МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3, вып. 1. С. 5–26.

УДК 517.956

БЕСКОНЕЧНОМЕРНАЯ И КОНЕЧНОМЕРНАЯ ε-УПРАВЛЯЕМОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Д. М. Гордиевских[1,a], **В. Е. Федоров**[2,b], **М. М. Туров**[2,c]

[1] *Шадринский государственный педагогический университет, Шадринск, Курганская обл., Россия*
[2] *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
[a] *dm_gordiev@mail.ru*, [b] *kar@csu.ru*, [c] turov_m_m@mail.ru

Исследованы вопросы ε-управляемости линейных слабо вырожденных эволюционных систем управления дробного порядка с распределёнными параметрами. Рассмотрен случай 0-ограниченной пары операторов, задающих систему. Использование вместо условий Коши обобщённых условий Шоуолтера — Сидорова для однозначного задания исходного состояния системы позволило существенно упростить техническую часть исследования. Найдены критерии и удобные в приложениях достаточные условия ε-управляемости за время T и за свободное время систем указанного класса в случае бесконечномерного и конечномерного входа. Показано, что для конечномерной ε-управляемости системы необходима конечномерность её подпространства вырождения. Полученные результаты проиллюстрированы на примерах систем управления, описываемых дифференциальными уравнениями и системами уравнений, не разрешимыми относительно дробной производной по времени.

Ключевые слова: *управляемость, ε-управляемость, вырожденное эволюционное уравнение, дробная производная Герасимова — Капуто.*

Введение

Рассмотрим вопросы ε-управляемости для распределённых систем управления, динамика которых описывается уравнением

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + Bu(t) + y(t), \tag{1}$$

т. е. изучим возможность приведения траектории решения уравнения (1) посредством выбора функции управления $u(\cdot)$ из любого заданного состояния в ε-окрестность произвольной выбранной точки при всяком $\varepsilon > 0$. Здесь $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{U}$ — банаховы пространства, заданы линейные операторы $L, M : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $\ker L \neq \{0\}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ и функция $y : [0, T] \to \mathcal{Y}$, D_t^α — дробная производная Герасимова — Капуто. Учитывая специфику вырожденного ($\ker L \neq \{0\}$) эволюционного уравнения, начальное состояние будем определять не условиями Коши, а обобщёнными условиями Шоуолтера — Сидорова

$$(Px)^{(k)}(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2}$$

$m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, проектор P на пространстве $\mathcal{X}$ будет определён далее.

Говоря о системе управления, описываемой уравнением (1), для краткости будем использовать термин система управления (1) или система (1).

Если оператор L непрерывно обратим, то уравнение (1) может быть представлено в форме, разрешённой относительно производной: $D_t^\alpha x(t) = Sx(t)+B_1u(t)+y_1(t)$. Управляемость (или ε-управляемость) систем управления, описываемых такими уравнениями, вообще говоря, в банаховых пространствах, в том числе с зависящими от t операторами $S := L^{-1}M$, B в случае $\alpha = 1$ исследовалась в работах R. E. Kalman, Y. C. Ho, K. S. Narendra [1], H. O. Fattorini [2], Н. Н. Красовского [3], А. Б. Куржанского [4], R. Triggiani [5], D. Salamon [6], Б. Шкляра [7] и многих других авторов (см. также обзоры [8–10]). Для дробных α см. работы D. Baleanu, A. Debbouche [11; 12], D. N. Chalishajar [13], В. В. Обуховского, Г. Г. Петросяна [14], Y. Zhou [15] и др.

Для различных классов уравнения (1) порядка $\alpha = 1$ в случае $\ker L \neq \{0\}$ вопросы управляемости исследовались в работах В. Е. Федорова, О. А. Рузаковой, М. В. Плехановой [16–22]. Управляемость уравнения (1) дробного порядка α, не разрешённого относительно производной, изучалась, например, в работах [23–26]. Однако, как правило, оператор L в них предполагается непрерывно и даже компактно обратимым, т. е. рассматривается невырожденное уравнение (1).

Уравнение (1) дробного порядка $\alpha > 0$ в данной работе рассматривается в случае $\ker L \neq \{0\}$ при условии $(L,0)$-ограниченности оператора M [27]. В этой ситуации уравнение может быть редуцировано к двум уравнениям на взаимно дополняющих друг друга подпространствах. Одно из них, на подпространстве $\mathcal{X}^1$, имеет вид

$$D_t^\alpha x^1(t) = Sx^1(t) + B_1u(t) + y_1(t), \tag{3}$$

т. е. оно разрешено относительно дробной производной. Другое уравнение, на подпространстве вырождения $\ker L = \mathcal{X}^0$, является алгебраическим:

$$0 = x^0(t) + B_0u(t) + y_0(t). \tag{4}$$

Мы будем говорить о невырожденной подсистеме (3) и вырожденной подсистеме (4) исходной системы (1). Так как в случае $(L,0)$-ограниченного оператора M подпространство вырождения $\mathcal{X}^0$ минимально и совпадает с ядром оператора L, соответствующее уравнение (1) будем называть слабо вырожденным, в отличие от сильно вырожденного уравнения, когда подпространство вырождения содержит также M-присоединённые векторы оператора L высоты не больше p (случай (L,p)-ограниченного оператора L при $p \in \mathbb{N}$, см. [27]).

Свойства подсистемы (4) определяют особенности всей вырожденной системы (1). Действительно, решение вырожденной подсистемы (4) не зависит от начальных данных $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ при $t > 0$, при этом уравнение (4) однозначно разрешимо без задания начальных условий. При использовании условий Коши это влечёт к необходимости согласования значений функций управления в начальный момент времени с проекциями начальных данных $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ на подпространство вырождения. Этого можно избежать, если вместо начальных данных для всего решения задавать начальные данные для его проекции на подпространство $\mathcal{X}^1$, т. е. использовать условия (2). Использование для задания исходного состояния системы обобщённых условий Шоуолтера — Сидорова вместо начальных условий Коши позволило существенно упростить техническую часть исследования вопросов ε-управляемости системы (1) (см. [28]).

В данной работе исследованы вопросы ε-управляемости за время T и ε-управляемости за свободное время системы, описываемой уравнением (1). Главными результатами являются необходимые и достаточные условия ε-управляемости уравнения (1) в терминах операторов L, M, B. Использование этих условий при изучении ε-управляемости конкретных вырожденных распределённых систем управления дробного порядка по времени, не разрешимых относительно дробной производной по времени, продемонстрировано на примерах.

Как частный случай получен критерий ε-управляемости системы (1) в ситуации, когда $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $b_i \in \mathcal{Y}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $Bu(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i u_i(t)$, т. е. для системы

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i(t) + y(t). \tag{5}$$

Она называется системой управления с конечномерным входом. Задачи управляемости для системы (1) в случае $\alpha = 1$ изучались в работах [17; 18; 21; 22; 28]. В данной работе доказан существенный факт, что в случае систем управления с конечномерным входом необходимым условием ε-управляемости системы (1) при $\alpha > 0$ является конечномерность подпространства вырождения. Рассмотрены примеры ε-управляемых систем с конечномерным входом, описываемых уравнениями в частных производных, не разрешимыми относительно дробной производной по времени, и систем, не являющихся ε-управляемыми. Исследована вырожденная двумерная система управления с одномерным входом, найдены необходимые и достаточные условия её одномерной управляемости.

1. Обобщённая задача Шоуолтера — Сидорова для слабо вырожденного эволюционного уравнения

Сначала опишем свойства (L, σ)-ограниченных операторов и разрешимость неоднородного уравнения с такими операторами. Соответствующие доказательства могут быть найдены в работах [27; 29–31].

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, $\mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определённых в пространстве $\mathcal{X}$, действующих в $\mathcal{Y}$, $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{X}) := \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $\mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{X}) := \mathcal{C}l(\mathcal{X})$.

Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ имеет область определения D_M. При необходимости будем рассматривать D_M как банахово пространство с нормой графика оператора M. Введём также обозначения $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ := \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, $\rho^L(M) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})\}$, $\sigma^L(M) := \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$, $R_\mu^L(M) := (\mu L - M)^{-1} L$, $L_\mu^L(M) := L(\mu L - M)^{-1}$.

Оператор M называется (L, σ)-*ограниченным*, если при некотором $a > 0$ $\sigma^L(M) \subset \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq a\}$. При условии (L, σ)-ограниченности оператора M существуют проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma L_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}),$$

где $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = a + 1\}$. Обозначим через $\mathcal{X}^0$ ($\mathcal{Y}^0$) ядро $\ker P$ ($\ker Q$), а через $\mathcal{X}^1$ ($\mathcal{Y}^1$) — образ $\mathrm{im} P$ ($\mathrm{im} Q$) проектора P (Q). Пусть M_k (L_k) — сужение оператора M (L) на $D_{M_k} = \mathcal{X}^k \cap D_M$ ($\mathcal{X}^k$), $k = 0, 1$.

