгрен, К.** Экспериментальные исследования солитонов в нелинейных линиях передачи с дисперсией / К. Лонгрен // Солитоны в действии. — М. : Мир, 1981. — С. 138–162.
10. **Chen, G.** Existence and nonexistence of global solutions for the generalized IMBq equation / G. Chen, S. Wang // Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications. — 1999. — Vol. 36, no. 8. — P. 961–980.
11. **Wang, S.** Small amplutude solutions of the generalized IMBq equation / S. Wang, G. Chen // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2002. — Vol. 274, no. 2. — P. 846—866.

12. **Замышляева, А. А.** Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска — Лява / А. А. Замышляева, А. В. Юзеева // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2010. — № 5. — С. 23–31.
13. **Xu, R.** Global existence and blow-up of solutions for generalized Pochhammer — Chree equations / R. Xu, Y. Liu // Acta Mathematica Scientia. Ser. B. — 2010. — Vol. 30, no. 5. — P. 1793–1807.
14. **Замышляева, А. А.** Начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссинеска — Лява / А. А. Замышляева // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2011. — № 10. — С. 22–29.
15. **Уткина, Е. А.** Задача Дирихле для одного уравнения четвертого порядка / Е. А. Уткина // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 4. — С. 600–604.
16. **Уткина, Е. А.** Теорема единственности решения одной задачи Дирихле / Е. А. Уткина // Изв. вузов. Математика. — 2011. — № 5. — С. 62–67.
17. **Замышляева, А. А.** Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска — Лява / А. А. Замышляева, О. Н. Цыпленкова // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2012. — № 11. — С. 13–24.
18. **Плеханова, М. В.** Задачи с жестким смешанным управлением для линеаризованного уравнения Буссинеска / М. В. Плеханова, А. Ф. Исламова // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 4. — С. 565–576.
19. **Пулькина, Л. С.** Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений / Л. С. Пулькина. — Самара : Изд-во Самар. ун-та, 2012.
20. **Амиров, Ш.** Глобальная разрешимость начально-краевых задач для некоторых нелинейных аналогов уравнения Буссинеска / Ш. Амиров, А. И. Кожанов // Мат. заметки. — 2016. — Т. 99, вып. 2. — С. 171–180.
21. **Намсараева, Г. В.** Обратные задачи определения внешних источников в уравнении распространения продольных волн / Г. В. Намсараева // Сиб. журн. индустр. математики. — 2016. — Т. 19, № 3 (67). — С. 28–40.
22. **Ильин, В. А.** О разрешимости задач Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 137, № 1. — С. 28–30.
23. **Олейник, О. А.** Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типов с разрывными коэффициентами / О. А. Олейник // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1961. — Т. 25, вып. 1. — С. 3–20.
24. **Кулешов, А. А.** Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня со свободным либо закреплённым правым концом, состоящего из двух участков разной плотности и упругости / А. А. Кулешов // Докл. Акад. наук. — 2012. — Т. 442, № 4. — С. 451–454.
25. **Рогожников, А. М.** Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами / А. М. Рогожников // Докл. Акад. наук. — 2012. — Т. 444, № 5. — С. 488–491.
26. **Смирнов, И. Н.** О колебаниях, описываемых телеграфным уравнением в случае системы, состоящей из нескольких участков разной плотности и упругости / И. Н. Смирнов // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 5. — С. 643–648.
27. **Шубин, В. В.** Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом / В. В. Шубин // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 126–138.
28. **Potapova, S. V.** Boundary value problems for pseudoparabolic equations with a variable time direction / S. V. Potapova // Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. — 2012. — Т. 3, № 1. — С. 73.

29. **Кожанов, А. И.** Задача Дирихле для одного класса уравнений составного типа с разрывным коэффициентом при старшей производной / А. И. Кожанов, С. В. Потапова // Дальневост. мат. журн. — 2014. — Т. 14, № 1. — С. 48–65.
30. **Кожанов, А. И.** Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка. II / А. И. Кожанов, Е. Ф. Шарин // Мат. заметки Сев-Вост. федер. ун-та. — 2014. — Т. 21, № 1. — С. 18–28.
31. **Кожанов, А. И.** Задача сопряжения для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, со знакопостоянной функцией при старшей производной / А. И. Кожанов, С. В. Потапова // Сиб. журн. чистой и приклад. математики. — 2015. — Т. 15, № 2. — С. 51–59.
32. **Кожанов, А. И.** Задача сопряжения для дифференциальных уравнений нечётного порядка с двумя временными переменными и с меняющимся направлением эволюции / А. И. Кожанов, С. В. Потапова // Докл. Акад. наук. — 2017. — Т. 474, № 6. — С. 661–664.
33. **Треногин, В. А.** Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М. : Физматлит, 2007. — 488 с.