При $\alpha, \beta > 0$ мы будем использовать функцию Миттаг-Лёффлера

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}.$$

Далее аргументом этой функции будет непрерывный оператор $z \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Сходимость ряда будет пониматься в смысле сходимости в норме пространства $\mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Теорема 1. [27; 29; 30]. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда*
(i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;
(ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k; \mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^0; \mathcal{Y}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$;
(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$;
(iv) *при* $\alpha, \beta > 0$ *семейство операторов*

$$X_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_\mu^L(M) E_{\alpha,\beta}(\mu t^\alpha) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$$

аналитично на $\mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} t \le 0\}$, *кроме того,* $X_{\alpha,\beta}(t) = E_{\alpha,\beta}(L_1^{-1} M_1 t^\alpha) P$.

При $p \in \mathbb{N}_0$ оператор M называется (L,p)-*ограниченным*, если он (L,σ)-ограничен и при этом $G^p \ne 0$, $G^{p+1} = 0$, где $G = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0)$. Далее мы будем рассматривать случай $p = 0$, когда $L_0 = 0$, или, другими словами, $\ker P = \ker L$. Известно, что в этом случае оператор L не имеет M-присоединённых векторов [27].

При $\beta > 0$, $t > 0$ обозначим $g_\beta(t) = t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$, где $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция Эйлера в точке β. Дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\beta > 0$ определяется формулой

$$J_t^\beta x(t) = \int_0^t g_\beta(t-s) x(s) ds = \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} x(s) ds, \quad t > 0.$$

Дробная производная Герасимова — Капуто [32; 33] порядка $\alpha > 0$ определяется как

$$D_t^\alpha z(t) = D_t^m J_t^\alpha \left(z(t) - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(0) g_{k+1}(t) \right).$$

Рассмотрим обобщённую задачу Шоуолтера — Сидорова

$$(Px)^{(k)}(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{6}$$

для уравнения

$$D_t^\alpha L x(t) = M x(t) + y(t), \quad t \in [0, T]. \tag{7}$$

Здесь $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$. *Решением задачи* (6), (7) на отрезке $[0, T]$ называется функция $x \in C([0,T]; D_M)$, такая, что $Lx \in C^{m-1}([0,T]; \mathcal{Y})$,

$$J_t^{m-\alpha} \left(Lx - \sum_{k=0}^{m-1} (Lx)^{(k)}(0) g_{k+1} \right) \in C^m([0,T]; \mathcal{Y}),$$

выполняются условия (6) и равенство (7).

Теорема 2. [30; 31]. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен, $y \in C([0,T];\mathcal{Y})$, $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = 0,1,\ldots,m-1$. Тогда существует единственное решение задачи* (6), (7). *При этом оно имеет вид*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k X_{\alpha,k+1}(t)x_k + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} X_{\alpha,\alpha}(t-s)L_1^{-1}Qy(s)ds - M_0^{-1}(I-Q)y(t).$$

Заметим, что существование производной порядка α по определению требуется от функции $Lx(\cdot)$, но не от $x(\cdot)$, поэтому существование такой производной не требуется от функции $M_0^{-l}(I-Q)y(\cdot)$, чьи значения лежат в $\ker L$.

2. О связи между ε-управляемостью вырожденной системы и её подсистем

Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен. Функции управления $u(\cdot)$ для системы описываемой обобщённой задачей Шоуолтера — Сидорова

$$(Px)^{(k)}(0) = x_k, \quad k = 0,1,\ldots,m-1, \tag{8}$$

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + Bu(t) + y(t) \tag{9}$$

будут выбираться из пространства $C([0,T];\mathcal{U})$. С помощью теоремы 1 задача (8), (9) может быть редуцирована к начальной задаче

$$x^{1(k)}(0) = x_k, \quad k = 0,1,\ldots,m-1,$$

для системы уравнений

$$D_t^\alpha x^1(t) = Sx^1(t) + L_1^{-1}QBu(t) + L_1^{-1}Qy(t), \tag{10}$$

$$0 = x^0(t) + M_0^{-1}(I-Q)Bu(t) + M_0^{-1}(I-Q)y(t), \tag{11}$$

заданных на подпространствах $\mathcal{X}^1$ и $\mathcal{X}^0$ соответственно. Здесь $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1)$, $x^1(t) = Px(t)$, $x^0(t) = (I-P)x(t)$.

Замечание 1. В соответствии с теоремой 2 (см. также [30; 31]) единственным решением задачи Коши для уравнения (10) является функция

$$x^1(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k X_{\alpha,k+1}(t)x_k + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} X_{\alpha,\alpha}(t-s)L_1^{-1}Q(Bu(s)+y(s))ds,$$

а решение уравнения (11) есть $x^0(t) = -M_0^{-1}(I-Q)(Bu(t)+y(t))$.

Обозначим через $x(T;\overline{x};u)$ значение в момент времени T решения задачи (8), (9) с начальными данными $\overline{x} = (x_0,x_1,\ldots,x_{m-1})$ в условиях (8) и с функцией управления u. Обозначим также через $x^1(T;\overline{x};u)$ значение в момент времени T решения задачи Коши для системы (10), а через $x^0(T;u)$ — значение при $t = T$ решения уравнения (11). При этом учитывается, что решение уравнения (11) не зависит от начальных данных.

Система (9) называется ε-управляемой за время $T > 0$, если при любых $\varepsilon > 0$, $\hat{x} \in \mathcal{X}$, $\overline{x} = (x_0,x_1,\ldots,x_{m-1}) \in (\mathcal{X}^1)^m$ в условиях (8) существует такая функция управления $u \in C([0,T];\mathcal{U})$, что $\|x(T;\overline{x};u) - \hat{x}\|_{\mathcal{X}} \le \varepsilon$.

Система (10) называется ε-управляемой за время $T > 0$, если при любых $\varepsilon > 0$, $\hat{x} \in \mathcal{X}^1$, $\overline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) \in (\mathcal{X}^1)^m$ в начальных условиях Коши существует такая функция управления $u \in C([0,T];\mathcal{U})$, что $\|x^1(T;\overline{x};u) - \hat{x}\|_{\mathcal{X}^1} \le \varepsilon$.

Система (11) называется ε-управляемой за время $T > 0$, если при любых $\varepsilon > 0$, $\hat{x} \in \mathcal{X}^0$ существует такая функция управления $u \in C([0,T];\mathcal{U})$, что выполняется неравенство $\|x^0(T;u) - \hat{x}\|_{\mathcal{X}^0} \le \varepsilon$.

Следующий результат показывает, что, управляя одновременно двумя системами (10) и (11) посредством одной и той же функции $u(\cdot)$, мы, тем не менее, можем одновременно привести траектории обеих систем в ε-окрестности заданных точек.

Теорема 3. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен, $y \in C([0,T];\mathcal{Y})$. Тогда система* (9) *$\varepsilon$-управляема за время T, если и только если системы* (10) *и* (11) *ε-управляемы за время T.*

Доказательство. Прямое утверждение теоремы очевидно, так как система (9) распадается на две подсистемы (10) и (11) на взаимно дополнительных подпространствах. Докажем обратное утверждение теоремы. Пусть при любых $\hat{x}^0 \in \mathcal{X}^0$, $\varepsilon > 0$ существует такое $u^0 \in C([0,T];\mathcal{U})$, что

$$\left\|-M_0^{-1}(I-Q)Bu^0(T) - M_0^{-1}(I-Q)y(T) - \hat{x}^0\right\|_{\mathcal{X}} \le \varepsilon/3,$$

при этом

$$\forall \overline{x} \in (\mathcal{X}^1)^m \ \forall \hat{x}^1 \in \mathcal{X}^1 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists u^1 \in C([0,T];\mathcal{U}) \ \left\|x^1(T;\overline{x};u^1) - \hat{x}^1\right\|_{\mathcal{X}} \le \varepsilon/3.$$

Выберем $u(t) = u^1(t)$ при $t \in [0, T-\delta]$,

$$u(t) = \frac{T-t}{\delta}u^1(T-\delta) + \frac{t-T+\delta}{\delta}u^0(T), \quad t \in [T-\delta, T],$$

тогда $u \in C([0,T];\mathcal{U})$, $u(T) = u^0(T)$. Заметим, что при всех $t \in [T-\delta, T]$ выполняется неравенство $\|u(t)\| \le \|u^1(T-\delta)\|_{\mathcal{U}} + \|u^0(T)\|_{\mathcal{U}}$. Пусть

$$\delta \le \frac{\varepsilon}{3\max\limits_{s\in[0,T]} s^{\alpha-1}\|X_{\alpha,\alpha}(s)L_1^{-1}QB\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{X}^1)}(2\max\limits_{t\in[0,T]}\|u^1(t)\|_{\mathcal{U}} + \|u^0(T)\|_{\mathcal{U}})},$$

тогда

$$\|x(T;\overline{x};u) - \hat{x}\|_{\mathcal{X}} \le \|x^0(T;u^0) - \hat{x}^0\|_{\mathcal{X}} + \|x^1(T;\overline{x};u^1) - \hat{x}^1\|_{\mathcal{X}} +$$

$$+ \|x^1(T;\overline{x};u) - x^1(T;\overline{x};u^1)\|_{\mathcal{X}} \le$$

$$\le 2\varepsilon/3 + \left\|\int\limits_{T-\delta}^{T}(T-s)^{\alpha-1}X_{\alpha,\alpha}(T-s)L_1^{-1}QB(u(s) - u^1(s))ds\right\|_{\mathcal{X}} \le$$

$$\le 2\varepsilon/3 + \max_{s\in[0,T]} s^{\alpha-1}\|X_{\alpha,\alpha}(s)L_1^{-1}QB\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{X}^1)} \max_{t\in[0,T]}(\|u^1(t)\|_{\mathcal{U}} + \|u(t)\|_{\mathcal{U}})\delta \le$$

$$\le 2\varepsilon/3 + \max_{s\in[0,T]} s^{\alpha-1}\|X_{\alpha,\alpha}(s)L_1^{-1}QB\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{X}^1)}(2\max_{t\in[0,T]}\|u^1(t)\|_{\mathcal{U}} + \|u^0(T)\|_{\mathcal{U}})\delta \le \varepsilon.$$

$\square$

3. Соотношения между различными понятиями ε-управляемости

Введём другие определения управляемости, аналогичные тем, которые активно используются при исследовании линейных систем вида (10) (см., например, [7; 9]).

Система (9) называется *ε-управляемой в нуль за время* $T>0$, если при любых $\overline{x}\in(\mathcal{X}^1)^m$, $\varepsilon>0$ найдётся такое $u\in C([0,T];\mathcal{U})$, что $\|x(T;\overline{x};u)\|_{\mathcal{X}}\le\varepsilon$. Она называется *управляемой в нуль за время* $T>0$, если при всех $\overline{x}\in(\mathcal{X}^1)^m$ существует такое $u\in C([0,T];\mathcal{U})$, что $x(T;\overline{x};u)=0$.

Система (9) называется *ε-управляемой из нуля за время* $T>0$, если для всех $\hat{x}\in\mathcal{X}$, $\varepsilon>0$ существует управление $u\in C([0,T];\mathcal{U})$, такое, что справедливо неравенство $\|x(T;\overline{0};u)-\hat{x}\|_{\mathcal{X}}\le\varepsilon$. Здесь $\overline{0}=(0,0,\ldots,0)$ (m компонент). Система называется *управляемой из нуля за время* $T>0$, если для всех $\hat{x}\in\mathcal{X}$ найдётся такое $u\in C([0,T];\mathcal{U})$, что $x(T;\overline{0};u)=\hat{x}$.

Аналогичные понятия для систем (10), (11) определяются таким же образом. Понятно, что из управляемости (того или иного вида) системы следует её соответствующая ε-управляемость.

Установим соотношения между различными понятиями ε-управляемости системы (9) и её подсистем (10), (11), временно условившись называть введённое в предыдущем параграфе понятие ε-управляемостью из любой точки в любую, а при $\varepsilon=0$ — управляемостью или точной управляемостью из одной точки в другую.

Предложение 1. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен. Тогда система* (10) *ε-управляема (управляема) из нуля за время T в том и только в том случае, когда она ε-управляема (управляема) из любой точки в любую за время T.*

Доказательство. Обозначим $\widetilde{x}=\hat{x}-\sum\limits_{k=0}^{m-1}T^kX_{\alpha,k+1}(T)x_k$. Тогда в силу замечания 1 $x(T;\overline{x};u)-\hat{x}=x(T;\overline{0};u)-\widetilde{x}$. Произвольность величины $\hat{x}\in\mathcal{X}^1$ означает произвольность $\widetilde{x}\in\mathcal{X}^1$, и наоборот. Поэтому понятия ε-управляемости (управляемости) из нуля и ε-управляемости (управляемости) из любой точки в любую в данном случае эквивалентны. □

Предложение 2. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен, $T>0$. Тогда система* (11) *ε-управляема (управляема) из любой точки в любую за время T в том и только в том случае, когда она ε-управляема (управляема) из нуля за время T.*

Доказательство. Согласно замечанию 1 решение подсистемы (11) в момент времени $T>0$ не зависит от начального состояния системы. □

Предложение 3. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен, $T>0$. Тогда система* (9) *ε-управляема (управляема) из любой точки в любую за время T в том и только в том случае, когда она ε-управляема (управляема) из нуля за время T.*

Доказательство. Прямое утверждение очевидно. Чтобы доказать обратное, заметим, что, как показано в теореме 3, ε-управляемость системы (9) эквивалентна ε-управляемости каждой из подсистем (10) и (11). Используя предложения 1 и 2, получим требуемое. □

Предложение 4. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен. Тогда из управляемости в нуль за время T системы* (11) *не следует её ε-управляемость из любой точки в любую за время T.*

Доказательство. Очевидно, что, например, ε-управляемость системы (11) в нуль за время T или её отсутствие зависит от соотношения между $\mathrm{im}(I-Q)B$ и величиной $(I-Q)y(T)$, в то время как на наличие ε-управляемости системы (11) из любой точки в любую за время T значение $(I-Q)y(T)$ не влияет.

Возьмём тривиальный случай $B = \mathbb{O}$, $y \equiv 0$. Тогда система (11) управляема (и тем более ε-управляема) в нуль, но не ε-управляема из любой точки в любую при любом T. □

С учётом теоремы 3 получим следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен. Тогда из управляемости в нуль за время T системы* (9) *не следует её ε-управляемость из любой точки в любую за время T.*

Полученные в этом параграфе утверждения позволяют ограничиться в дальнейшем только исследованием ε-управляемости из любой точки в любую за время T, которую, как и в предыдущих разделах, мы будем называть просто ε-управляемостью за время T.

4. Критерий ε-управляемости за время T

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $\mathcal{A}$ — некоторое множество индексов, $\alpha \in \mathcal{A}$, $D_\alpha \subset \mathcal{Z}$. Через $\mathrm{span}\{D_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ обозначим линейную оболочку множеств D_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, а через $\overline{\mathrm{span}}\{D_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ — её замыкание в $\mathcal{Z}$. Через $\overline{\mathrm{im}}A$ будем обозначать замыкание образа $\mathrm{im}A$ оператора $A : D_A \to \mathcal{Z}$.

Лемма 1. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен, $Qy \in C([0,T];\mathcal{Y})$. Тогда система* (10) *$\varepsilon$-управляема за время T в том и только в том случае, когда $\overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{im}X_{\alpha,\alpha}(s)L_1^{-1}QB : 0 < s < T\} = \mathcal{X}^1$.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что в силу предложения 1 достаточно рассматривать только ε-управляемость системы (10) из нуля. Пусть система не является ε-управляемой из нуля. Тогда множество векторов вида

$$\int\limits_0^T (T-s)^{\alpha-1}X_{\alpha,\alpha}(T-s)L_1^{-1}QBu(s)ds, \quad \text{где } u \in C([0,T];\mathcal{U}),$$

не плотно в пространстве $\mathcal{X}^1$. По теореме Хана — Банаха в таком случае существует функционал $f \in \mathcal{X}^{1*} \setminus \{0\}$, для которого

$$f\left(\int\limits_0^T (T-s)^{\alpha-1}X_{\alpha,\alpha}(T-s)L_1^{-1}QBu(s)ds\right) =$$

$$= \int\limits_0^T f\left((T-s)^{\alpha-1}X_{\alpha,\alpha}(T-s)L_1^{-1}QBu(s)\right)ds = 0 \qquad (12)$$

при всех $u \in C([0,T];\mathcal{U})$.

Для всякой функции v из пространства Лебега — Бохнера $L_1(0,T;\mathcal{U})$ существует последовательность $\{u_n\} \subset C([0,T];\mathcal{U})$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = v$ в $L_1(0,T;\mathcal{U})$.