Поступила в редакцию 22.04.2018
После переработки 30.06.2018

Сведения об авторе

Григорьева Александра Ивановна, старший преподаватель кафедры высшей математики, Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; e-mail: shadrina_ai@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2018. Vol. 3, iss. 3. P. 276–294.

DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13302

THE CONJUGATION PROBLEMS FOR SOME ANALOGUES OF THE EQUATION OF LONGITUDINAL WAVES WITH A DISCONTINUOUS COEFFICIENT

A.I. Grigoreva

M. K. Ammosov North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russia
shadrina_ ai@mail.ru

It is studied the solvability of conjugation problems for a composite type equation with a discontinuous coefficient. In the first case it is considered the elliptic problem and in the second — an initial-boundary problem. By the method of continuation with respect to a parameter, existence and uniqueness theorems for regular solutions are proved. Also, various examples of the nonuniqueness of the existence of solutions are given, depending on how the discontinuous function behaves in one or another given region.

Keywords: *discontinuous coefficient, conjugation problem, regular solution, existence and uniqueness of a solution, method of parameter extension, apriory estimate.*

References

1. **Demidenko G.V., Uspenskii S.V.** *Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative.* New York, Basel, Hong Kong, Marcel Dekker Inc., 2003. 632 p.
2. **Kozhanov A.I.** *Composite Type Equations and Inverse Problems.* Utrecht, VSP, 1999. 171 p.
3. **Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D.** *Lineynye i nelineynye uravneniya sobolevskogo tipa* [Linear and nonlinear Sobolev type equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 736 p. (In Russ.).
4. **Korpusov M.O.** *Razrusheniye v neklassicheskikh nelokal'nykh uravneniyakh* [Blow-up in nonclassical nonlocal equations]. Moscow, Librokom Publ., 2011. (In Russ.).
5. **Witham G.B.** *Linear and Nonlinear Waves.* New York, London, Sidney, Toronto, Whiley & Sons, 1974. 638 p.
6. **Ikezi H.** Eksperimental'noye issledovaniye solitonov v plazme [Experimental study of solitons in plasma]. *Solitony v deystvii* [Solitons in action]. Moscow, Mir Publ., 1981. Pp. 163–184. (In Russ.).
7. **Doll R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C.** *Solitons and Nonlinear Wave Equations.* London et al., Academic Press, 1982. 630 p.
8. **Ladyzhenskaja O.A.** O reshenii obshchey zadachi difraktsii [On solution of general difraction problem]. *Doklady AN SSSR* [Reports of USSR Academy of Sciences], 1954, vol. 96, no. 3, pp. 433–436. (In Russ.).
9. **Longren K.** Eksperimental'nye issledovaniya solitonov v nelineynykh liniyakh peredachi s dispersiey [Experimental studies of solitons in nonlinear transmisson lines with dispersion]. *Solitony v deystvii* [Solitons in action]. Moscow, Mir Publ., 1981. Pp. 138–162. (In Russ.).
10. **Chen G., Wang S.** Existence and nonexistence of global solutions for the generalized IMBq equation. *Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications*, 1999, vol. 36, no. 8, pp. 961–980.
11. **Wang S., Chen G.** Small amplutude solutions of the generalized IMBq equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2002, vol. 274, no. 2, pp. 846–866.