Поэтому с учётом теоремы 1 (iv)

$$\left|\int\limits_0^T f((T-s)^{\alpha-1}X_{\alpha,\alpha}(T-s)L_1^{-1}QB(u_n(s)-v(s)))ds\right| \le$$

$$\le \|f\|_{\mathcal{X}^{1*}}T^\alpha E_{\alpha,\alpha}(\|L_1^{-1}M_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}^1)}T^\alpha)\|L_1^{-1}QB\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{X})}\int\limits_0^T \|u_n(s)-v(s)\|_{\mathcal{U}}ds \to 0$$

при $n\to\infty$. Следовательно, равенство (12) выполняется при всех $u \in L_1(0,T;\mathcal{U})$. Возьмём $t_0 \in (0,T)$ и малое $\delta>0$, $u_\delta(t)=w\in\mathcal{U}$ при $t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]$, $u_\delta(t)=0$ при $t\in[0,T]\setminus[t_0-\delta,t_0+\delta]$. Тогда $u_\delta\in L_1(0,T;\mathcal{U})$, и в силу непрерывности подынтегрального выражения

$$0=\frac{1}{2\delta}\int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} f\left((T-s)^{\alpha-1}X_{\alpha,\alpha}(T-s)L_1^{-1}QBw\right)ds=$$

$$=f\left((T-\xi)^{\alpha-1}X_{\alpha,\alpha}(T-\xi)L_1^{-1}QBw\right),$$

где $\xi\in(t_0-\delta,t_0+\delta)$. Поэтому $f\left(X_{\alpha,\alpha}(T-\xi)L_1^{-1}QBw\right)=0$, переходя к пределу при $\delta\to 0+$, получим равенство $f\left(X_{\alpha,\alpha}(T-t_0)L_1^{-1}QBw\right)=0$ при всех $t_0\in(0,T)$, $w\in\mathcal{U}$. Таким образом, из плотности в пространстве $\mathcal{X}^1$ множества $\mathrm{span}\{\mathrm{im}X_{\alpha,\alpha}(s)L_1^{-1}QB: 0<s<T\}$ следует ε-управляемость за время T.

Обратное утверждение очевидно в силу интегрального вида решения уравнения (10) с нулевыми начальными данными и в силу определения интеграла. □

Доказанное утверждение может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 4. *Пусть $A\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$, $z\in C([0,T];\mathcal{X})$. Тогда система $D_t^\alpha x(t)=Ax(t)+Bu(t)+z(t)$ ε-управляема за время T в том и только в том случае, когда* $\overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{im}E_{\alpha,\alpha}(s^\alpha A)B:0<s<T\}=\mathcal{X}$.

Замечание 2. В работе [28] доказаны утверждения, аналогичные лемме 1 и теореме 4, для сильных решений задачи Коши.

Замечание 3. Из леммы 2 следует, что ε-управляемость системы (10) за время T влечёт её ε-управляемость за любое большее время $T_1>T$.

Сформулируем критерий ε-управляемости системы (11).

Лемма 2. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен, $y\in C([0,T];\mathcal{Y})$. Тогда*

(i) *система* (11) *ε-управляема за время T, если и только если справедливо равенство* $\mathcal{X}^0=\overline{\mathrm{im}}M_0^{-1}(I-Q)B$;

(ii) *система* (11) *управляема за время T, если и только если справедливо равенство* $\mathcal{X}^0=\mathrm{im}M_0^{-1}(I-Q)B$, *т. е.* $\mathcal{X}^0=D_{M_0}$, $\mathcal{Y}^0=\mathrm{im}(I-Q)B$.

Доказательство. Утверждения леммы следуют из вида решения системы (11) (см. замечание 1). При доказательстве второго утверждения используется также биективность оператора $M_0:D_{M_0}\to\mathcal{Y}^0$ (см. теорему 1). □

Замечание 4. Из леммы 2 следует, что ε-управляемость (управляемость) системы (11) за время T влечёт её ε-управляемость (управляемость) за любое время $T_1>0$.

Теорема 5. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен, $y \in C([0,T];\mathcal{Y})$. Тогда система* (9) *$\varepsilon$-управляема за время T, если и только если $\mathcal{X}^0 = \overline{\text{im}}M_0^{-1}(I-Q)B$ и*

$$\overline{\text{span}}\{\text{im}X_{\alpha,\alpha}(s)L_1^{-1}QB : 0 < s < T\} = \mathcal{X}^1. \tag{13}$$

Доказательство. Из теоремы 3 и лемм 1, 2 получим требуемое. □

Замечание 5. В силу замечаний 3 и 4 и теоремы 3 из ε-управляемости системы (9) за время T следует её ε-управляемость за любое большее время $T_1 > T$.

Следующие достаточные условия ε-управляемости имеют простую форму, но полезны при рассмотрении некоторых конкретных систем.

Следствие 2. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен, $y \in C([0,T];\mathcal{Y})$. Тогда*

(i) *если* $\text{im}(I-Q)B = \mathcal{Y}^0$, *то система* (11) *$\varepsilon$-управляема за любое время $T > 0$;*

(ii) *если* $\overline{\text{im}}QB = \mathcal{Y}^1$, *то система* (10) *$\varepsilon$-управляема за любое время T;*

(iii) *если* $\text{im}(I-Q)B = \mathcal{Y}^0$, $\overline{\text{im}}QB = \mathcal{Y}^1$, *то система* (9) *$\varepsilon$-управляема за любое время $T > 0$;*

(iv) *если оператор $B : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ сюръективен, то система* (9) *ε-управляема за любое время $T > 0$.*

Доказательство. Из равенства $\text{im}(I-Q)B = \mathcal{Y}^0$ следует, что $\text{im}M_0^{-1}(I-Q)B = M_0^{-1}[\mathcal{Y}^0] = D_{M_0}$. Из плотности области определения D_{M_0} в подпространстве $\mathcal{Y}^0$ и леммы 2 (i) следует первое утверждение.

Заметим, что $\lim\limits_{t\to 0+} X_{\alpha,\alpha}(t)|_{\mathcal{X}^1} = \Gamma(\alpha)^{-1}I|_{\mathcal{X}^1}$ в норме пространства $\mathcal{L}(\mathcal{X}^1)$, поэтому при малых t операторы

$$X_{\alpha,\alpha}(t)|_{\mathcal{X}^1} = E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha L_1^{-1}M_1) : \mathcal{X}^1 \to \mathcal{X}^1$$

являются гомеоморфизмами, как и оператор $L_1^{-1} : \mathcal{Y}^1 \to \mathcal{X}^1$. Следовательно, при таких t образ $\text{im}X_{\alpha,\alpha}(t)L_1^{-1}QB$ плотен в $\mathcal{X}^1$, если и только если образ $\text{im}QB$ плотен в подпространстве $\mathcal{Y}^1$. В силу леммы 1 получим второе утверждение.

Третье утверждение следует из первых двух и из теоремы 3 (или теоремы 5).

В случае сюръективности оператора B выполняются условия утверждения (iii). □

При $M \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ приведённые достаточные условия можно ослабить.

Следствие 3. *Пусть оператор $M \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ $(L,0)$-ограничен, $y \in C([0,T];\mathcal{Y})$. Тогда*

(i) *система* (11) *ε-управляема за любое время $T > 0$, если и только если $\mathcal{Y}^0 = \overline{\text{im}}(I-Q)B$;*

(ii) *если* $\overline{\text{im}}B = \mathcal{Y}$, *то система* (9) *$\varepsilon$-управляема за любое время $T > 0$.*

Доказательство. Действительно, в таком случае оператор $M_0 : \mathcal{X}^0 \to \mathcal{Y}^0$ является гомеоморфизмом, поэтому по лемме 2 (i) получим первое утверждение.

Отсюда, учитывая утверждение (iii) предыдущего следствия, получим второе утверждение. □

5. Критерий ε-управляемости за свободное время

Введём в рассмотрение ещё одно понятие управляемости.

Система (9) называется *ε-управляемой за свободное время,* если при всех $(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) = \overline{x} \in (\mathcal{X}^1)^m$, $\hat{x} \in \mathcal{X}$ и $\varepsilon > 0$ найдётся $T > 0$ и функция управления $u \in C([0,T];\mathcal{U})$, такие, что $\|x(T;\overline{x};u) - \hat{x}\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon$.

Замечание 6. Можно ввести аналоги всех использованных в § 3 определений для управляемости за свободное время и доказать для них утверждения, абсолютно аналогичные предложениям 1–4, заменяя понятия управляемости или ε-управляемости за время T на управляемость или ε-управляемость за свободное время.

Замечание 7. Очевидно, что ε-управляемость за время T влечёт ε-управляемость за свободное время.

Лемма 3. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен, $y \in C([0,T];\mathcal{Y})$. Тогда система (11) ε-управляема за свободное время, если и только если $\overline{\mathrm{im}} M_0^{-1}(I-Q)B = \mathcal{X}^0$.*

Доказательство. Доказывается так же, как лемма 2. □

Следствие 4. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен, $y \in C([0,T];\mathcal{Y})$. Тогда система (11) ε-управляема за свободное время, если и только если она ε-управляема за любое время $T > 0$.*

Доказательство. Утверждение сразу следует из леммы 2 (i) и леммы 3. □

Лемма 4. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен, $y \in C([0,T];\mathcal{Y})$. Тогда система (10) ε-управляема за свободное время, если и только если*

$$\overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{im} X_{\alpha,\alpha}(s) L_1^{-1} Q B : s > 0\} = \mathcal{X}^1.$$

Доказательство. Рассуждая от противного, как при доказательстве леммы 1, получим равенство $f\left(X_{\alpha,\alpha}(t_0) L_1^{-1} Q B w\right) = 0$ при всех $T > 0$, $t_0 \in (0,T)$, $w \in \mathcal{U}$. В силу произвольности $T > 0$ отсюда следует, что $f\left(X_{\alpha,\alpha}(s) L_1^{-1} Q B w\right) = 0$ при каждом $s > 0$. Следовательно, предположение, что система (10) не ε-управляема, влечёт, что множество $\mathrm{span}\{\mathrm{im} X_{\alpha,\alpha}(s) L_1^{-1} Q B : s > 0\}$ не плотно в $\mathcal{X}^1$.

Обратное утверждение данной леммы следует из интегрального вида решения и того факта, что система (10) ε-управляема из любой точки в любую за свободное время тогда и только тогда, когда она ε-управляема из нуля за свободное время (см. замечание 6). □

Теорема 6. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен. Тогда система (9) ε-управляема за свободное время, если и только если системы (10) и (11) ε-управляемы за свободное время.*

Доказательство. Прямое утверждение теоремы очевидно, докажем обратное. Возьмём $\overline{x} \in (\mathcal{X}^1)^m$, $\hat{x} \in \mathcal{X}$. Тогда существуют $T > 0$ и управление $u \in C([0,T];\mathcal{Y})$, приводящее за время T траекторию системы (10) в ε-окрестность точки $P\hat{x}$. Изменяя функцию u в достаточно малой левой окрестности точки $t = T$, как при доказательстве теоремы 3, получим управление $v \in C([0,T];\mathcal{Y})$, которое также за время T приводит траекторию системы (10) в ε-окрестность точки $P\hat{x}$. При этом в момент времени T траектория системы (11) приходит в точку $(I-P)\hat{x}$. Таким образом, траектория системы (9) приходит в ε-окрестность точки $\hat{x} = P\hat{x} + (I-P)\hat{x}$. Теорема доказана. □

Из теоремы 6 и лемм 3, 4 следует критерий ε-управляемости за свободное время системы (9).

Теорема 7. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен, $y \in C([0,T];\mathcal{Y})$. Тогда система (9) ε-управляема за свободное время, если и только если $\overline{\operatorname{im}} M_0^{-1}(I-Q)B = \mathcal{X}^0$ и $\overline{\operatorname{span}}\{\operatorname{im} X_{\alpha,\alpha}(s)L_1^{-1}QB : s > 0\} = \mathcal{X}^1$.*

6. Примеры бесконечномерных систем

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим систему управления, описываемую уравнением

$$D_t^\alpha(\lambda - \Delta)w(x,t) = \alpha\Delta w(x,t) + c(x)\triangle u(x,t),\ (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{14}$$

$\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, $c \in L_2(\Omega;\mathbb{R})$, с граничным условием

$$w(x,t) = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{15}$$

Чтобы привести эту систему к виду (9), выберем

$$\mathcal{X} = \mathcal{U} = H_0^2(\Omega) := \left\{v \in W_2^2(\Omega) : v(x) = 0,\, x \in \partial\Omega\right\}, \quad \mathcal{Y} = L_2(\Omega), \tag{16}$$

$$L = \lambda - \Delta \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}), \quad M = \alpha\Delta \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}), \quad B = c\Delta \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}). \tag{17}$$

Будем использовать обозначение A для самосопряжённого оператора из класса $\mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения $D_A := H_0^2(\Omega)$, $Az := \Delta z$, $z \in D_A$. Обозначим также через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ ортонормированную в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $L_2(\Omega)$ систему собственных функций оператора A, занумерованную в порядке неубывания собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учётом их кратности. При этом будет использоваться тот факт, что спектр $\sigma(A)$ оператора A дискретный, конечнократный и сгущается только к $-\infty$.

Предложение 5. *Пусть $\alpha\lambda \neq 0$, $c, c^{-1} \in L_2(\Omega)$. Тогда система* (14), (15) *ε-управляема за время T.*

Доказательство. В [29, теорема 8] показана $(L,0)$-ограниченность оператора M, где пространства $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ определены равенствами (16), а операторы L, M — равенствами (17). При этом показано, что $Q = \sum\limits_{\lambda_k \neq \lambda} \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k$, $I - Q = \sum\limits_{\lambda_k = \lambda} \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k$.

Имеем $B = cA$, $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — изоморфизм. Если $c^{-1} \in L_2(\Omega)$, то оператор умножения на $c(x)^{-1}$ действует из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, а умножение на функцию $c(x)$ в таком случае — биективный оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Тогда $\operatorname{im}B = \mathcal{Y}$ и согласно следствию 3 (ii) получаем требуемый результат. □

Рассмотрим ещё одну начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^k v}{\partial t^k}(x,0) = v_k(x), \quad x \in \Omega, \quad k = 0,1,\ldots,m-1, \tag{18}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{19}$$

для линеаризованной системы уравнений

$$D_t^\alpha(1 - \chi\Delta)v(x,t) = -r(x,t) + u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{20}$$

$$\nabla \cdot v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{21}$$

описывающей динамику жидкости Скотт-Блэра [34]. Здесь, как и прежде, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\chi \in \mathbb{R}$. Вектор-функции $v = (v_1, v_2, \dots, v_d)$ (скорость жидкости), $r = (r_1, r_2, \dots, r_d)$ (градиент давления) неизвестны. Через m обозначено наименьшее целое число, не превосходимое $\alpha > 0$.

Введём обозначения $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^n$. Замыкание линеала $\mathcal{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot v = 0\}$ в норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а в норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Также используем обозначения $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к подпространству $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi = I - \Sigma$ — соответствующие ортопроекторы.

Оператор $A := \Sigma\Delta$ в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$, как известно, имеет действительный, отрицательный, дискретный, конечнократный спектр, сгущающийся только к $-\infty$ [35]. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ собственные значения оператора A, занумерованные в порядке невозрастания с учётом их кратности, а через $\{\varphi_k\}$ — ортонормированную систему соответствующих собственных функций, образующую базис в $\mathbb{H}_\sigma$ [35].

Учитывая граничное условие (19) и уравнение несжимаемости (21), положим

$$\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi, \quad \mathcal{Y} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi, \tag{22}$$

$$L = \begin{pmatrix} I - \chi A & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \quad M = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}). \tag{23}$$

Лемма 5. *Пусть $\chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ и операторы L и M заданы формулами* (22) *и* (23) *соответственно. Тогда оператор M $(L, 0)$-ограничен, при этом*

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta(I - \chi A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$X_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P}{\Gamma(\beta)}, \quad t \geq 0, \ \alpha, \beta > 0. \tag{25}$$

Доказательство. При каждом $v \in \mathbb{H}_\sigma$

$$\|(I - \chi A)^{-1} v\|_{\mathbb{H}_\sigma^2}^2 = \|(I - \chi A)^{-1} v\|_{\mathbb{H}_\sigma}^2 + \|A(I - \chi A)^{-1} v\|_{\mathbb{H}_\sigma}^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + \lambda_k^2)|\langle v, \varphi_k\rangle|^2}{|1 - \chi\lambda_k|^2} \leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, \varphi_k\rangle|^2 = C_1 \|v\|_{\mathbb{H}_\sigma}^2,$$

следовательно, $(I - \chi A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma; \mathbb{H}_\sigma^2)$. Поэтому при $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ имеем непрерывный оператор

$$(\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} \mu^{-1}(I - \chi A)^{-1} & \mathbb{O} \\ \chi\Pi\Delta(I - \chi A)^{-1} & I \end{pmatrix} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}.$$

Далее получим

$$R_\mu^L(M) = \begin{pmatrix} \mu^{-1} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad L_\mu^L(M) = \begin{pmatrix} \mu^{-1} I & \mathbb{O} \\ -\mu^{-1}\chi\Pi\Delta(I - \chi A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Интегрируя эти функции по окружности положительного радиуса с центром в нуле, по теореме о вычетах получим проекторы (24). Аналогичным образом получим равенство (25).

Очевидно, что $\ker L = \ker P$, поэтому $L_0 = \mathbb{O}$ и оператор M $(L, 0)$-ограничен. $\square$

Замечание 8. В данном случае оператор $S = \mathbb{O}$.

Замечание 9. Из вида проекторов P и Q следует, что $\mathcal{X}^0 = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{X}^1 = \mathbb{H}^2_\sigma \times \{0\}$, $\mathcal{Y}^0 = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{Y}^1 = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi : w_2 = -\chi \Pi \Delta (I - \chi A)^{-1} w_1\}$.

Применив теорему 2 и лемму 5, сразу получим утверждение.

Следствие 5. *Пусть* $\chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, $v_k \in \mathbb{H}^2_\sigma$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $u \in C([0,T]; \mathbb{L}_2)$. *Тогда существует единственное решение задачи* (18)–(21), *при этом оно имеет вид*

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} v_k + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (I - \chi A)^{-1} \Sigma u(x,s) ds,$$

$$r(x,t) = \chi \Pi \Delta (I - \chi A)^{-1} \Sigma u(x,t) + \Pi u(x,t).$$

Пусть B — оператор вложения из $\mathcal{U}$ в $\mathbb{L}_2$. В силу следствия 3 (ii) для любого пространства $\mathcal{U}$, плотного в $\mathbb{L}_2$, система (19)–(21) ε-управляема за любое время $T > 0$. Если, скажем, $\mathcal{U} = \mathbb{H}_\pi$, то $QB = \mathbb{O}$ и система (19)–(21) не является ε-управляемой даже за свободное время.