12. **Zamyshlyaeva A.A., Yuzeeva A.V.** Nachal'no-konechnaya zadacha dlya uravneniya Bussineska — Lyava [Initial-final value problem for Boussinesq — Love equation]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematicheskoye modelirovaniye i programmirovaniye* [Bulletin of South Ural State University. Series: Mathematical modelling and programming], 2010, no. 5, pp. 23–31. (In Russ.).
13. **Xu R., Liu Y.** Global existence and blow-up of solutions for generalized Pochhammer — Chree equations. *Acta Mathematica Scientia. Ser. B*, 2010, vol. 30, no. 5, pp. 1793–1807.
14. **Zamyshljaeva A.A.** Nachal'no-konechnaya zadacha dlya neodnorodnogo uravneniya Bussineska — Lyava [Initial-final problem for inhomogeneous Boussinesq — Love equation]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematicheskoye modelirovaniye i programmirovaniye* [Bulletin of South Ural State University. Series: Mathematical modelling and programming], 2011, no. 10, pp. 22–29. (In Russ.).
15. **Utkina E.A.** Dirichlet problem for a forth-order equation. *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 4, pp. 599–603.
16. **Utkina E.A.** A uniqueness theorem for solution of one Dirichlet problem. *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, iss. 5, pp. 51–55.
17. **Zamyshlyaeva A.A., Tsyplenkova O.N.** Optimal'noye upravleniye resheniyami nachal'no-konechnoy zadachi dlya uravneniya Bussineska — Lyava [Optimal control of solutions to initial-final value problem for Boussinesq — Love equation]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematicheskoye modelirovaniye i programmirovaniye* [Bulletin of South Ural State University. Series: Mathematical modelling and programming], 2012, no. 11, pp. 13–24. (In Russ.).
18. **Plekhanova M.V., Islamova A.F.** Problems with a robust mixed control for the linearized Boussinesq equation. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 4, pp. 574–585.
19. **Pul'kina L.S.** *Zadachi s neklassicheskimi usloviyami dlya giperbolicheskikh uravneniy* [Problems with nonclassical conditions for hyperbolic equations]. Samara, Samara University Publ., 2012. (In Russ.).
20. **Amirov Sh., Kozhanov A.I.** Global solvability of initial boundary-value problems for nonlinear analogs of the Boussinesq equation. *Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, iss. 1–2, pp. 183–190.
21. **Namsaraeva G.V.** Inverse problems of recovering external sources in the equation of longitudinal wave propagation. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2016, vol. 10, iss. 3, pp. 386–396.
22. **Il'in V.A.** O razreshimosti zadach Dirikhle i Neymana dlya lineynogo ellipticheskogo operatora s razryvnymi koeffitsientami [On solvability of Dirichlet and Neumann problems for linear elliptic operator with discontinuous coefficients]. *Doklady AN SSSR*, 1961, vol. 137, no. 1, pp. 28–30. (In Russ.).
23. **Oleynik O.A.** Krayevye zadachi dlya lineynykh uravneniy ellipticheskogo i parabolicheskogo tipov s razryvnymi koeffitsientami [Boundary value problems for linear equations of elliptic and parabolic types with discontinuous coefficients]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya Matematicheskaya* [News of USSR Academy of Sciences. Ser. Mathematical], 1961, vol. 25, iss. 1, pp. 3–20. (In Russ.).
24. **Kuleshov A.A.** Mixed problems for the equation of longitudinal vibrations of a heterogeneous rod with a free or fixed right end consisting of two segments with different densities and elasticities. *Doklady Mathematics*, 2012, vol. 85, no. 1, pp. 80–82.
25. **Rogozhnikov A.M.** Studying of a mixed problem describing the oscillations of a rod consisting of several segments with arbitrary lenghts. *Doklady Mathematics*, 2012, vol. 85, no. 3, pp. 399–402.
26. **Smirnov I.N.** On the vibrations described by the telegraph equation in the case of a system consisting of several parts of different densities and elasticities. *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 5, pp. 617–622.

27. **Shubin V.V.** Boundary value problems for third order equations with discontinuous coefficient. *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 198, iss. 5, pp. 637–647.
28. **Potapova S.V.** Boundary value problems for pseudoparabolic equations with a variable time direction. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 2012, vol. 3, no. 1, p. 73.
29. **Kozhanov A.I., Potapova S.V.** Zadacha Dirikhle dlya odnogo klassa uravneniy sostavnogo tipa s razryvnym koeffitsientom pri starshey proizvodnoy [Dirichlet problem for a class of composite type equations with discontinuous coefficient at the highest order derivative]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal* [Far East mathematical journal], 2014, vol. 14, no. 1, pp. 48–65. (In Russ.).
30. **Kozhanov A.I., Sharin E.F.** Zadacha sopryazheniya dlya nekotorykh neklassicheskikh differentsial'nykh uravneniy vysokogo poryadka. II. *Matematicheskiye zametki Severo-Vostochnogo federal'nogo universiteta* [Mathematical notes of North-Eastern Federal University], 2014, vol. 21, no. 1, pp. 18–28. (In Russ.).
31. **Kozhanov A.I., Potapova S.V.** Conjugate problem for a third order equation with multiple characteristics and a positive function at the higher order derivative. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 215, iss. 4, pp. 510–516.
32. **Kozhanov A.I., Potapova S.V.** Transmission problem for odd-order differential equations with two time variables and a varying direction of evolution. *Doklady Mathematics*, 2017, vol. 95, no. 3, pp. 267–269.
33. **Trenogin V.A.** *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 488 p. (In Russ.).

Accepted article received 22.04.2018
Corrections received 30.06.2018