7. Об ε-управляемости вырожденных систем с конечномерным входом

Пусть даны $y : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{Y}$, $b_i \in \mathcal{Y}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим систему управления

$$D^\alpha_t L x(t) = M x(t) + \sum_{i=1}^n b_i u_i(t) + y(t), \tag{26}$$

где $u_i : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Это частный случай системы (9). Чтобы убедиться в этом, достаточно взять $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $Bu(t) = \sum\limits_{i=1}^n b_i u_i(t)$. Такие системы управления называются системами с конечномерным входом. Понятно, что $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathcal{Y})$.

В соответствии с теоремой 1 уравнение (26) редуцируется к системе двух уравнений

$$D^\alpha_t x^1(t) = S x^1(t) + L_1^{-1} \sum_{i=1}^n b^1_i u_i(t) + L_1^{-1} y^1(t), \tag{27}$$

$$0 = x^0(t) + M_0^{-1} \sum_{i=1}^n b^0_i u_i(t) + M_0^{-1} y^0(t). \tag{28}$$

Здесь $b^1_i = Q b_i$, $b^0_i = (I - Q) b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x^1(t) = P x(t)$, $x^0(t) = (I - P) x(t)$, $y^1(t) = Q y(t)$, $y^0(t) = (I - Q) y(t)$, $t \geq 0$. Решение обобщённой задачи Шоуолтера — Сидорова $x^{1(k)}(0) = x_k$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, для уравнения (26) имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k X_{\alpha,k+1}(t) x_k + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} X_{\alpha,\alpha}(t-s) L_1^{-1} \left(\sum_{i=1}^n b^1_i u_i(s) + y^1(s) \right) ds -$$

$$-M_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^0 u_i(t) + y^0(t)\right).$$

Здесь первая сумма и интеграл определяют решение уравнения (27), а последнее слагаемое даёт решение уравнения (28). Функции управления $u = (u_1, \ldots, u_n)$ будут выбираться из пространства $C([0,T];\mathbb{R}^n)$.

Теорема 8. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен, $y \in C([0,T];\mathcal{Y})$. Тогда*

(i) *система* (28) *ε-управляема за время T, если и только если $\mathcal{X}^0 = D_{M_0}$, $\mathcal{Y}^0$ не более, чем n-мерно, и выполняется равенство*

$$\operatorname{span}\{(I-Q)b_i,\, i = 1,2,\ldots,n\} = \mathcal{Y}^0;$$

(ii) *система* (27) *ε-управляема за время T, если и только если*

$$\overline{\operatorname{span}}\{X_{\alpha,\alpha}(s)L_1^{-1}Qb_i,\, 0 < s < T,\, i = 1,2,\ldots,n\} = \mathcal{X}^1;$$

(iii) *система* (26) *ε-управляема за время T, если и только если $\mathcal{X}^0 = D_{M_0}$, $\mathcal{Y}^0$ не более, чем n-мерно, и выполняются равенства*

$$\operatorname{span}\{(I-Q)b_i,\, i = 1,2,\ldots,n\} = \mathcal{Y}^0,$$

$$\overline{\operatorname{span}}\{X_{\alpha,\alpha}(s)L_1^{-1}Qb_i,\, 0 < s < T,\, i = 1,2,\ldots,n\} = \mathcal{X}^1.$$

Доказательство. По теореме 5 необходимым и достаточным условием ε-управляемости системы (28) является условие

$$\mathcal{X}^0 = \overline{\operatorname{im}} M_0^{-1}(I-Q)B = \overline{\operatorname{span}}\left\{M_0^{-1}b_i^0,\, i = 1,2,\ldots,n\right\}.$$

Вследствие конечномерности этого множества, оно совпадает со своим замыканием, поэтому в силу плотной определённости оператора M_0 $\mathcal{X}^0 = \operatorname{span}\left\{M_0^{-1}b_i^0,\, i = 1,2,\ldots,n\right\} = D_{M_0}$, $\mathcal{Y}^0 = M[D_{M_0}] = \operatorname{span}\{b_i^0,\, i = 1,2,\ldots,n\}$. Тем самым первое утверждение доказано. С учётом этого утверждения и теоремы 5 легко доказать второе и третье утверждения. □

Рассуждая как в общем случае, нетрудно получить критерий конечномерной ε-управляемости за свободное время систем (26), (27), (28).

Теорема 9. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен, $y \in C([0,T];\mathcal{Y})$. Тогда*

(i) *система* (28) *ε-управляема за свободное время, если и только если $\mathcal{X}^0 = D_{M_0}$, $\mathcal{Y}^0$ не более, чем n-мерно, и выполняется равенство*

$$\operatorname{span}\{(I-Q)b_i,\, i = 1,2,\ldots,n\} = \mathcal{Y}^0;$$

(ii) *система* (27) *ε-управляема за свободное время, если и только если*

$$\overline{\operatorname{span}}\{X_{\alpha,\alpha}(s)L_1^{-1}Qb_i,\, s > 0,\, i = 1,2,\ldots,n\} = \mathcal{X}^1;$$

(iii) *система* (26) *ε-управляема за свободное время, если и только если $\mathcal{X}^0 = D_{M_0}$, $\mathcal{Y}^0$ не более, чем n-мерно, и выполняются равенства*

$$\operatorname{span}\{(I-Q)b_i,\, i = 1,2,\ldots,n\} = \mathcal{Y}^0,$$

$$\overline{\operatorname{span}}\{X_{\alpha,\alpha}(s)L_1^{-1}Qb_i,\, s > 0,\, i = 1,2,\ldots,n\} = \mathcal{X}^1.$$

Следствие 6. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен, $y \in C([0,T];\mathcal{Y})$. Тогда из ε-управляемости за свободное время системы* (28) *следует, что $M_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$.*

Доказательство. Утверждение сразу следует из равенства $D_{M_0} = \mathcal{X}^0$ и замкнутости оператора M_0. □

Следствие 7. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен, $y \in C([0,T];\mathcal{Y})$. Тогда система (28) ε-управляема за свободное время, если и только если она ε-управляема за любое время $T>0$.*

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 8 (i) и теоремы 9 (i). □

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$ рассмотрим систему управления с конечномерным входом

$$D_t^\alpha(\lambda - \triangle)w(x,t) = \alpha\triangle w(x,t) + \sum_{i=1}^{n}\hat{b}_i(x)u_i(t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{29}$$

снабжённую граничным условием (15). Здесь $\hat{b}_i \in L_2(\Omega)$, $i = 1,2,\dots,n$.

Предложение 6. *Пусть $\alpha\lambda \neq 0$, $\hat{b}_i \in L_2(\Omega)$, $i=1,2,\dots,n$. Если система (29), (15) ε-управляема за свободное время, то множество*

$$\operatorname{span}\left\{\sum_{\lambda_k=\lambda}\langle\hat{b}_i,\varphi_k\rangle\varphi_k,\ i=1,2,\dots,n\right\} \subset L_2(\Omega)$$

содержит базис подпространства $\mathcal{Y}^0 = \operatorname{span}\{\varphi_k:\ \lambda_k=\lambda\}$.

Доказательство. Выберем операторы L, M, как для системы (14), (15). По теореме 9 из ε-управляемости за свободное время системы (29), (15) следует равенство $\mathcal{Y}^0 = \operatorname{span}\{b_i^0,\ i=1,2,\dots,n\}$, где $b_i^0 = \sum\limits_{\lambda_k=\lambda}\langle\hat{b}_i,\varphi_k\rangle\varphi_k$. □

Замечание 10. В частности, из предложения 6 следует, что если кратность собственного значения $\lambda \in \sigma(A)$ больше n, то система (29), (15) не является ε-управляемой за свободное время. Действительно, подпространства $\mathcal{X}^0$ и $\mathcal{Y}^0$ в случае ε-управляемости системы не более, чем n-мерны. Например, система (29), (15) при $d=2$, $\Omega=(0,\pi)\times(0,\pi)$, $\lambda=-5$, $n=1$ не является ε-управляемой за свободное время.

Замечание 11. Система (19)–(21) в случае конечномерного входа, т. е. при $u(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{n}\hat{b}_i(x)u_i(t)$, не ε-управляема за свободное время, так как подпространство $\mathcal{Y}^0 = \{0\}\times\mathbb{H}_\pi$ бесконечномерно.

8. Об управляемости одной вырожденной конечномерной системы

Рассмотрим систему управления

$$\begin{gathered} D_t^\alpha x(t) = m_{11}x(t) + m_{12}y(t) + b_1u(t), \\ 0 = m_{21}x(t) + y(t) + b_2u(t). \end{gathered} \tag{30}$$

Возьмём $\mathcal{X}=\mathcal{Y}=\mathbb{R}^2$, $\mathcal{U}=\mathbb{R}$,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Сразу заметим, что в силу конечномерности системы ε-управляемость равносильна её точной управляемости.

При $\mu \neq m_{11} - m_{12}m_{21}$

$$(\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu - m_{11} + m_{12}m_{21}} & \frac{-m_{12}}{\mu - m_{11} + m_{12}m_{21}} \\ \frac{-m_{21}}{\mu - m_{11} + m_{12}m_{21}} & \frac{-(\mu - m_{11})}{\mu - m_{11} + m_{12}m_{21}} \end{pmatrix},$$

поэтому оператор M (L, σ)-ограничен,

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\mu - m_{11} + m_{12}m_{21}| = 1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu - m_{11} + m_{12}m_{21}} & 0 \\ \frac{-m_{21}}{\mu - m_{11} + m_{12}m_{21}} & 0 \end{pmatrix} d\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, $\ker L = \ker P$, оператор M $(L, 0)$-ограничен и условия Шоуолтера — Сидорова могут быть заданы в виде

$$x^{(k)}(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m - 1.$$

Далее

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\mu - m_{11} + m_{12}m_{21}| = 1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu - m_{11} + m_{12}m_{21}} & \frac{-m_{12}}{\mu - m_{11} + m_{12}m_{21}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\mu = \begin{pmatrix} 1 & -m_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что если $b_1 \neq m_{12}b_2$, то $\mathrm{im}QB = \mathrm{im}Q = \mathcal{Y}^1 = \mathbb{R} \times \{0\}$, и тогда при $b_2 \neq 0$ $\mathrm{im}(I - Q)B = \mathrm{im}(I - Q) = \mathcal{Y}^0$ и двумерная система (30) с одномерным входом управляема, а при $b_2 = 0$ $\mathrm{im}(I - Q)B = \{0\}$ и система управляемой не является. Действительно, в этом случае все её траектории лежат на прямой $y = -m_{21}x$.

Если же $b_1 = m_{12}b_2$, то решение системы (30) имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha, k+1}(t^\alpha(m_{11} - m_{12}m_{21}))x_k, \quad y(t) = -m_{21}x(t) - b_2u(t),$$

поэтому, например, при $x_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots, m - 1$, получим $x(t) > 0$ для $t > 0$ и, таким образом, система не является управляемой.

Список литературы

1. **Kalman, R. E.** Controllability of linear dynamical systems / R. E. Kalman, Y. C. Ho, K. S. Narendra // Contributions to Differential Equations. — 1963. — Vol. 1, no. 2. — P. 189–213.
2. **Fattorini, H. O.** On complete controllability of linear systems / H. O. Fattorini // Journal of Differential Equations. — 1967. — Vol. 3. — P. 391–402.
3. **Красовский, Н. Н.** Теория управления движением / Н. Н. Красовский. — М. : Наука, 1968. — 359 с.
4. **Куржанский, А. Б.** К управляемости в банаховых пространствах / А. Б. Куржанский // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 6, № 9. — С. 1715–1718.
5. **Triggiani, R.** Controllability and observability in Banach space with bounded operators / R. Triggiani // SIAM Journal on Control. — 1975. — Vol. 13, no. 2. — P. 462–491.
6. **Salamon, D.** On controllability and observability of time delay systems / D. Salamon // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1984. — Vol. AC-29, no. 5. — P. 432–439.
7. **Shklyar, B.** Exact null controllability of abstract differential equations by finite-dimensional control and strongly minimal families of exponentials / B. Shklyar // Differential Equations and Applications. — 2011. — Vol. 2, no. 3. — P. 171–188.

8. **Curtain, R. F.** The Salamon — Weiss class of well-posed infinite dimensional linear systems: a survey / R. F. Curtain // IMA Journal of Mathemtical Control and Information. — 1997. — Vol. 14. — P. 207–223.
9. **Шолохович, Ф. А.** Об управляемости линейных динамических систем / Ф. А. Шолохович // Изв. Урал. гос. ун-та. — 1998. — Т. 10, № 1. — С. 103–126.
10. **Klamka, J.** Controllability of dynamical systems. A survey / J. Klamka // Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences. — 2013. — Vol. 61, no. 2. — P. 335–342.
11. **Debbouche, A.** Controllability of fractional evolution nonlocal impulsive quasilinear delay integro-differential systems / A. Debbouche, D. Baleanu // Computers and Mathematics with Applications. — 2011. — Vol. 62. — P. 1442–1450.
12. **Bragdi, M.** Controllability of fractional nonlocal quasilinear evolution inclusions with resolvent families / M. Bragdi, A. Debbouche // International Journal of Difference Equations. — 2013. — Vol. 8. — P. 15–25.
13. **Chalishajar, D. N.** Approximate controllability of abstract impulsive fractional neutral evolution equations with infinite delay in Bamach spaces / D. N. Chalishajar, K. Malar, K. Karthikeyan // Electronic Journal of Differential Equations. — 2013. — No. 275. — P. 1–21.
14. **Обуховский, В. В.** О задаче управляемости для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка с бесконечным запаздыванием / В. В. Обуховский, Г. Г. Петросян // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика. Математика. — 2014. — № 1. — С. 106–126.
15. **Zhou, Y.** Fractional Evolution Equations and Inclusions: Analysis and Control / Y. Zhou. — Amsterdam : Elseiver, 2016. — 294 p.
16. **Федоров, В. Е.** Управляемость линейных уравнений соболевского типа с относительно p-радиальными операторами / В. Е. Федоров, О. А. Рузакова // Изв. вузов. Математика. — 2002. — № 7. — С. 54–57.
17. **Федоров, В. Е.** Одномерная управляемость в гильбертовых пространствах линейных уравнений соболевского типа / В. Е. Федоров, О. А. Рузакова // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 8. — С. 1137–1139.
18. **Федоров, В. Е.** Одномерная и двумерная управляемость уравнений соболевского типа в банаховых пространствах / В. Е. Федоров, О. А. Рузакова // Мат. заметки. — 2003. — Т. 74, вып. 4. — С. 618–628.
19. **Рузакова, О. А.** Об ε-управляемости линейных уравнений, не разрешенных относительно производной, в банаховых пространствах / О. А. Рузакова, В. Е. Федоров // Вычисл. технологии. — 2005. — Т. 10, № 5. — С. 90–102.
20. **Федоров, В. Е.** Полная нуль-управляемость вырожденных эволюционных уравнений скалярным управлением / В. Е. Федоров, Б. Шкляр // Мат. сб. — 2012. — Т. 203, № 12. — С. 137–156.
21. **Плеханова, М. В.** Оптимальное управление вырожденными распределёнными системами / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров. — Челябинск : Издат. центр ЮУрГУ, 2013. — 174 с.
22. **Плеханова, М. В.** Об управляемости вырожденных распределенных систем / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров // Уфим. мат. журн. — 2014. — Т. 6, № 2. — С. 78–98.
23. **Fečkan, M.** Controllability of fractional functional evolution equations of Sobolev type via characteristic solution operators / M. Fečkan, J. Wang, Y. Zhou // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2014. — Vol. 156. — P. 79–95.
24. **Wang, J.** Approximate controllability of Sobolev type fractional evolution systems with nonlocal conditions / J. Wang, M. Fečkan, Y. Zhou // Evolution Equations and Control Theory. — 2017. — Vol. 6, no. 3. — P. 471–486.
25. **Mahmudov, N. I.** Approximate controllability of fractional Sobolev-type evolution equations in Banach spaces / N. I. Mahmudov // Abstract and Applied Analysis. — 2013. — ID 502839.

26. **Debbouche, A.** Sobolev type fractional abstract evolution equations with nonlocal conditions and optimal multi-controls / A. Debbouche, J. J. Nieto // Applied Mathematics and Computation. — 2014. — Vol. 245. — P. 74–85.
27. **Sviridyuk, G. A.** Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. — Utrecht, Boston : VSP, 2003. — 216 p.
28. **Fedorov, V. E.** Controllability of a class of weakly degenerate fractional order evolution equations / V. E. Fedorov, D. M. Gordievskikh, G. D. Baybulatova // AIP Conference Proceedings. — 2017. — Vol. 1907. — P. 020009.
29. **Федоров, В. Е.** Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских // Изв. вузов. Математика. — 2015. — № 1. — С. 71–83.
30. **Федоров, В. Е.** Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских, М. В. Плеханова // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 10. — С. 1367–1375.
31. **Plekhanova, M. V.** Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative / M. V. Plekhanova // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2017. — Vol. 40, no. 17. — P. 6138–6146.
32. **Герасимов, А. Н.** Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения / А. Н. Герасимов // Приклад. математика и механика. — 1948. — Т. 12. — С. 529–539.
33. **Caputo, M.** Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent — II / M. Caputo // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. — 1967. — Vol. 13. — P. 529–539.
34. **Scott-Blair, G. M.** Survey of General and Applied Rheology / G. M. Scott-Blair. — London : Pitman, 1949. — 196 p.
35. **Ладыженская, О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. — М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. — 204 с.

Поступила в редакцию 05.01.2018
После переработки 05.02.2018

Сведения об авторах

Гордиевских Дмитрий Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физико-математического и информационно-технологического образования, Шадринский государственный педагогический университет, Шадринск, Курганская обл., Россия; e-mail: dm_gordiev@mail.ru.

Федоров Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: kar@csu.ru.

Туров Михаил Михайлович, студент математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: turov_m_m@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2018. Vol. 3, iss. 1. P. 5–26.

INFINITE-DIMENSIONAL AND FINITE-DIMENSIONAL ε-CONTROLLABILITY FOR A CLASS OF FRACTIONAL ORDER DEGENERATE EVOLUTION EQUATIONS

D.M. Gordievskikh[1,a], **V.E. Fedorov**[1,2,b], **M.M. Turov**[2,c]

[1] *Shadrinsk State Pedagogical University, Shadrinsk, Kurgan region, Russia*
[2] *Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*
[a] *dm_gordiev@mail.ru,* [b] *kar@csu.ru,* [c] *turov_m_m@mail.ru*

Issues of ε-controllability is researched for linear weakly degenerate fractional order evolution control systems with distributed parameters. The case of 0-bounded pair of operators in the system is considered. Using the generalized Showalter — Sidorov conditions instead of the Cauchy conditions significantly simplified the technical part of the study. Criteria and convenient in applications sufficient conditions of the ε-controllability in time T and of the ε-controllability in free time are derived for this type systems in the cases of infinite-dimensional and finite-dimensional input. It is shown that for the finite-dimensional ε-controllability of the system finite dimensionality of its degeneracy subspace is necesarry. The obtained results are illustrated by examples of control systems described by differential equations and systems of equations not solvable with respect to the time-fractional derivative.

Keywords: *controllability, ε-controllability, degenerate evolution equation, Gerasimov — Caputo fractional derivative.*

References

1. **Kalman R.E., Ho Y.C., Narendra K.S.** Controllability of linear dynamical systems. *Contributions to Differential Equations*, 1963, vol. 1, no. 2, pp. 189–213.
2. **Fattorini H.O.** On complete controllability of linear systems. *Journal of Differential Equations*, 1967, vol. 3, pp. 391–402.
3. **Krasovskiy N.N.** *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of movement control]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 359 p. (In Russ.).
4. **Kurzhanskiy A.B.** K upravlyayemosti v banakhovykh prostranstvakh [Towards controllability in Banach spaces]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations], 1969, vol. 5, no. 9, pp. 1715–1718. (In Russ.).
5. **Triggiani R.** Controllability and observability in Banach space with bounded operators. *SIAM Journal on Control*, 1975, vol. 13, no. 2, pp. 462–491.
6. **Salamon D.** On controllability and observability of time delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1984, vol. AC-29, no. 5, pp. 432–439.
7. **Shklyar B.** Exact null controllability of abstract differential equations by finite-dimensional control and strongly minimal families of exponentials. *Differential Equations and Applications*, 2011, vol. 2, no. 3, pp. 171–188.
8. **Curtain R.F.** The Salamon — Weiss class of well-posed infinite dimensional linear systems: a survey. *IMA Journal of Mathemtical Control and Information*, 1997, vol. 14, pp. 207–223.
9. **Sholokhovich F.A.** Ob upravlyayemosti lineynykh dinamicheskikh sistem [On controllability of linear dynamical systems]. *Izvestiya Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta* [News of Ural State University], 1998, vol. 10, no. 1, pp. 103–126. (In Russ.).
10. **Klamka J.** Controllability of dynamical systems. A survey. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, 2013, vol. 61, no. 2, pp. 335–342.

11. **Debbouche A., Baleanu D.** Controllability of fractional evolution nonlocal impulsive quasilinear delay integro-differential systems. *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, vol. 62, pp. 1442–1450.
12. **Bragdi M., Debbouche A.** Controllability of fractional nonlocal quasilinear evolution inclusions with resolvent families. *International Journal of Difference Equations*, 2013, vol. 8, pp. 15–25.
13. **Chalishajar D.N., Malar K., Karthikeyan K.** Approximate controllability of abstract impulsive fractional neutral evolution equations with infinite delay in Banach spaces. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2013, no. 275, pp. 1–21.
14. **Obukhovskiy V.V., Petrosyan G.G.** O zadache upravlyayemosti dlya polulineynogo funktsional'no-differentsial'nogo vklyucheniya drobnogo poryadka s beskonechnym zapazdyvaniyem [On controllability problem for a semilinear functional-differential inclusion of fractional order with infinite delay]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika* [Bulletin of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics], 2014, no. 1, pp. 106–126. (In Russ.).
15. **Zhou Y.** *Fractional Evolution Equations and Inclusions: Analysis and Control.* Amsterdam, Elseiver, 2016. 294 p.
16. **Fedorov V.E., Ruzakova O.A.** Controllability of linear Sobolev type equations with relatively p-radial operators. *Russian Mathematics*, 2002, vol. 46, no. 7, pp. 54–57.
17. **Fedorov V.E., Ruzakova O.A.** One-dimensional controllability in Hilbert spaces of linear Sobolev type equations. *Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 8, pp. 1137–1139.
18. **Fedorov V.E., Ruzakova O.A.** Controllability in dimensions of one and two of Sobolev-type equations in Banach spaces. *Mathematical Notes*, 2003, vol. 74, no. 4, pp. 583–592.
19. **Ruzakova O.A., Fedorov V.E.** Ob ε-upravlyayemosti lineynykh uravneniy, ne razreshyonnykh otnositel'no proizvodnoy, v banakhovykh prostranstvakh [On ε-controllability of linear equations not solved with respect to the derivative in Banach spaces]. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computational Technologies], 2005, vol. 10, no. 5, pp. 90–102. (In Russ.).
20. **Fedorov V.E., Shklyar B.** Exact null controllability of degenerate evolution equations with scalar control. *Sbornik: Mathematics*, 2012, vol. 203, no. 12, pp. 1817–1836.
21. **Plekhanova M.V., Fedorov V.E.** *Optimal'noye upravleniye vyrozhdennymi raspredelyonnymi sistemami* [Optimal Control for Degenerate Distributed Systems]. Chelyabinsk, Publishing Center of South Ural State University, 2013. 174 p. (In Russ.).
22. **Plekhanova M.V., Fedorov V.E.** On control of degenerate distributed systems. *Ufa Mathematical Journal*, 2014, vol. 6, no. 2, pp. 77–96.
23. **Fečkan M., Wang J., Zhou Y.** Controllability of fractional functional evolution equations of Sobolev type via characteristic solution operators. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2014, vol. 156, pp. 79–95.
24. **Wang J., Fečkan M., Zhou Y.** Approximate controllability of Sobolev type fractional evolution systems with nonlocal conditions. *Evolution Equations and Control Theory*, 2017, vol. 6, no. 3, pp. 471–486.
25. **Mahmudov N.I.** Approximate controllability of fractional Sobolev-type evolution equations in Banach spaces. *Abstract and Applied Analysis*, 2013, ID 502839.
26. **Debbouche A., Nieto J.J.** Sobolev type fractional abstract evolution equations with nonlocal conditions and optimal multi-controls. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, vol. 245, pp. 74–85.
27. **Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.** *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht, Boston, VSP, 2003. 216 p.
28. **Fedorov V.E., Gordievskikh D.M., Baybulatova G.D.** Controllability of a class of weakly degenerate fractional order evolution equations. *AIP Conference Proceedings*, 2017, vol. 1907, p. 020009.

29. **Fedorov V.E., Gordievskikh D.M.** Resolving operators of degenerate evolution equations with fractional derivative with respect to time. *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, no. 1, pp. 60–70.
30. **Fedorov V.E., Gordievskikh D.M., Plekhanova M.V.** Equations in Banach spaces with a degenerate operator under a fractional derivative. *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 10, pp. 1360–1368.
31. **Plekhanova M.V.** Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2017, vol. 40, no. 17, pp. 6138–6146.
32. **Gerasimov A.N.** Obobshcheniye lineynykh zakonov deformatsii i ikh prilozheniye k zadacham vnutrennego treniya [Generalization of linear laws of deformation and their applications to problems of internal friction]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics], 1948, vol. 12, pp. 529–539. (In Russ.).
33. **Caputo M.** Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent — II. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 1967, vol. 13, pp. 529–539.
34. **Scott-Blair G.M.** *Survey of General and Applied Rheology.* London, Pitman, 1949. 196 p.
35. **Ladyzhenskaya O.A.** *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow.* New York, London, Paris, Gordon and Breach Science Publishers, 1969. 198 p.

Accepted article received 05.01.2018
Corrections received 05.02.2018